

Mesin Panas Kuantum Partikel Relativistik pada Sumur Potensial 2 Dimensi

Heru Sukamto,* Agus Purwanto,† dan Bintoro Anang Subagyo‡
*Jurusan Fisika-FMIPA, Institut Teknologi Sepuluh Nopember,
 Kampus ITS Sukolilo, Surabaya 61111*

Intisari

Pada paper ini, dibahas mesin panas kuantum dengan medium partikel relativistik pada sumur potensial 2 dimensi. Dipilih model mirip mesin Carnot dengan ekspansi isoenergetik dan isoentropik pada kedua dimensi sumur potensial. Diambil parameter ekspansi yang berbeda pada kedua dimensi. Dari perhitungan secara analitik, diperoleh nilai efisiensi mesin panas dalam pendekatan non-relativistik bergantung pada ukuran awal sumur potensial. Namun jika parameter ekspansi diambil sama, maka nilai efisiensi sama dengan kasus 1 dimensi.

ABSTRACT

In this paper, we discuss quantum heat engine with relativistic particle medium in two-dimensional potential well. We chose Carnot-like engine model with isoenergetic and isoentropic expansion to both dimensions of potential well. We took different expansion parameter to both dimensions. From the analytic calculation, we obtained heat engine efficiency with non-relativistic approach depend on the sizes of potential well. However, if we took same expansion parameter both dimensions, then the value of heat engine efficiency was equal to 1 dimension case.

KATA KUNCI: Mesin panas relativistik, parameter ekspansi, efisiensi Carnot

I. PENDAHULUAN

Mesin panas merupakan piranti untuk mengkonversi energi panas menjadi energi mekanik. Versi kuantumnya dikenal sebagai mesin panas kuantum, dengan obyek partikel kuantum sebagai media kerja dari mesin panas. Kajian mesin panas kuantum ini telah banyak dikaji oleh banyak peneliti, dari model mainan[1–4] hingga penerapan praktis [5]. Beberapa penelitian mengambil partikel relativistik dalam sumur potensial 1 dimensi sebagai medium kerja mesin [6].

Pada paper ini, dikaji model mesin panas kuantum relativistik dengan sumur potensial 2 dimensi. Pada model ini, proses ekspansi mesin panas melibatkan kedua dimensi. Apabila pada kasus 1 dimensi terdapat 4 proses termodinamik, maka untuk kasus 2 dimensi terdapat 8 proses pada satu siklus Carnot.

II. PARTIKEL DIRAC PADA SUMUR POTENSIAL 2 DIMENSI

Pemodelan menggunakan sumur potensial 2 dimensi, dengan Hamiltonian partikel Dirac diberikan oleh

$$\hat{H} = \hat{\alpha}_1 p_1 c + \hat{\alpha}_2 p_2 c + \hat{\beta} M c^2 + V(x, y) \hat{I} \quad (1)$$

dengan

$$V(x, y) = \begin{cases} 0, & 0 < x < a \text{ dan } 0 < y < b \\ +\infty, & \text{yang lain} \end{cases} \quad (2)$$

Karena hanya melibatkan dua dimensi, maka 3 matriks Pauli cukup menjadi alternatif matriks $\alpha_1, \alpha_2, \beta$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \alpha_2 &= \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ \beta &= \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3)$$

*E-MAIL: herusukamto@physics.its.ac.id

†E-MAIL: purwanto@physics.its.ac.id

‡E-MAIL: b.anang@physics.its.ac.id

sehingga fungsi gelombang menjadi matriks 2×1

$$\psi(x, y) = \begin{pmatrix} \varphi(x, y) \\ \chi(x, y) \end{pmatrix} \quad (4)$$

dengan φ dan χ merupakan spinor Dirac partikel dalam sumur. Namun untuk pembahasan ini, pengaruh spin partikel diabaikan.

