

Faktor Dominan Pada Deformasi Gelombang Bikromatik Multiarah

Toto Nusantara

Jurusan Matematika FMIPA

Universitas Negeri Malang

toto@yahoo.com

Abstrak

In this paper we consider to dominant factor of multidirectional bichromatic waves deformation. Third order solution of iKP equation with bichromatic signal at the boundary is used as a model of bichromatic waves. Due to dispersive and non linearity properties of wave model, bichromatic wave was deformed when propagated. By analysing of wave component, it was found that wave deformation due to first order and third order component side band and free waves.

Kata Kunci: *multidirectional waves, one point source, extreme position*

1. Pendahuluan

Kajian tentang gelombang ekstrim yang dipublikasikan oleh Stansberg [5] cukup mendapat perhatian dari kelompok peneliti kelautan Indonesia maupun kelompok penelitian luar negeri. Penelitian tentang gelombang ekstrim telah dan sedang dilakukan oleh kelompok peneliti kelautan yang tergabung di KPP MIT - ITB, MARIN Belanda, dan Universitas Twente Belanda seperti dalam [2, 3, 4, 6, 9, 10, 11, 13]. Perhatian yang besar terhadap penelitian gelombang ekstrim ini terkait dengan manfaat dan pentingnya untuk pengembangan

ilmu, khususnya pembangkitan gelombang terskala di laboratorium hidrodinamika. Pentingnya kajian ini karena kemanfaatan hasilnya yang dapat diaplikasikan pada industri yang berbasis optik, seperti yang diperlihatkan dalam [1, 12]. Kajian gelombang ekstrim yang dilakukan pada paragraf pertama difokuskan pada gelombang satu arah (1D). Toto (2005) dalam [8] mengkaji interaksi gelombang untuk penjalaran gelombang multi arah. Hasil kajian tersebut menghasilkan suatu model penjalaran gelombang multi arah yang lebih baik dari model yang telah ada sebelumnya, model yang dihasilkan memiliki relasi dispersi relasi dispersi eksak dalam arah spasial seperti relasi dispersi gelombang permukaan air, lihat [7]. Artikel ini akan membahas tentang interaksi gelombang bikromatik multiarah, khususnya analisis tentang faktor-faktor yang mempengaruhi deformasi gelombang. Organisasi artikel ini adalah sebagai berikut, bagian awal akan membahas model matematika yang digunakan, disampaikan ulang dari [8]. Interaksi gelombang dimodelkan dari hampiran selesaian order tiga persamaan iKP, dengan syarat batas bergantung model pembangkitan gelombang. Faktor-faktor yang mendominasi deformasi gelombang akan menjadi pokok pembahasan dalam artikel ini.

2. Model Matematika

Dalam Toto [8], model penjalaran gelombang multi arah yang memiliki relasi dispersi eksak dinyatakan oleh persamaan iKP sebagai berikut

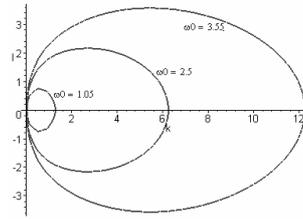
$$\delta_x \left(\delta_t u + \delta_x (Ru + \frac{3}{4}u^2) \right) + \frac{1}{2} \delta_{yy} u = 0 \quad (1)$$

dengan R operator pseudo diferensial dengan simbol $\widehat{R} = \sqrt{\tan k/k}$. Persamaan iKP bagian linearnya memiliki relasi dispersi

$$\omega = \Omega(\mathfrak{K}) = \sqrt{k \tanh k} + \frac{1}{2} \frac{l^2}{k}, \quad l \in k, \mathfrak{K} = (k, l) \quad (2)$$

Relasi dispersi (2) untuk beberapa nilai frekuensi disajikan pada gambar berikut

Terlihat pada Gambar 1, apabila suatu nilai frekuensi diberikan, penentuan bilangan gelombang pada arah spatial x ; yaitu k , dan bilangan gelombang pada arah spatial y ; yaitu l dapat ditentukan secara fleksibel. Setelah diketahui bilangan gelombang, maka arah penjalaran gelombang dapat diketahui. Secara analitis penentuan bilangan dapat dilakukan sebagai berikut: diberikan frekuensi gelombang yang akan dibangkitkan w_0 , maka bilangan gelombang dan ditentukan dari relasi dispersi (2). Selanjutnya dengan memisalkan $k = rd$, $l = r\sqrt{1-d^2}$, dimana r menyatakan modulus dari bilangan gelombang dan δ berkaitan dengan sudut



Gambar 1: Profil relasi dispersi (2) untuk beberapa nilai frekuensi

yang dibentuk pada bidang kl . Dengan pemisalan tersebut, maka relasi dispersi (2) akan memenuhi persamaan

$$\sqrt{r\delta \tanh r\delta} + \frac{1}{2} \frac{1 - \delta^2}{\delta} - \omega_0 \quad (3)$$

