Solusi Reisner-Nordström dalam Teori Gravitasi $f(R)$

Abu Fadlol,* Agus Purwanto, dan Bintoro A. Subagyo†
Jurusan Fisika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS), Kampus ITS Sukolilo, Surabaya 60111

Intisari

Dalam artikel ini diperoleh solusi Reisner-Nordström dalam teori gravitasi $f(R)$. Menghitung tensor Ricci dan tensor energi momentum yang bersesuaian, didapatkan solusi untuk benda bermuatan dan bermassa masif. Solusi yang didapatkan merupakan perumuman dari solusi Reisner-Nordström dalam teori gravitasi Einstein. Didapatkan empat buah nilai singularitas untuk solusi ini.

Abstract

In this article we present solutions of Reisner-Nordström in $f(R)$ theory of gravity. We calculated corresponding Ricci and enegy-momentum tensor as well as their general solutions for charged and massive matter field. The solution is a more common form of the Reisner-Nordström solution in Einstein theory of gravity. We obtained four singularities for this solution.

KATA KUNCI: Reisner-Nordström solution, $f(R)$ theory of gravity, Einstein theory of gravity, singularity

I. PENDAHULUAN

Pada beberapa dekade terkhir untuk menjelaskan pengamatan astrofisika yang berhubungan dengan kurva rotasi dari galaksi spiral kita memunculkan konsep tentang *dark matter*. Tak lama kemudian kembali kita dipaksa menerima konsep *dark energy* untuk menjelaskan akselerasi dari ekspansi alam semesta yang didukung oleh pengamatan pergeseran merah dari supernova [1].

Adanya indikasi materi gelap pertama kali diamati oleh Frits Zwicky [2] dengan mengamati gerak galaksi-galaksi anggota gugus galaksi Coma berdasarkan kecepatan gerak. Kemudian Vera Rubin [3], meneliti kecerahan bintang dan gas yang bergerak pada beberapa galaksi di sekitar galaksi Bima Sakti menggunakan spektrograf. Pengamatan yang terkenal adalah *bullet cluster*, tabrakan antar dua kluster galaksi. Tabrakan kedua kluster galaksi tersebut mengakibatkan pusat massa tiap kluster, yang seharusnya di pusat massa baryon, ternyata tidak berada di pusat baryon. Sehingga seolah ada massa 'tambahan' yang tidak terlihat tapi bisa dideteksi melalui perlensaan gravitasi. Adanya massa tambahan inilah terindikasi adanya materi gelap. Keberadaan materi gelap ini bersifat stabil, tidak berinteraksi elektromagnetik dan bisa dideteksi keberadaannya melalui interaksi gravitasi. Fenomena *bullet cluster* menunjukkan sifat interaksi antar materi gelap sendiri ternyata cukup lemah [4].

Saat ini, keberadaan materi tampak pada alam semesta diperkirakan sekitar 4% dari keseluruhan massa dan energi. Sekitar 23% disebut materi gelap (patikel-partikel yang berinteraksi hanya melalui interaksi lemah dan gravitasi), dan 73% adalah energi gelap. Kandidat energi gelap terbaik memiliki konstanta kosmologi positif sangat kecil yang diidentifikasi pada energi vakum dalam model standar [5]. Di sisi lain, kajian mengenai modifikasi persamaan medan Einstein dilakukan dengan mengesampingkan asumsi indikasi keberadaan materi gelap dan energi gelap [1]. Hal ini mendorong telaah lebih jauh mengenai modifikasi gravitasi Einstein yang mengakomodasi ketidakhadiran materi gelap dan energi gelap [1].