Fungsi gelombang Pers.(4) disubstitusikan ke persamaan Dirac tak bergantung waktu

$$-i\hbar c\sigma_1\partial_x\psi - i\hbar c\sigma_2\partial_y\psi + \sigma_3Mc^2\psi = E\psi \quad (5)$$

dan dengan mengambil syarat batas

$$\begin{aligned} \varphi(x = 0, y) &= \varphi(x = a, y) = \varphi(x, y = 0) \\ &= \varphi(x, y = b) = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

serta kondisi normalisasi

$$\int_0^{a_1} \int_0^{b_1} \psi_{n,m}^+ \psi_{n,m} dx dy = 1 \quad (7)$$

diperoleh solusi fungsi gelombang

$$\psi_{n,m}(x, y) = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{4} \left[1 + \frac{\hbar^2 \pi^2 c^2}{(E + Mc^2)^2} \left(\frac{\hbar^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right) \right]}} \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \\ \frac{-i\hbar c}{E + Mc^2} \left[\frac{n\pi}{a} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) + \frac{m\pi}{b} \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \right] \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \end{pmatrix}$$

dengan nilai energi

$$E_{n,m}(a, b) = \sqrt{\hbar^2 \pi^2 c^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + M^2 c^4 \right)} \quad (8)$$

Bilangan kuantum n,m menyatakan level energi sistem sama seperti halnya bilangan kuantum energi partikel pada sumur potensial non-relativistik.

III. PROSES ISOENERGETIK DAN ISOENTROPIK

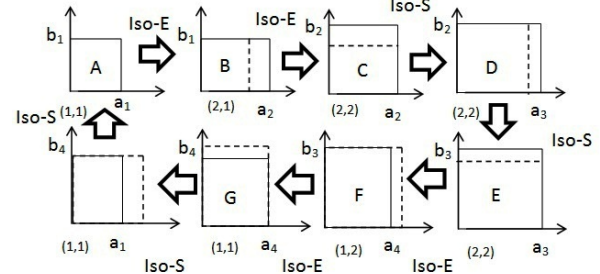
Siklus Carnot klasik terdiri dari proses isothermal dan adiabatik. Proses isothermal terjadi tanpa perubahan energi dalam dari sistem, sedangkan proses adiabatik terjadi tanpa ada kalor yang masuk dan keluar dari sistem. Selama proses berlangsung, dipenuhi hukum termodinamika I

$$dU = dQ - dW \quad (9)$$

Pada Siklus Carnot kuantum, proses isothermal diganti oleh proses isonergetik dengan nilai energi total partikel yang tetap. Sedangkan proses isothermal digantikan oleh proses isoentropik dengan nilai probabilitas tetap[1]. Kedua proses ini dapat berlangsung karena tekanan partikel dalam sumur dan pengaruh eksternal. Di sini digunakan sistem 1 partikel relativistik saja. Dengan probabilitas partikel pada keadaan n,m dinotasikan $p_{n,m}$. Energi total partikel diberikan oleh

$$E = \sum_{n,m} p_{n,m} E_{n,m} \quad (10)$$

Untuk mendapatkan bentuk serupa hukum termodinamika I, maka dideferensialkan energi total sistem kuantum sebagai



Gambar 1: Siklus Carnot 2 dimensi.

berikut

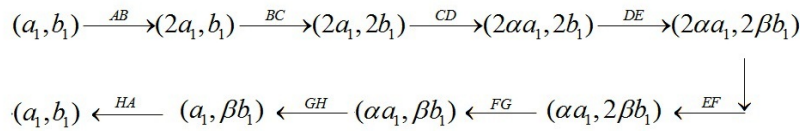
$$\begin{aligned} dE &= \sum_{n,m} E_{n,m}(a, b) dp_{n,m}(a, b) \\ &+ \sum_{n,m} p_{n,m}(a, b) dE_{n,m}(a, b) \end{aligned} \quad (11)$$

Suku pertama analog dengan kalor yang masuk atau keluar sistem, suku kedua analog dengan usaha pada atau oleh sistem. Selama proses isoenergetik, probabilitas partikel berubah sehingga proses ini mensyaratkan perubahan keadaan. Dengan demikian, untuk sumur potensial 2 dimensi dibutuhkan minimal 4 keadaan. Yang di sini diambil model minimal 4 keadaan, yaitu (1,1), (1,2), (2,1), (2,2). Diperkenalkan siklus yang mirip siklus Carnot dengan 4 proses isoenergetik dan 4 proses isoentropik seperti Gambar 1.