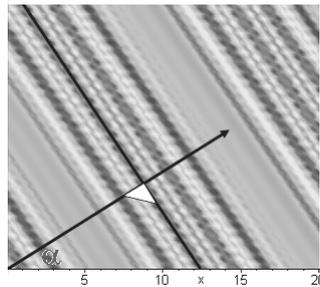
Bila ditetapkan nilai δ , maka bilangan gelombang k, l dicari dengan menyelesaikan persamaan (3). Hubungan antara dua bilangan gelombang dinyatakan oleh

$$k = rd, l = r\sqrt{1 - d^2} \quad \text{®} \quad k = l \frac{d}{\sqrt{1 - d^2}} \quad (4)$$

Nilai perbandingan antara dua bilangan tersebut terkait dengan arah penjalaran gelombang apabila dilihat dari sumbu koordinat xy , yang dinyatakan oleh

$$\tan \alpha = \frac{\delta}{1 - \delta^2} \quad (5)$$

Arah penjalaran gelombang ini senantiasa tegak lurus dengan garis karakteristik gelombang, yaitu pada garis tersebut gelombang memiliki ketinggian yang sama.



Gambar 2: Profil ketinggian gelombang untuk suatu nilai frekuensi tertentu serta arah penjalarnya

Model penjalaran gelombang multi arah (1) merupakan model tanpa skala, untuk memperoleh representasi gelombang sesungguhnya dilakukan dengan transformasi

$$\eta = hu, \quad X = hx, \quad Y = \sqrt{h}y, \quad T = t\sqrt{\frac{h}{g}}, \quad \omega = \Omega\sqrt{\frac{h}{g}} \quad (6)$$

Pada bagian selanjutnya akan dikaji hampiran selesaian untuk Persamaan (1). Seperti diketahui persamaan iKP merupakan persamaan diferensial tak linear, serta melibatkan operator pseudo diferensial.

3. Hampiran Selesaian Order Tiga Persamaan iKP

Bagian ini akan menyajikan ulang yang telah diturunkan Toto [8], tentang hampiran order tiga persamaan iKP (1). Hampiran orde tiga yang dimaksud berbentuk

$$u \approx \varepsilon u^{(1)} + \varepsilon^2 u^{(2)} + \varepsilon^3 u^{(3)} \quad (7)$$

dengan ε menyatakan parameter yang sebanding dengan order amplitudo gelombang. Selanjutnya suku-suku $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ dan $u^{(3)}$ menyatakan selesaian order pertama, order kedua dan order ketiga. Ekspansi amplitudo yang dilakukan (7) belum cukup untuk menggunakan hampiran order tiga, sebab masih memunculkan suku resonansi pada order tiga. Untuk menghilangkan suku resonansi tersebut, ekspansi (7) dimodifikasi dengan teknik Poincare-Linstead [2] yaitu dengan mengekspansi bilangan gelombang dalam bentuk

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{K}^{(0)} + \varepsilon \mathfrak{K}^{(1)} + \varepsilon^2 \mathfrak{K}^{(2)}$$

atau

$$(k, l) = (k^{(0)}, l^{(0)}) + \varepsilon(k^{(1)}, l^{(1)}) + \varepsilon^2(k^{(2)}, l^{(2)})$$

dengan $\mathfrak{K}^{(0)} = \Omega^{-1}(\omega_0)$.

Untuk memperoleh selesaian gelombang bikromatik, hampiran selesaian order pertama dinyatakan oleh

$$u^{(1)} = q(\cos \theta_1 + \cos \theta_2) = 2q \cos \bar{\theta} \cos(\Delta\theta) \quad (8)$$

dengan $\theta_j = k_j^{(0)}x + l_j^{(0)}y - \omega_j t$. Dengan hampiran selesaian order pertama tersebut, hampiran selesaian order dua dinyatakan oleh

$$u^{(2)} = \frac{3}{2}q^2 \left(\sum_{j=1}^2 s_j \cos 2\theta_j + s_+ \cos 2\bar{\theta} + s_- \cos 2\Delta\theta \right) \quad (9)$$

dengan $s_j = \frac{k_j^{(0)}}{2\omega_j - \Omega(2\bar{\kappa}_j^{(0)})}$, $s_+ = \frac{\bar{k}^{(0)}}{2\bar{\omega} - \Omega(2\bar{\kappa}_j^{(0)})}$, $s_- = \frac{\Delta k^{(0)}}{2\Delta\omega_j - \Omega(2\Delta\bar{\kappa}_j^{(0)})}$.