Salah satu modifikasi yang paling sederhana pada teori gravitasi Einstein adalah dengan menambah suku invariant dengan orde yang lebih tinggi dalam aksi Einstein-Hilbert standar, yang disebut sebagai teori gravitasi berorde tinggi. Penambahan suku ini dimotivasi oleh permasalahan dalam kosmologi dan astrofisika[6]. Sebagai contoh, kasus yang mempertimbangkan pengaruh orde tinggi dari kurvatur adalah apa yang disebut dengan teori gravitasi $f(r)$ (lihat [7],[6],[8] untuk review). Pada teori gravitasi $f(r)$, aksi merupakan sembarang fungsi dari kurvatur skalar R. Ketika $f(R) = R$, teori kembali menjadi gravitasi Einstein semula.

Teori gravitasi $f(R)$ membentuk suatu persamaan medan yang merupakan modifikasi dari teori gravitasi Einstein. Dalam penelitian ini akan dicari solusi persamaan medan gravitasi $f(R)$ untuk benda bermuatan dan bermassa masif.

II. TEORI GRAVITASI $f(R)$

Teori gravitasi $f(R)$ merupakan salah satu jenis modifikasi teori gravitasi Einstein, dengan R merupakan skalar kelengkungan Ricci. Teori gravitasi $f(R)$ diusulkan pertama kali oleh Hans Adolp Buchdahl pada tahun 1970 [9]. Teori gravitasi $f(R)$ ditinjau dengan pendekatan metrik, untuk keperluan kajian solusi yang mungkin dari teori gravitasi $f(R)$, kita mulai dari aksi

$$I = I_g + I_m, \tag{1}$$

*E-MAIL: fadlol13@mhs.physics.its.id
†E-MAIL: b_anang@physics.its.ac.id

dengan I_m merupakan aksi massa dan I_g adalah aksi gravitasi:

$$I_g = \frac{1}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{-g}(R+f(R)). \qquad (2)$$

Memvariasi aksi Pers.(1) tersebut terhadap $g^{\mu\nu}$, akan kita dapatkan persamaan medan dalam bentuk metrik:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}(1+F(R)) &- \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(R+f(R)) + \\ (\nabla_\mu\nabla_\nu - g_{\mu\nu}\Box)F(R) &= 8\pi G T_{\mu\nu}, \end{aligned} \qquad (3)$$

dengan $\Box = \nabla_\alpha\nabla^\alpha$ (∇ adalah turunan kovarian) dan $F(R) = df(R)/dR$. Perhitungan trace dari Pers. (3) menghasilkan :

$$R(1+F(R)) - 2(R+f(R)) - 3\Box F(R) + 8\pi G = 0. \quad (4)$$

Tidak seperti dalam teori gravitasi Einstein, solusi vakum ($T = 0$) tidak selalu mengimplikasikan nilai nol pada skalar kurvaturnya $R = 0$. Dari Pers.(3), dapat diperoleh kondisi dengan konstanta vakum untuk skalar kurvatur $R = R_0$:

$$R_{\mu\nu}(1+F(R)) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(R_0+f(R_0)) = 0, \qquad (5)$$

sehingga tensor Riccinya dapat dituliskan:

$$R_{\mu\nu} = \frac{R_0+f(R_0)}{2(1+F(R_0))}g_{\mu\nu}, \qquad (6)$$

dengan $1+F(R_0) \neq 0$. Jika kita ambil trace dari Pers.(5),

$$R_0(1+F(R)) - 2(R_0+f(R_0)) = 0, \qquad (7)$$

kita akan peroleh konstanta kurvatur solusi vakum

$$R_0 = \frac{2f(R_0)}{F(R_0)-1}. \qquad (8)$$

III. SOLUSI REISNER-NORDSTRÖM DALAM TEORI GRAVITASI $f(R)$

Solusi Reisner-Nordström adalah solusi persamaan medan untuk suatu benda bermuatan dan bermassa masif. Jika massa benda *m* bermuatan total *q*, maka nilai tensor energi momentum dalam persamaan medan adalah tensor energi momentum untuk medan elektro magnetik yang disebabkan oleh muatan total *q*.