Proses isoenergetik

Pertama akan dibahas proses isoenergetik AB (Gambar 1). Selama proses tidak terjadi perubahan energi total. Kalor yang masuk dari reservoir keseluruhannya berubah menjadi kerja.

$$Q_{AB} - W_{AB} = 0 \quad (12)$$



Gambar 2: Skema siklus ukuran sumur potensial 2 dimensi.

Untuk proses isoenergetik yang pertama (proses AB), Kalor yang masuk diberikan oleh

$$Q_{AB} = \sum_{n=1}^2 \int_{a_1}^{a_2} E_{n,1}(a, b_1) \frac{dp_{n,1}(a, b_1)}{da} da \quad (13)$$

Selama proses berlangsung, nilai probabilitas partikel berubah. Kondisi normalisasi mensyaratkan

$$p_{1,1}(a, b_1) + p_{2,1}(a, b_1) = 1 \quad (14)$$

Dengan menggunakan energi total yang konstan selama

proses AB

$$\sum_{n=1}^2 p_{n,1}(a, b_1) E_{n,1}(a, b_1) = p_{1,1}(a_1, b_1) E_{1,1}(a_1, b_1) \quad (15)$$

diperoleh

$$p_{1,1}(a, b_1) = \frac{p_{1,1}(a_1, b_1) E_{1,1}(a_1, b_1) - E_{2,1}(a, b_1)}{E_{1,1}(a, b_1) - E_{2,1}(a, b_1)} \quad (16)$$

Disubstitusikan pada Pers. (13), diperoleh kalor dari reservoir panas sebesar

$$Q_{AB} = \int_{a_1}^{a_2} [E_{1,1}(a, b_1) - E_{2,1}(a, b_1)] \times \frac{d}{da} \left[\frac{p_{1,1}(a_1, b_1) E_{1,1}(a_1, b_1) - E_{2,1}(a, b_1)}{E_{1,1}(a, b_1) - E_{2,1}(a, b_1)} \right] da \quad (17)$$

Kondisi awal diambil sepenuhnya pada keadaan dasar (1,1), sehingga nilai $p_{1,1}(a_1, b_1) = 1$. Dari perhitungan secara analitik, diperoleh

$$Q_{AB} = 2 [E_{1,1}(a_1, b_1) - A_1(b_1)] \ln \left(\frac{a_2}{a_1} \right) + A_1(b_1) \ln \left\{ \frac{[A_1(b_1) + E_{2,1}(a_1, b_1)] [A_1(b_1) + E_{1,1}(a_1, b_1)]}{[A_1(b_1) + E_{2,1}(a_2, b_1)] [A_1(b_1) + E_{1,1}(a_2, b_1)]} \right\} + E_{1,1}(a_1, b_1) \ln \left[\frac{E_{2,1}(a_2, b_1) + E_{1,1}(a_2, b_1)}{E_{2,1}(a_1, b_1) + E_{1,1}(a_1, b_1)} \right] \quad (18)$$

dengan

$$A_n(x) = \sqrt{\hbar^2 c^2 \pi^2 \frac{n^2}{x^2} + M^2 c^4} \quad (19)$$

Dengan cara yang sama, dapat dihitung Q_{BC} , Q_{EF} , Q_{FG} .