Sedangkan hampiran selesaian order tiga dinyatakan oleh

$$u_{sb}^{(3)} = q^3 (a_{12} \cos(2\theta_1 - \theta_2) + a_{21} \cos(2\theta_2 - \theta_1)) \quad (10)$$

dengan

$$a_{12} = \frac{9}{4} (s_1 + s_-) \frac{k_1^{(0)} + 2\Delta k}{\omega_1 + 2v - \Omega(\bar{\kappa}_1^{(0)} + 2\Delta\bar{\kappa})}$$

$$a_{21} = ds \frac{9}{4} (s_2 + s_-) \frac{k_2^{(0)} - 2\Delta k}{\omega_2 - 2v - \Omega(\bar{\kappa}_2^{(0)} - 2\Delta\bar{\kappa})}$$

4. Model Pembangkitan Gelombang dan Free Waves

Berbeda dengan pembangkitan gelombang satu arah yang tidak permasalahan arah penjalaran gelombang, untuk gelombang multiarah gelombang dibangkitkan sesuai arah yang diinginkan. Pada bagian ini akan diuraikan dua model pembangkitan gelombang, yang tentu saja akan memberikan konsekuensi terhadap syarat batas pada hampiran selesaian 7.

- a. Model pembangkitan pertama adalah *one point source*. Model ini mengasumsikan bahwa sumber pembangkitan gelombang berasal dari satu titik, diasumsikan pada titik pusat koordinat $(0, 0)$. Dengan demikian syarat batas hampiran 7 berbentuk

$$u(0, 0, t) = S(t) \quad (11)$$

dengan $S(t)$ menyatakan signal gelombang gelombang yang dibangkitkan pada titik $(0, 0)$. Untuk gelombang bikromatik, signal gelombang dinyatakan oleh $S(t) = q(\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t)$. Selanjutnya, agar hampiran selesaian order pertama, order kedua, dan order ketiga (8) – (10) memenuhi syarat batas (11), dengan demikian muncul konsekuensi gelombang bebas (free waves) untuk kompensasi di syarat batas. Gelombang bebas order pertama tidak ada, sebab signal gelombang sama dengan selesaian order pertama. Gelombang bebas order dua dinyatakan oleh

$$u_{free}^{(2)} = -\frac{3}{2} q^2 \left(\sum_{j=1}^2 s_j \cos \Theta(2\omega_j) + s_+ \cos \Theta(2\bar{\omega}) + s_- \cos \Theta(2\Delta\omega) \right) \quad (12)$$

dengan $\Theta(\omega) = k(\omega)x + l(\omega)x - \omega t$. Selanjutnya selesaian gelombang bebas order tiga dinyatakan oleh

$$u_{free}^{(3)} = -q^3(a_{12} \cos \Theta(2\omega_1 - \omega_2) + a_{21} \cos \Theta(2\omega_2 - \omega_1)) \quad (13)$$

Penting untuk dicatat bahwa model one point source terdapat dua kebebasan dalam penentuan parameter bilangan gelombang; yaitu bilangan gelombang arah x dan arah y , yang didasarkan pada satu informasi frekuensi gelombang.

- b. Model pembangkitan kedua adalah *half plane source*. Model ini mengasumsikan bahwa sumber pembangkitan gelombang berasal dari satu bidang, diasumsikan pada bidang y . Dengan demikian syarat batas hampiran (7) berbentuk

$$u(0, y, t) = q(\cos(l_1 y - \omega_1 t) + \cos(l_2 - \omega_2 t)) \quad (14)$$

dengan l_j terkait relasi dispersi $\omega_1 = \Omega(k_j, l_j)$. Seperti uraian model pertama, syarat batas ini memunculkan gelombang bebas order kedua dan order ketiga sebagai berikut:

$$u_{free}^{(2)} = -\frac{3}{2}q^2 \left(\sum_{j=1}^2 s_j \cos \Theta(2l_j, 2\omega_j) + s_+ \cos \Theta(2\bar{l}, 2\bar{\omega}) + s_- \cos \Theta(2\Delta l, 2\Delta\omega) \right) \quad (15)$$

dan

$$u_{free}^{(3)} = -q^3(a_{12} \cos \Theta(2l_1 - l_2, 2\omega_1 - \omega_2) + a_{21} \cos \Theta(2l_2 - l_1, 2\omega_2 - \omega_1)) \quad (16)$$

Untuk model half plane source hanya terdapat satu kebebasan dalam penentuan parameter bilangan gelombang; yaitu hanya bilangan gelombang arah x , dengan informasi frekuensi gelombang dan bilangan gelombang arah y , dengan informasi frekuensi gelombang dan bilangan gelombang arah y .