Tensor energi momentum dalam kasus ini adalah:

$$T_{\mu\nu} = -F^{\gamma}_{\nu}F_{\mu\gamma} + \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F^{\gamma\lambda}F_{\gamma\lambda}, \qquad (9)$$

dengan $F_{\mu\nu}$ merupakan tensor kuat medan

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \qquad (10)$$

Untuk mendapatkan solusi Reisner-Nordström, kita mulai dari elemen garis untuk kasus simetri bola

$$ds^2 = -e^{2\nu(r)}dt^2 + e^{2\lambda(r)}dr^2 + r^2d\Omega^2, \qquad (11)$$

dengan $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$. Elemen garis Pers.(11), memberikan bentuk tensor metrik kovarian $g_{\mu\nu}$ berikut

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -e^{2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}, \qquad (12)$$

dengan bentuk kontravarian dari tensor metrik diatas yaitu

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -e^{-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^{-2}\sin^{-2}\theta \end{pmatrix}. \qquad (13)$$

Nilai dari simbol Christoffel jenis ke-2 dari tensor metrik di atas adalah

$$\begin{aligned} \Gamma^\rho_{\mu\nu} &= g^{\rho\sigma}\Gamma_{\sigma,\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}\left(\partial_\nu g_{\mu\sigma} + \partial_\mu g_{\nu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}\right) \end{aligned} \qquad (14)$$

yang berjumlah sebanyak 64 komponen. Komponen-komponen yang tidak bernilai 0 adalah:

$$\begin{aligned} \Gamma^0_{01} &= \Gamma^0_{10} = \nu' \\ \Gamma^1_{00} &= \nu' e^{(2\nu-2\lambda)} \\ \Gamma^1_{11} &= \lambda' \\ \Gamma^1_{22} &= -re^{-2\lambda} \\ \Gamma^1_{33} &= -r\sin^2\theta\, e^{-2\lambda} \\ \Gamma^2_{12} &= \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r} \\ \Gamma^2_{33} &= -\sin\theta\cos\theta \\ \Gamma^3_{13} &= \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r} \\ \Gamma^3_{23} &= \Gamma^3_{32} = \cot\theta \end{aligned}$$

Tensor Ricci-nya:

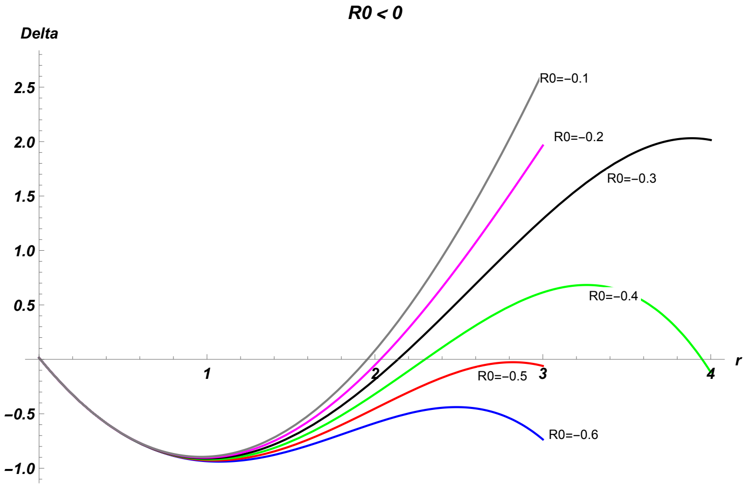
$$R_{\mu\nu} = \partial_\nu\Gamma^\sigma_{\mu\sigma} - \partial_\sigma\Gamma^\sigma_{\mu\nu} + \Gamma^\rho\mu_\nu\Gamma^\sigma_{\rho\nu} - \Gamma^\rho_{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\rho\sigma}. \qquad (15)$$

