Matriks Massa Neutrino Berat dari Model Seesaw

Agus Purwanto*
Laboratorium Fisika Teori dan Filsafat Alam (LaFTiFA), Jurusan Fisika, FMIPA, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Kampus ITS Sukolilo, Surabaya 60111

Intisari

Dengan asumsi simetri lepton-quark dan menggunakan data eksperimen osilasi neutrino, struktur matriks massa neutrino berat dikaji dalam beberapa kasus. Hasilnya adalah dua bentuk dominan. Pertama, bentuk diagonal yang terkait dengan skala unifikasi dan di atasnya. Kedua, bentuk off-diagonal yang terkait dengan skala antara.

KATA KUNCI: osilasi neutrino, matrik bauran dan model seesaw

I. PENDAHULUAN

Di dalam Model Standar (MS) neutrino tidak bermassa karena neutrino hanya muncul dengan chiralitas kiri (left-handed) ν_L sehingga suku massa Dirac tidak dapat dibangun. Selain itu, suku massa Majorana bagi ν_L tidak dapat dibangun hanya dengan satu doublet Higgs ϕ setelah perusakan simetri spontan. Tetapi eksperimen-eksperimen SuperKamiokande, K2K, SNO dan KamLAND [1] memberi bukti kuat bahwa neutrino bermassa meskipun sangat kecil. Dengan demikian perluasan terhadap MS perlu dilakukan untuk menampung kehadiran massa neutrino tersebut.

Mekanisme seesaw [2] merupakan mekanisme paling populer untuk membangkitkan massa kecil neutrino yakni dengan menambahkan neutrino singlet chiralitas kanan (right-handed) masif ν_R ke dalam MS sektor lepton. Penambahan neutrino kanan ini memberi massa Dirac M_D bagi neutrino dengan mekanisme yang sama dengan sektor quark. Dengan demikian kita harapkan massa M_D mempunyai orde yang sama dengan massa fermion lainnya.

Selain itu, penambahan ν_R juga memungkinkan kita mempunyai suku massa Majorana, M_N yaitu $\frac{1}{2}\bar{\nu}_R M_N \nu_R^c$ dan nilainya tidak dibatasi oleh grup gauge dari MS. Artinya, kita mempunyai skala massa baru bagi teori diperluas yakni model seesaw ini. Inilah masalah pokok yang perlu difahami apakah skala baru ini terkait dengan fisika baru yakni grup gauge yang lebih besar dan pada energi berapa hal ini terjadi.

Massa masif neutrino kanan M_N memberi massa kecil neutrino M_ν melalui mekanisme seesaw

$$M_\nu = M_D M_N^{-1} M_D^T \tag{1}$$

Massa efektif neutrino M_ν ini dapat ditentukan dari data eksperimen osilasi neutrino. Dengan demikian kita harus menentukan M_D dan M_N.

Massa Dirac dari quark dan lepton bermuatan memperlihatkan struktur hirarki yang teratur, $m_d << m_s << m_b$ untuk massa quark-down M_d, $m_u << m_c << m_t$ untuk quark-up M_u dan $m_e << m_\mu << m_\tau$ untuk lepton bermuatan M_ℓ. Karena $M_\ell \approx M_d$ [3] maka adalah hal yang wajar kita menduga atau berharap bahwa $M_D \approx M_u$. Inilah yang diusulkan oleh GUT dan dikenal sebagai simetri lepton-quark yang akan digunakan untuk analisa di dalam makalah ini.

Simetri lepton-quark mengusulkan

$$M_D \approx \frac{m_\tau}{m_b} \begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_c & 0 \\ 0 & 0 & m_t \end{pmatrix} \tag{2}$$

Bentuk diagonal ini berasal dari kenyataan bahwa bauran dalam sektor Dirac serupa dengan bauran kecil dalam sektor quark [4], dan faktor $m_\tau/m_b \equiv k$ yang merambat (running) dari skala unifikasi yang mana dalam skala ini $m_b = m_\tau$ [5]. Massa Dirac neutrino mempunyai nilai $M_D \approx diag(0,001;\ 0,3;\ 100) GeV$ [6].