5. Deformasi Gelombang Bikromatik Pada Model Pembangkitan One Point Source

Pada bagian ini disimulasikan gelombang bikromatik 2D dengan data-data sebagai berikut,

Kuantitas	Laboratorium	Variabel tanpa dimensi
Kedalaman kolam	5 m	5 m
Frekuensi gelombang	$\Omega_1 = 4.7142$ $\Omega_2 = 4.2714$	$\omega_1 = 2.3571,$ $\omega_2 = 2.1357$
Amplitudo gelombang	8 cm	q=0.016

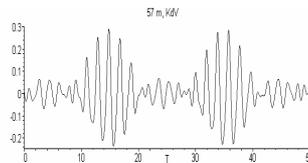
Pada pembangkitan di laboratorium hidrodinamika, ketinggian maksimum gelombang yang dapat dibangkitkan adalah 10% dari kedalaman kolam. Dengan demikian untuk kolam dengan kedalaman 5 m, maka ketinggian gelombang maksimum (H_{max}) adalah 50 cm. Untuk gelombang bikromatik ketinggian gelombang menjadi $8 \times 2 \times 2 = 32\text{cm}$, atau setara dengan 64% dari H_{max} .

Pada simulasi ini sudut yang dibentuk antara bilangan gelombang arah sumbu x dan arah sumbu y adalah $\pi/100$. Dengan demikian penjalaran gelombang secara dominan ke arah sumbu x . Profil-profil signal di beberapa lokasi disajikan oleh gambar-gambar berikut ini.



Gambar 3: Profil gelombang bikromatik multiarah untuk beberapa lokasi pengukuran

Perubahan profil signal pada posisi $(0, 0)$ berupa signal bikromatik, pada beberapa posisi mengalami perubahan baik profil dan ketinggiannya. Pada posisi $(86\text{ m}, 80\text{ m})$ profil signal mengalami perubahan yang cukup ekstrem. Perbandingan antara ketinggian signal gelombang mula-mula dengan signal gelombang pada posisi terakhir adalah $32\text{ cm} : 54\text{ cm} = 1 : 1.7$. Hasil ini sebanding yang diperoleh pada model 1D, dengan model persamaan iKdV, seperti yang diperlihatkan pada gambar berikut



Gambar 4: Profil signal non linear bikromatik pada posisi 57 m dari kolam pembangkitan

6. Faktor Dominan Pada Deformasi Gelombang

Pada bagian sebelumnya telah disajikan simulasi interaksi gelombang bikromatik yang ditampilkan dalam bentuk profil signal bikromatik untuk beberapa titik pengukuran. Pada pengamatan tersebut, signal bikromatik menunjukkan deformasi yang ekstrim, baik profil maupun ketinggian gelombang. Pada bagian ini akan dianalisis, suku-suku interaksi mana yang memberikan kontribusi terhadap perubahan ekstrim tersebut. Seperti diketahui bahwa kontribusi order dua tidak memberikan pengaruh terhadap deformasi gelombang. Oleh karena itu fokus kajian terhadap interaksi yang memberikan efek ekstrem, hanya difokuskan pada kontribusi orde tiga. Ekspresi masing-masing komponen gelombang diberikan oleh

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= q(\cos \theta_1 + \cos \theta_2) = 2q \cos \bar{\theta} \cos(\Delta\theta) \\ u_{sb}^{(3)} &= q^3 (B_{12}[2 \cos 2(\Delta\theta) - 1] \cos \bar{\theta} \cos(\Delta\theta) + B_{21}[2 \cos 2(\Delta\theta) + 1] \sin \bar{\theta} \sin(\Delta\theta)) \end{aligned}$$

sedangkan free wave (16) dapat dituliskan sebagai

$$u_{free}^{(3)} = -q^3(a_{12} \cos(\bar{\theta} + 3\Delta\theta + \theta_{12}) + a_{21} \cos(\bar{\theta} - 3\Delta\theta + \theta_{21})) \quad (17)$$

dengan

$$\begin{aligned} \theta_{12}(k, l) &= (K_{(2\omega_1 - \omega_2)} + k_2 - 2k_1)x + (L_{(2\omega_1 - \omega_2)} + l_2 - 2l_1)y \\ \theta_{21}(k, l) &= (K_{(2\omega_2 - \omega_1)} + k_1 - 2k_2)x + (L_{(2\omega_2 - \omega_1)} + l_1 - 2l_2)y \end{aligned}$$

Ekspresi free wave 17 seperti ekspresi order tiga side band 10 dengan tambahan phase $\theta_{12}(k, l)$ dan $\theta_{21}(k, l)$. Selanjutnya free wave 17 dapat dituliskan kembali menjadi

$$u_{free}^{(3)} = -q^3 \left(\begin{array}{l} \cos \bar{\theta} \cos(\Delta\theta)[2 \cos(2\Delta\theta) - 1](a_{12} \cos \theta_{12} + a_{21} \cos \theta_{21}) + \\ \sin \bar{\theta} \sin(\Delta\theta)[2 \cos(2\Delta\theta) + 1](a_{21} \cos \theta_{21} - a_{12} \cos \theta_{12}) - \\ \sin \bar{\theta} \cos(\Delta\theta)[2 \cos(2\Delta\theta) - 1](a_{12} \sin \theta_{12} + a_{21} \sin \theta_{21}) - \\ \cos \bar{\theta} \sin(\Delta\theta)[2 \cos(2\Delta\theta) + 1](a_{12} \sin \theta_{12} - a_{21} \sin \theta_{21}) \end{array} \right) \quad (18)$$