Komponen-komponen simbol Cristoffel memberikan komponen-komponen tensor Ricci yang tidak nol sebagai berikut

$$\begin{aligned} R_{00} &= \left(-\nu'' + \nu'\lambda' - \nu'^2 - \frac{2\nu'}{r}\right)e^{2\nu-2\lambda} \\ R_{11} &= \nu'' + \nu'^2 - \lambda'\nu' - \frac{2\lambda'}{r} \\ R_{22} &= (1-\lambda' r + \nu' r)e^{-2\lambda} - 1 \\ R_{33} &= \sin^2\theta R_{22} \end{aligned} \qquad (16)$$

Solusi yang akan dicari adalah solusi dengan konstanta kurvatur pada keadaan vakum R_0 untuk sebuah objek bermassa masif. Pada kasus ini, Pers.(3) menjadi

$$R_{\mu\nu}(1+f(R_0)) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(R_0+F(R_0)) = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (17)$$



Gambar 1: $R_0 < 0$ pada solusi Reisner-Nordström dalam teori gravitasi $f(R)$

atau

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\frac{(R_0 + f(R_0))}{(1 + F(R_0))} g_{\mu\nu} + \frac{8\pi G T_{\mu\nu}}{(1 + F(R_0))} \\ &= \frac{R_0}{4} g_{\mu\nu} + \frac{8\pi G T_{\mu\nu}}{(1 + F(R_0))}. \end{aligned} \tag{18}$$

Nilai dari komponen tensor energi momentum yang tidak nol

$$\begin{aligned} T_{00} &= -\frac{1}{2}k^2 e^{-2\lambda} \\ T_{11} &= \frac{1}{2}k^2 e^{-2\nu} \\ T_{22} &= -\frac{1}{2}r^2 k^2 e^{-2\lambda-2\nu} \\ T_{33} &= -\frac{1}{2}r^2 k^2 e^{-2\lambda-2\nu}\sin^2\theta, \end{aligned} \tag{19}$$

dengan $k = q/4\pi\epsilon_0 r^2$.

Menggunakan Pers.(18) dan Pers.(16) akan diperoleh $\lambda = -\nu$, sehingga bagian R_{22} memberikan

$$(1 + 2\nu' r)e^{2\nu} - 1 = \frac{R_0}{4}r^2 - \frac{8\pi G}{2(1 + F(R_0))}r^2 k^2,$$

evaluasi lebih lanjut menghasilkan

$$e^{2\nu} = 1 + \frac{R_0}{12}r^2 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2(1 + F(R_0))}, \tag{20}$$

dengan $Q^2 = Gq^2/4\pi\epsilon_0^2$ yang menyatakan parameter muatan listrik dan m menyatakan parameter massa.

Subtitusikan Pers.(20) dalam Pers. (11) akan memberi elemen garis

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{r^2}dt^2 + \frac{r^2}{\Delta}dr^2 + r^2 d\Omega^2, \tag{21}$$

dengan

$$\Delta = r^2 + \frac{R_0}{12}r^4 + \frac{Q^2}{1 + F(R_0)} - 2mr, \tag{22}$$

Elemen garis pada Pers.(21) dapat disebut sebagai solusi Reisner-Nordström dalam teori gravitasi $f(R)$. Tidak seperti dalam kasus teori gravitasi Einstein, kontribusi muatan partikel dalam metrik memiliki tambahan faktor koreksi $(1 + F(R))^{-1}$. Sebagai penyederhanaan, $Q^2(1 + F(R_0))^{-1}$ kita tuliskan sebagai $\tilde{Q}^2$.