Usaha selama proses isoenergetik ditentukan dengan Pers. (12). Sehingga $W_{AB} = Q_{AB}$, $W_{BC} = Q_{BC}$, $W_{EF} = Q_{EF}$, $W_{FG} = Q_{FG}$. Berikutnya ditinjau kondisi awal dan akhir selama proses isoenergetik AB. Karena nilai energi total sistem tidak berubah selama proses dan hanya melibatkan satu partikel, maka

$$E_{1,1}(a_1, b_1) = E_{2,1}(a_2, b_1) \quad (20)$$

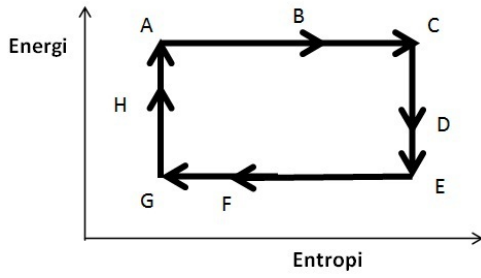
Dengan demikian, dapat diperoleh hubungan $a_2 = 2a_1$. Begitu juga dengan proses isoenergetik yang lainnya, $b_2 = 2b_1$, $a_4 = a_3/2$, $b_4 = b_3/2$.

Proses isoentropik

Untuk proses isoentropik, nilai probabilitas tetap. Misal untuk proses isoentropik CD, $p_{2,2}(a_2, b_2) = p_{2,2}(a_3, b_2) = 1$. Tidak ada kalor yang masuk, sehingga usaha sistem hanya terkait dengan perubahan energi total. Selama proses ini, tidak diperlukan perubahan keadaan sistem, karena perubahan energi total telah terkait dengan perubahan ukuran sumur potensial. Usaha selama proses isoentropik CD diberikan oleh

$$W_{CD} = p_{2,2}(a_3, b_2) E_{2,2}(a_3, b_2) - p_{2,2}(a_2, b_2) E_{2,2}(a_2, b_2) = \sqrt{\hbar^2 \pi^2 c^2 \left(\frac{4}{a_3^2} + \frac{4}{b_2^2} \right) + M^2 c^4} - \sqrt{\hbar^2 \pi^2 c^2 \left(\frac{4}{a_2^2} + \frac{4}{b_2^2} \right) + M^2 c^4} \quad (21)$$

Dengan prosedur yang sama dapat dihitung juga W_{DE} , W_{GH} , W_{HA} . Pada proses isoentropik, diperkenalkan parameter ekspansi α untuk sumbu X dan β untuk sumbu Y, sehingga



Gambar 3: Proses isoenergetik (AB,BC, EF, FB) dan proses isoentropik (CD, DE, GH, HA).

$a_3 = \alpha a_2$, dan $b_3 = \beta b_2$. Parameter ekspansi dibedakan agar diperoleh hasil yang general, dengan demikian skema selama satu siklus dapat digambarkan seperti ditunjukkan Gambar 2.

IV. EFISIENSI MESIN

Nilai efisiensi mesin Carnot merupakan perbandingan antara kerja yang diberikan mesin dengan kalor yang masuk. Secara umum dituliskan sebagai berikut

$$\eta = \frac{W}{Q_{in}} \tag{22}$$

dengan

$$D_1 = \left(\frac{1}{16} \frac{[E_{1,1}(\alpha a_1, \beta b_1) + E_{2,1}(\alpha a_1, \beta b_1)] [E_{1,1}(\alpha a_1, \beta b_1) + E_{1,1}(\alpha a_1, 2\beta b_1)]}{[E_{1,1}(2\alpha a_1, \beta b_1) + E_{1,1}(\alpha a_1, \beta b_1)] [E_{1,1}(\alpha a_1, \beta b_1) + E_{1,1}(\alpha a_1, 2\beta b_1)]} \right)^{E_{1,1}(\alpha a_1, \beta b_1)}$$

$$D_2 = \left(\frac{4 [A_1(\beta b_1) + E_{1,1}(2\alpha a_1, \beta b_1)]}{[A_1(\beta b_1) + E_{2,1}(\alpha a_1, \beta b_1)]} \right)^{A_1(\beta b_1)}$$

$$D_3 = \left(\frac{4 [A_1(\alpha a_1) + E_{1,1}(\alpha a_1, 2\beta b_1)]}{[A_1(\alpha a_1) + E_{1,2}(\alpha a_1, \beta b_1)]} \right)^{A_1(\alpha a_1)}$$