Terlihat bahwa masing-masing ekspresi gelombang order satu, order tiga side band dan free wave memuat faktor $\cos \bar{\theta} \cos(\Delta\theta)$, $\sin \bar{\theta} \sin(\Delta\theta)$, $\sin \bar{\theta} \cos(\Delta\theta)$, dan $\cos \bar{\theta} \sin(\Delta\theta)$. Khususnya untuk superposisi $u^{(1)} + u_s^{(3)}b$, signal yang dihasilkan untuk setiap posisi adalah senantiasa simetri. Hal ini karena masing-masing komponen pembentuk memuat faktor gelombang yang bergerak dengan kecepatan yang sama, akibatnya profil signal senantiasa simetris. Selanjutnya apabila diperhatikan pada ekspresi order tiga free wave, selain memuat faktor-faktor yang telah disebutkan di atas, juga memuat faktor lain yang berbeda dari komponen selesaian sebelumnya. Faktor tersebut adalah kombinasi dari $\cos \theta_{12}$, $\cos \theta_{21}$, $\sin \theta_{12}$, $\sin \theta_{21}$

. Faktor ini memberikan kontribusi perubahan signal secara spatial, sebab phase dari faktor-faktor tersebut tidak bergantung waktu dan merupakan fungsi spatial. Selanjutnya pada ekspresi order tiga free wave (18), faktor-faktor tersebut muncul sebagai kombinasi $a \cos \theta_{12} + b \cos \theta_{21}$ dan $a \sin \theta_{12} + b \sin \theta_{21}$, yang dihasilkan dari superposisi $ae^{i\theta_{12}} + be^{i\theta_{21}} + c.c.$ Dengan alasan tersebut, berikut ini akan diberikan simulasi dari superposisi gelombang dari u dan $u^{(1)} + u_{sb}^{(3)} + u_{free}^{(3)}$, yang kedua $u^{(1)} + u_{sb}^{(3)} + u_{free}^{(3)}$ dan $u^{(1)} + u_{sb(1)}^{(3)} + u_{free(1)}^{(3)}$ dengan

$$u_{sb(1)}^{(3)} = q^3 B_{12} [2 \cos 2(\Delta\theta) - 1] \cos \bar{\theta} \cos(\Delta\theta)$$

dan

$$u_{free(1)}^{(3)} = -q^3 \cos \bar{\theta} \cos(\Delta\theta) [2 \cos(2\Delta\theta) - 1] (a_{12} \cos \theta_{12} + a_{21} \cos \theta_{21})$$

yaitu komponen order tiga yang memuat faktor yang sama dengan order satu. Hasil simulasi gelombang, signalnya untuk beberapa lokasi diberikan oleh gambar berikut:



Gambar 5: Perbandingan profil gelombang bikromatik u dan gelombang $u^{(1)} + u_{sb}^{(3)} + u_{free}^{(3)}$

Gambar di atas memperlihatkan, signal gelombang u dan $u^{(1)} + u_{sb}^{(3)} + u_{free}^{(3)}$ secara hampiran adalah hampir sama, karena pengaruh order dua belum ditambahkan. Berdasarkan hasil ini dapat disimpulkan bahwa order tiga side band dan free wave memberikan kontribusi terhadap perubahan profil signal. Selanjutnya pada gambar kanan, menyajikan profil-profil signal untuk beberapa posisi dari sebagian komponen order tiga. Point yang ingin disampaikan pada hasil simulasi tersebut adalah, profil signal $u^{(1)} + u_{sb(1)}^{(3)} + u_{free(1)}^{(3)}$ pada posisi maksimum secara hampiran adalah hampir sama.

Kesimpulan yang ingin diberikan dari hasil simulasi ini adalah bahwa posisi maksimum dapat dianalisis dari superposisi yang jauh lebih sederhana ini. Dengan memperhatikan hasil terakhir ini, kalau diperhatikan masing-masing komponen dari superposisi $u^{(1)} + u_{sb(1)}^{(3)} + u_{free(1)}^{(3)}$ memiliki faktor yang sama yaitu $\cos \bar{\theta} \cos(\Delta\theta)$ sedangkan faktor lain $[2 \cos 2(\Delta\theta) - 1]$ merupakan komponen gelombang amplitudo dari gelombang bikromatik pada suku order satu, dengan demikian juga memiliki karakteristik yang hampir sama dengan amplitudo gelombang bikromatik order satu. Faktor yang berbeda dari superposisi ini adalah

$(a_{31} \cos \theta_{12} + a_{32} \cos \theta_{21})$, secara spatial faktor ini akan memberikan pengaruh terhadap ketinggian gelombang, khususnya pada $u_{free(1)}^{(3)}$.