Metrik Pers.(21) akan menjadi takhingga nilainya atau singularitas jika dipenuhi

$$\Delta = r^2 + \frac{R_0}{12}r^4 - 2mr + \tilde{Q}^2 = 0. \tag{23}$$

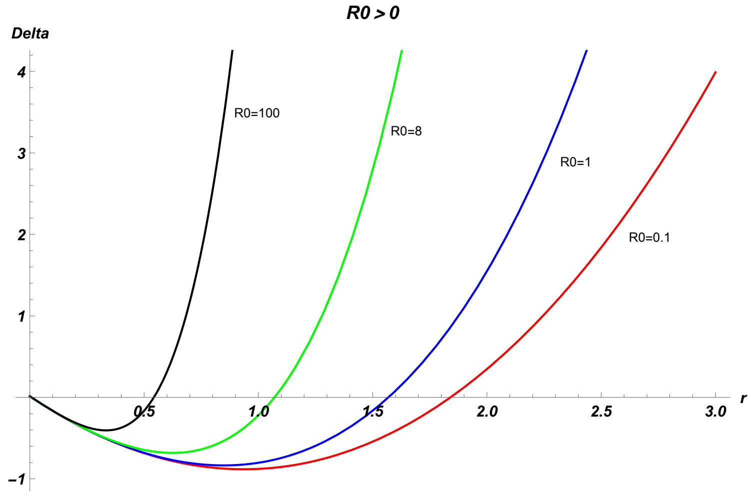
IV. PEMBAHASAN

Bentuk Pers.(23) akan memberikan empat nilai untuk r yaitu r_-,r_{dalam},r_{luar} dan r_k. r_- merupakan solusi r yang selalu negatif sehingga kita abaikan. Dua titik perpotongan menyatakan r_{dalam} r_{dalam},r_{luar} adalah solusi yang sebanding dengan solusi r untuk di dalam dan luar benda sedangkan r_k adalah solusi baru yang belum kita ketahui dampaknya. Analisis hubungan antara r dan Δ dilakukan dengan menganalisis grafik yang diperoleh dari hubungan keduanya.

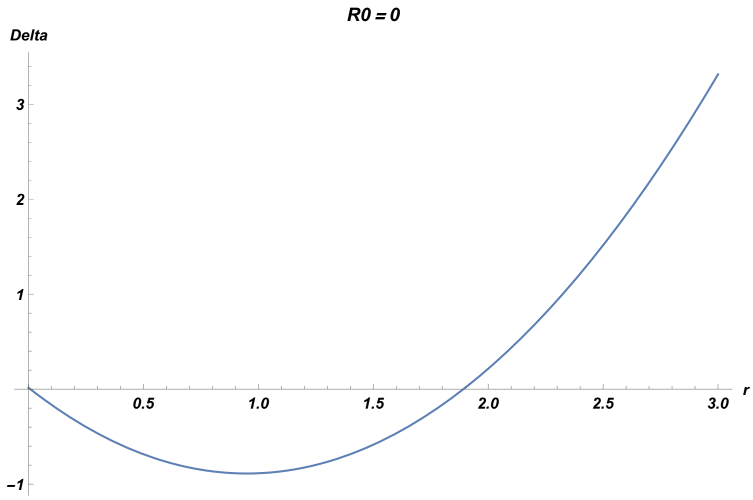
Untuk kasus $R_0 < 0$ (Gambar 1) dapat dilihat ada beberapa nilai R_0 yang menghasilkan tiga buah perpotongan pada sumbu r, yaitu r_-,r_{dalam},r_{luar} dan r_k. Dari Gambar 1 terlihat bahwa

$$r_{dalam} < r_{luar} < r_k. \tag{24}$$

r_{dalam} dan r_{luar} merupakan cakrawala peristiwa seperti halnya di teori relativitas Einstein untuk kasus benda statik bermuatan (Untuk solusi dalam relativitas Einstein lihat [10]).



Gambar 2: $R_0 > 0$ pada solusi Reisner-Nordström dalam teori gravitasi $f(R)$



Gambar 3: $R_0 = 0$ pada solusi Reisner-Nordström dalam teori gravitasi $f(R)$

Singularitas r_k merupakan sumbangsih dari suku R_0, singularitas ini berkaitan dengan singularitas kosmik. Untuk nilai $R_0 > 0$, Gambar 2 menunjukkan adanya dua perpotongan grafik pada sumbu r. Hal ini menunjukkan nilai r_k pada $R_0 > 0$ akan menghilang.