Di dalam artikel ini akan ditentukan matriks massa neutrino berat dan mengestimasi skala baru melalui kebalikan pers.(1)

$$M_N = M_D^T M_\nu^{-1} M_D \tag{3}$$

dengan menggunakan data eksperimen massa dan bauran (mixing) neutrino serta asumsi simetri quark-lepton.

Di bagian II diuraikan matriks bauran sektor lepton, data massa dan sudut bauran dari osilasi neutrino matahari dan atmosfer. Bagian III membahas matriks massa neutrino berat dalam kasus hirarki normal,hirarki terbalik bagi massa Dirac neutrino dengan sudut bauran maksimal tunggal maupun bimaksimal. Akhirnya diberikan diskusi dan kesimpulan pada bagian IV.

*E-MAIL: `purwanto@physics.its.ac.id`

II. MASSA NEUTRINO DAN MATRIKS BAURAN LEPTONIK

Keadaan eigen flavor ν_ℓ dan keadaan eigen massa ν_i dihubungkan oleh matriks bauran (mixing matrix) uniter U

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} &= U \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} \\ &\equiv \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu 1} & U_{\mu 2} & U_{\mu 3} \\ U_{\tau 1} & U_{\tau 2} & U_{\tau 3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4}$$

Matriks bauran sektor lepton ini dikenal sebagai matriks bauran Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata (PMNS)[7].

Hasil eksperimen osilasi neutrino matahari memberi tiga solusi bagi masalah neutrino matahari yakni sudut bauran kecil (small mixing angle, SMA) MSW (Mikheyev-Smirnov-Wolfstein), sudut bauran besar (large mixing angle, LMA) MSW dan osilasi vakum (VO). Orde besaran bagi neutrino matahari $\Delta m^2_\odot$ [8]

$$\Delta m^2_\odot \approx 10^{-6} eV^2 \ \ (SMA) \tag{5}$$
$$\Delta m^2_\odot \approx 10^{-5} eV^2 \ \ (LMA) \tag{6}$$
$$\Delta m^2_\odot \approx 10^{-10} eV^2 \ \ (VO) \tag{7}$$

Sedangkan osilasi atmosferik memberikan

$$\Delta m^2_{atm} \approx 10^{-3} eV^2 \tag{8}$$

Data-data di atas jelas memberikan $\Delta m^2_\odot << \Delta m^2_{atm}$. Secara teoritis hasil pengamatan massa kuadrat di atas terkait dengan selisih massa eigen kuadrat

$$\Delta m^2_\odot = m_2^2 - m_1^2 \tag{9}$$
$$\Delta m^2_{atm} = m_3^2 - m_2^2, \ m_3^2 - m_1^2 \tag{10}$$

Karena itu, dengan mengambil $m_3 > 0$ data di atas memberi hirarki massa normal

$$|m_1| < |m_2| << m_3 \tag{11}$$

atau hirarki

$$|m_1| \approx |m_2| >> m_3 \tag{12}$$

yang disebut hirarki terbalik.

Matriks bauran di dalam pers.(4) terdiri dari tiga matriks rotasi terhadap masing-masing sumbu, yakni sumbu satu $U\,(23)$, dua $U\,(13)$ dan sumbu tiga $U\,(12)$,

$$\begin{aligned} U\,(23) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_{23} & \sin\theta_{23} \\ 0 & -\sin\theta_{23} & \cos\theta_{23} \end{pmatrix} \\ U\,(13) &= \begin{pmatrix} \cos\theta_{13} & 0 & \sin\theta_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_{13} & 0 & \cos\theta_{13} \end{pmatrix} \\ U\,(12) &= \begin{pmatrix} \cos\theta_{12} & \sin\theta_{12} & 0 \\ \sin\theta_{12} & \cos\theta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{13}$$

Matriks bauran PMNS diberikan oleh [9]

$$U = U\,(23)\, U\,(13)\, U\,(12) \tag{14}$$

Lebih lanjut, eksperimen reaktor CHOOZ [10] memberikan sudut θ_{13} kecil sekali, misalkan $\theta_{13} \to \epsilon$ maka

$$U\,(13) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \epsilon \\ 0 & 1 & 0 \\ -\epsilon & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{15}$$