7. Posisi Deformasi Ekstrim Gelombang

Pada bagian sebelumnya telah dibahas suku-suku yang dominan yang menentukan deformasi gelombang. Suku-suku dominan tersebut, secara hampiran dipengaruhi oleh kontribusi suku order pertama, bagian dari suku order tiga bound wave, dan bagian suku order tiga free waves yang dinyatakan oleh persamaan berikut

$$u \approx u^{(1)} + u_{sb(1)}^{(3)} + u_{free(1)}^{(3)} \quad (19)$$

dengan

$$u_{sb(1)}^{(3)} = \frac{q^2}{2} B_{12} [2 \cos 2(\Delta\theta) - 1] u^{(1)}, \quad u_{free(1)}^{(3)} = -\frac{1}{B_{12}} u_{sb(1)}^{(3)} (a_{12} \cos \theta_{12} + a_{21} \cos \theta_{21})$$

serta

$$\theta_{12}(k, l) = \mathfrak{K}_{12}x + \lambda_{12}y, \quad \mathfrak{K}_{12} = (K_{(2\omega_1 - \omega_2)} + k_2 - 2k_1), \quad \mathfrak{K}_{21} = (K_{(2\omega_2 - \omega_1)} + k_1 - 2k_2)$$

dan

$$\theta_{21}(k, l) = \mathfrak{K}_{21}x + \lambda_{21}y, \quad \lambda_{12} = (L_{(2\omega_1 - \omega_2)} + l_2 - 2l_1), \quad \lambda_{21} = (L_{(2\omega_2 - \omega_1)} + l_1 - 2l_2)$$

Ekspresi (19) dapat dituliskan

$$u \approx u^{(1)} \left(1 + \frac{q^2}{2} [2 \cos 2(\Delta\theta) - 1] ((a_{12} + a_{21}) - (a_{12} \cos \theta_{12} + a_{21} \cos \theta_{21})) \right) \quad (20)$$

Ekspresi gelombang (20) memperlihatkan bahwa terdapat tiga phase gelombang yang mempengaruhi evolusi gelombang bikromatik, yaitu $\Delta\theta$, θ_{12} dan θ_{21} . Gelombang dengan phase $\Delta\theta$ memiliki kecepatan phase yang sama dengan gelombang penyusun u yang memuat phase θ , sehingga perubahan gelombang tidak ditentukan oleh gelombang dengan phase tersebut. Phase gelombang θ_{12} dan θ_{21} , tidak memuat variabel waktu dan berbeda dengan phase sehingga tidak mengalami perubahan dalam waktu. Gelombang u mengalami ekstrim apabila, faktor $((a_{12} + a_{21}) - (a_{12} \cos \theta_{12} + a_{21} \cos \theta_{21}))$ bernilai maksimum, dan ditentukan oleh komponen $a_{12} \cos \theta_{12} + a_{21} \cos \theta_{21}$. Artinya faktor $((a_{12} + a_{21}) - (a_{12} \cos \theta_{12} + a_{21} \cos \theta_{21}))$ bernilai 0 apabila $\cos \theta_{12} = \cos \theta_{21} \approx 1$, dan faktor tersebut maksimum atau bernilai $2(a_{12} + a_{21})$ apabila $\cos \theta_{12} = \cos \theta_{21} \approx -1$. Pada kondisi maksimum, ekspresi (20) dinyatakan oleh

$$u \approx u^{(1)} (1 + q^2 (a_{12} + a_{21}) [2 \cos 2(\Delta\theta) - 1])$$

Untuk memperoleh kondisi tersebut, perhatikan bahwa, dengan menuliskan dalam bentuk amplitudo dan phase tunggal dapat diperoleh bahwa

$$\begin{aligned} (a_{12} \cos \theta_{12} + a_{21} \cos \theta_{21}) &= \frac{1}{2}(a(x, y)e^{i\varphi} + c.c) \\ a(x, y) &= \sqrt{a_{12}^2 + a_{21}^2 + 2a_{12}a_{21} \cos(\theta_{12} - \theta_{21})} \\ \varphi &= \frac{1}{2}(\theta_{12} + \theta_{21}) + \arctan \left(\frac{a_{12} - a_{21}}{a_{12} + a_{21}} \tan \frac{1}{2}(\theta_{12} - \theta_{21}) \right) \end{aligned} \quad (21)$$