Jika $R_0 = 0$ atau limit teori gravitasi Einstein, maka

$$\Delta \;=\; r^2 + \frac{R_0}{12} r^4 - 2mr + \tilde{Q}^2,$$

akan menjadi

$$\Delta \;=\; r^2 - 2mr + Q^2$$

yang hanya mempunyai dua singularitas yaitu di r_{dalam} dan r_{luar} seperti ditunjukkan Gambar 3, untuk nilai $R_0 = 0$ atau kasus limit teori gravitasi Einstein akan diperoleh perpotongan pada dua titik di sumbu r. Hal ini sesuai dugaan bahwa untuk $R_0 = 0$, maka kasus dalam teori gravitasi $f(R)$ akan kembali solusi Reisner-Nordström dalam teori relatifitas umum [10],[11].

V. SIMPULAN

Solusi Reisner-Nordström dalam teori gravitasi $f(R)$ ditunjukkan oleh Pers.(21). Solusi ini akan mencapai singularitas jika Pers.(23) dipenuhi. Singularitas yang diperoleh untuk kasus $R_0 \neq 0$ adalah r_-,r_{dalam},r_{luar} dan r_k. Pada kasus $R_0 < 0$, diperoleh tiga buah solusi yaitu r_{dalam},r_{luar} dan r_k. Sedangkan untuk $R_0 > 0$ diperoleh dua singularitas yaitu di r_{dalam} dan r_{luar}. Pada saat limit R_0 menuju 0, singularitas solusi Reisner-Nordström dalam teori gravitasi $f(R)$ akan menjadi singularitas solusi Reisner-Nordström dalam teori gravitasi Einstein. Hal ini memberikan simpulan bahwa solusi Pers.(21) merupakan bentuk yang lebih umum dari solusi Reisner-Nordström dalam teori gravitasi Einstein. Singularitas r_{dalam} dan r_{luar} sama halnya dengan dua singularitas dari solusi Reisner-Nordström dalam teori gravitasi Einstein. Singularitas r_k yang nilainya $r_{dalam} < r_{luar} < r_k$ memberi tafsiran bahwa ada tambahan singularitas untuk solusi Reisner-Nordström yang ukurannya lebih besar dari singularitas yang dihasilkan dalam teori relativitas Einstein.

[1] T.P. Sotiriou, and V. Faraoni, Rev. Mod. Phys. **82**, 451-497 (2010). doi:10.1103/RevModPhys.82.451 [arXiv:0805.1726 [gr-qc]].
[2] W. Baade, F. Zwicky, *On Super Novae*, Proc Natl Acad Sci USA,**20**(20), 259-263 (1934).
[3] V.C. Rubin, and W.K. Ford, Jr., Astrophys. J. **159**, 379-404 (1970). doi:10.1086/150317
[4] D. Clowe, *et al.*, ApJ, **648**, L109-L113 (2006),.
[5] L. Fatibene, and S. Garruto, *Extended Gravity*, arXiv:1403.7036v1 [gr-qc] 27 Mar 2014.
[6] C.A. Spoera, *Note on $f(R)$ Theories of Gravity*, arXive:1403.3852v2[gr-qc] 2014.
[7] A. De Felice, and S. Tsujikawa, Living Rev. Rel. **13**, 3 (2010). doi:10.12942/lrr-2010-3 [arXiv:1002.4928 [gr-qc]].
[8] S. Capozziello, and V. Faraoni, *Beyond Einstein Gravity; A Survei of Gravitational Theories for Cosmology And Astrophysics* (Springer,Napoli, 2011).
[9] H.A. Buchdahl, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **150**, 1-8 (1970).
[10] S.M. Carroll, *Spacetime and geometry: An introduction to general relativity* (San Francisco, USA: Addison-Wesley, 2004).
[11] L. Ryder, *Introduction to general relativity* (Cambridge, UK: Cambridge Univ. Pr., 2009).