$$D_4 = \left(\frac{16 [E_{1,1}(a_1, b_1) + E_{2,1}(2a_1, b_1)] [E_{1,1}(a_1, b_1) + E_{1,1}(a_1, 2b_1)]}{[E_{2,1}(a_1, b_1) + E_{1,1}(a_1, b_1)] [E_{1,2}(a_1, b_1) + E_{1,1}(a_1, b_1)]} \right)^{E_{1,1}(a_1, b_1)}$$

$$D_5 = \left(\frac{1 [A_1(b_1) + E_{2,1}(a_1, b_1)]}{4 [A_1(b_1) + E_{1,1}(2a_1, b_1)]} \right)^{A_1(b_1)}$$

$$D_6 = \left(\frac{1 [A_1(a_1) + E_{1,2}(a_1, b_1)]}{4 [A_1(a_1) + E_{1,1}(a_1, 2b_1)]} \right)^{A_1(a_1)}$$

Suku di atas menerangkan bahwa nilai efisiensi mesin bergantung pada ukuran awal sumur potensial dan parameter ekspansi. Pendekatan secara non-relativistik [6] $\frac{\lambda}{a_1} \rightarrow 0$, $\frac{\lambda}{b_1} \rightarrow 0$, dengan $\lambda = \frac{2\pi\hbar}{Mc}$ diperoleh

$$\eta = 1 - \frac{\left(\frac{1}{\alpha^2 a_1^2} + \frac{1}{\beta^2 b_1^2} \right)}{\left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{b_1^2} \right)} \tag{26}$$

Untuk menghitung efisiensi mesin ini harus dihitung keseluruhan kerja selama satu siklus dibagi dengan panas yang masuk pada proses energetik AB dan BC seperti Gambar 3. Namun kerumitan ini menjadi lebih sederhana karena selama proses isoentropik, dengan menggunakan Pers.(21), serta skema Gambar 2, total usaha sama dengan nol.

$$W_{CD} + W_{DE} + W_{GH} + W_{HA} = 0 \tag{23}$$

Dengan demikian efisiensi Carnot kuantum dapat dihitung dari proses isoenergetik saja sebagai berikut

$$\eta = 1 + \frac{Q_{EF} + Q_{FG}}{A_{AB} + Q_{BC}} \tag{24}$$

Suku $Q_{EF} + Q_{FG}$ adalah kalor yang keluar sistem dan bernilai negatif. Sedangkan suku $Q_{AB} + Q_{BC}$ merupakan kalor yang masuk ke sistem dan bernilai positif. Dengan mensubstitusikan Pers.(18), serta panduan dari skema Gambar 2 diperoleh efisiensi mesin Carnot relativistik 2 dimensi

$$\eta = 1 + \frac{\ln [D_1 D_2 D_3]}{\ln [D_4 D_5 D_6]} \tag{25}$$

Jika nilai parameter ekspansi diambil sama pada kedua derajat kebebasan ($\alpha = \beta$), maka akan diperoleh nilai efisiensi yang sama dengan referensi [6],

$$\eta = 1 - \frac{1}{\alpha^2} \tag{27}$$

V. SIMPULAN

Nilai efisiensi mesin panas kuantum relativistik pada siklus yang diberikan bergantung pada ukuran awal sumur poten-

sial dan parameter ekspansi. Namun jika nilai parameter ekspansi diambil sama untuk kedua derajat kebebasan, dalam pendekatan non-relativistik akan memberikan nilai yang sama dengan kasus 1 dimensi.

-
- [1] C.M. Bender, D.C. Brody, and B.K. Meister, *Journal of Physics*, **33**(24), 4427-4436 (2000).
[2] E. Latifah and A. Purwanto, *J. Mod. Phys.*, **2**(11), 1366-1372 (2011).
[3] T.H. Quan, *et al.*, *Phys. Rev. E* **76**, 031105 (2007).
[4] H.T. Quan, P. Zhang, and C.P. Sun, *Physical Rev. E*, **72**(5) (2005).
[5] H.E.D. Scovil, and E.O. Schul-DuBois, *Physical Review Letters*, **2**(6), (1959)
[6] E. Munoz and Fransisco J. Pena, *Phys.Rev.E*. **86**, 061108 (2012).