Berdasarkan bentuk phase-amplitude (21), terlihat bahwa suku sangat dipengaruhi oleh perubahan phase $\theta_{12} - \theta_{21}$ dan $\theta_{12} + \theta_{21}$. Phase $\theta_{12} - \theta_{21}$ mempengaruhi gelombang amplitudo $a(x, y)$, sedangkan phase $\theta_{12} + \theta_{21}$ mempengaruhi phase gelombang komposisi. Oleh karena tanda suku $(a_{12} \cos \theta_{12} + a_{21} \cos \theta_{21})$ bernilai negatif pada (20), oleh karena itu phase gelombang komposisi harus dikondisikan bernilai negatif, yaitu dengan memberikan nilai

$$\theta_{12}(k, l) + \theta_{21}(k, l) = 2\pi \quad (22)$$

Selanjutnya gelombang amplitudo (21) dikontrol dengan memberikan nilai phase gelombang

$$\theta_{12}(k, l) - \theta_{21}(k, l) = \mu \quad (23)$$

Berapa nilai μ yang dapat diberikan? Perhatikan bahwa (23) dapat dituliskan kembali menjadi

$$y = \frac{\mu - (\kappa_{12} - \kappa_{21})x}{(\lambda_{12} - \lambda_{21})} \quad (24)$$

Substitusi nilai ini ke dalam masing-masing phase θ_{12} dan θ_{21} , menghasilkan

$$\begin{aligned} \theta_{12}(k, l) &= \frac{(\lambda_{12}\kappa_{12} - \lambda_{21}\kappa_{21})x + \lambda_{12}\mu}{(\lambda_{12} - \lambda_{21})} \\ &= \frac{\lambda_{12}\mu}{(\lambda_{12} - \lambda_{21})} \quad \text{dan} \\ \theta_{21}(k, l) &= \frac{\lambda_{21}\mu}{(\lambda_{12} - \lambda_{21})} \end{aligned} \quad (25)$$

Catatan: phase θ_{12}, θ_{21} , dan phase lain dalam μ ; semisal $\theta, \Delta\theta$, memiliki kemiringan yang sama di bidang xy . Sehingga apabila terdapat dua garis dengan kemiringan garis sama $l_1 : m_1x + n_1y = c_1$ dan $l_2 : m_2x + n_2y = c_2$ yaitu $l_1 \parallel l_2$, maka $m_1n_2 - m_2n_1 = 0$.

Substitusi nilai-nilai phase θ_{12} dan θ_{21} pada (25) ke dalam (22) akan menghasilkan

$$\frac{(\lambda_{12} + \lambda_{21})\mu}{(\lambda_{12} - \lambda_{21})} = 2\pi \quad \text{atau} \quad \mu = 2 \frac{(\lambda_{12} - \lambda_{21})}{(\lambda_{12} + \lambda_{21})} \pi \quad (26)$$

Substitusi (26) ke dalam (24), menghasilkan garis ekstrim, yaitu titik-titik yang menghasilkan signal ekstrim gelombang bikromatik:

$$y_e = \frac{2\pi}{(\lambda_{12} + \lambda_{21})} - \frac{(\mathfrak{K}_{12} - \mathfrak{K}_{21})x_e}{(\lambda_{12} - \lambda_{21})} \quad (27)$$

Posisi ekstrim gelombang terletak pada garis (27) yang memotong sumbu x pada $\left(\frac{2\pi(\lambda_{12}-\lambda_{21})}{(\mathfrak{K}_{12}-\mathfrak{K}_{21})(\lambda_{12}+\lambda_{21})}, 0\right)$ dan memotong sumbu y pada $\left(0, \frac{2\pi}{(\lambda_{12}+\lambda_{21})}\right)$.

Selanjutnya tinggi maksimum gelombang pada saat posisi ekstrim dapat di analisis dari ekspresi sebagai berikut

$$u \approx 2q \cos \bar{\theta} \cos(\Delta\theta) (1 + q^2(a_{12} + a_{21})[2 \cos(2\Delta\theta) - 1]) \quad (28)$$

Profil gelombang $\cos \bar{\theta}$ merupakan gelombang pembawa (*carrier*), sedangkan amplitudo dipengaruhi oleh gelombang

$$A(u) \approx 2q \cos(\Delta\theta) (1 + q^2(a_{12} + a_{21})[2 \cos(2\Delta\theta) - 1]) \quad (29)$$

Pada ekspresi gelombang amplitudo tersebut, terlihat bahwa komponen gelombang memiliki phase gelombang yang sama yaitu $\Delta\theta$ dan kelipatannya. Sekarang kita akan mensubstitusikan kondisi ekstrim yang diperoleh di atas (27) ke dalam (29). Kondisi ekstrim juga terjadi pada $\left(0, \frac{2\pi}{(\lambda_{12}+\lambda_{21})}\right)$, sehingga phase amplitude (29) akan menjadi

$$(\Delta\theta) = \frac{2\pi(\Delta l)}{(\lambda_{12} + \lambda_{21})} - (\Delta\omega)t \quad (30)$$

Gelombang amplitudo akan mencapai maksimum apabila $\Delta\theta = 2n\pi$, $n = 1, 2, \dots$ sehingga kita akan memperoleh waktu ekstrim

$$t_e = \frac{2\pi(\Delta l)}{(\Delta\omega)(\lambda_{12} + \lambda_{21})} \quad (31)$$

Amplitudo gelombang maksimum pada waktu ekstrim ini adalah

$$A(u)_{max} \approx 2q (1 + q^2(a_{12} + a_{21})) \quad (32)$$

Perbandingan antara amplitudo gelombang mula-mula dengan amplitudo saat ekstrim, secara hampiran adalah sebagai berikut:

$$2q : 2q (1 + q^2(a_{12} + a_{21})) = 1 : (1 + q^2(a_{12} + a_{21})) \quad (33)$$

8. Kesimpulan

Telah dibahas interaksi gelombang bikromatik multiarah dengan model penjalaran one point source. Berdasarkan kajian faktor-faktor dominan deformasi gelombang

berhasil dianalisis bahwa deformasi dipengaruhi oleh suku-suku order pertama dan order tiga sideband dan free waves . Selanjutnya dari analisis yang lebih mendalam terhadap ketiga suku tersebut dapat diperoleh posisi deformasi paling ekstrim dari gelombang bikromatik.

Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terimakasih atas diskusi yang hangat kepada Marwan, mahasiswa S3 ITB Bandung. Penulis juga mengucapkan terima kasih atas pendanaan oleh penelitian Hibah Pekerti oleh DP3M, Dirjen Dikti, dengan nomor kontrak: SPP 040/SPPP/PP/DP3M/W/2005.

Pustaka

- [1] Andonowati & E. van Groesen, Optical Pulse Deformation in Second Order Non-Linear Media, *Journal of Nonlinear Optical Physics & Materials*, v.12, n.2 (2003) 221-234.
- [2] Andonowati, Marwan, E. van Groesen, Maximal temporal amplitude of generated wave groups with two or three frequencies, submitted to *Proceeding of 2nd ICPMR&DT*.
- [3] Andonowati, Wuryansari, M.K, E, van Groesen, Steepness of extreme waves caused by wave focusing in the Benjamin-Feir instability regime, *Proceedings of International Symposium on Shallow Flows, TUDelft, June 16-8, 2003*.
- [4] Marwan & Andonowati, Perubahan bentuk pada perambatan signal bi-kromatik dan pengaruhnya terhadap amplitude maximum, to appear in *Journal of Mathematics & Science, FMIPA ITB*.
- [5] C.T. Stansberg, On the nonlinear behaviour of ocean wave groups, *Ocean Wave Measurement and Analysis, Proc. Of the Third International Symposium WAVES 97* Editor: B.L. Edge, J.M. Hemsley, American Society of Civil Engineers (ASCE), Reston, V.A, USA 2 n.2 (1998).
- [6] Wuryansari M.K & Andonowati, Dinamika tinggi gelombang maksimum selubung paket gelombang permukaan bikromatik, *Proceeding ITB, seri A, v. 34, 2003*.
- [7] Toto Nusantara. *Modifikasi Model Penjalaran Gelombang Multi Arah. J. Matematika. Agustus. 2005*.

- [8] Toto Nusantara, Daniel, T.D. Studi Interaksi Gelombang dan Aplikasinya Pada Pembangkitan Gelombang Ekstrim., Laporan Penelitian Hibah Pekerti, Nopember 2005, Dikti. Jakarta.
- [9] J. Westhuis, E. van Groesen, R.H.M. Huijsmans, Experiments and Numerics of Bichromatic Wave Groups, *J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, 127 (2001) 334-342.
- [10] J. Westhuis, R.H.M. Huijsmans, Unstable bichromatics wave groups, MARIN, report No. 15309.152. Wageningen, The Netherlands (2000).
- [11] E. van Groesen, Andonowati, E. Soewono, Nonlinear Effects in Bichromatic Surface Waves, *Proc. Estonian Acad. Sci., Mathematics and Physics* 48 (1999) 206-229.
- [12] E. van Groesen, E. Cahyono, & A. Suryanto, Unidirectional Models for Narrow and Broad Pulse Propagation in Second Order Nonlinear Media, *Optical Quantum Optics* 34 (2002) 577-595.
- [13] E. van Groesen, N. Karyanto, P. Peterson & Andonowati, Wave dislocation and non-linear amplitude amplification for extreme fluid surface waves, submitted