Sedangkan kolaborasi SuperKamiokande memberikan bauran maksimal bagi neutrino atmosferik, $\theta_{23} \approx \pi/4$ [11],

$$U\,(23) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{16}$$

Tuliskan θ_{12} sebagai θ maka matriks PMNS menjadi

$$U = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & \epsilon \\ -\frac{\sin\theta + \epsilon\cos\theta}{\sqrt{2}} & \frac{\cos\theta - \epsilon\sin\theta}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sin\theta - \epsilon\cos\theta}{\sqrt{2}} & -\frac{\cos\theta + \epsilon\sin\theta}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{17}$$

III. MATRIKS MASSA NEUTRINO

Perhatikan kembali pers.(1) dan (3), karena M_N simetrik maka M_ν juga. Karena itu, M_ν dapat didiagonalisasi menurut hubungan,

$$U^+ M_\nu U^* = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix} \tag{18}$$

Dengan demikian, matriks massa neutrino diberikan oleh

$$\begin{aligned} M_\nu &= U \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix} U^T \\ &= \begin{pmatrix} \alpha + \epsilon^2 m_3 & \beta & \gamma \\ \beta & \rho + \frac{\epsilon^2\alpha}{2} & \sigma + \frac{\epsilon^2\alpha}{2} \\ \gamma & \sigma + \frac{\epsilon^2\alpha}{2} & \rho' + \frac{\epsilon^2\alpha}{2} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{19}$$

dengan

$$\begin{aligned} \alpha &= \cos^2\theta m_1 + \sin^2\theta m_2 \\ \alpha' &= \sin^2\theta m_1 + \cos^2\theta m_2 \\ \beta &= \frac{\epsilon\,(m_3 - \alpha) + \sin\theta\cos\theta\,(m_2 - m_1)}{\sqrt{2}} \\ \gamma &= \frac{\epsilon\,(m_3 - \alpha) - \sin\theta\cos\theta\,(m_2 - m_1)}{\sqrt{2}} \\ \sigma &= \frac{m_3 - \alpha'}{2} \\ \rho &= \frac{m_3 + \alpha' - 2\epsilon\sin\theta\cos\theta\,(m_2 - m_1)}{2} \\ \rho' &= \frac{m_3 + \alpha' + 2\epsilon\sin\theta\cos\theta\,(m_2 - m_1)}{2} \end{aligned} \tag{20}$$

Tampak suku ϵ^2 di dalam pers.(19) dapat diabaikan dan matriks massa M_ν menjadi [12]

$$M_\nu = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \rho & \sigma \\ \gamma & \sigma & \rho' \end{pmatrix} \tag{21}$$

Invers matriks massa ini diberikan oleh

$$M_\nu^{-1} = \frac{1}{\Sigma}\begin{pmatrix} \sigma^2-\rho\rho' & \beta\rho'-\sigma\gamma & \rho\gamma-\beta\sigma \\ \beta\rho'-\sigma\gamma & \gamma^2-\alpha\rho' & \alpha\sigma-\beta\gamma \\ \gamma\rho-\beta\sigma & \alpha\sigma-\beta\gamma & \beta^2-\alpha\rho \end{pmatrix} \tag{22}$$

dengan

$$\begin{aligned}\Sigma &= \frac{1}{2}\left[\epsilon^2\left\{2m_1^2m_2 + m_3^2\left(m_2+m_1\right) - 4m_1m_2m_3 \right.\right. \\ &\quad \left.\left. + \left(m_1-m_2\right)\left(m_1m_2-m_3^2\right)\right\} - 2m_1m_2m_3\right] \\ &\approx -m_1m_2m_3 \end{aligned} \tag{23}$$

Hubungan di atas kita gunakan untuk menentukan bentuk dominan (leading form) matriks neutrino dan skala baru massa Majorana terbesar M_{N33}.

A. Hirarki Normal

Menggunakan hirarki (11) maka kuantitas-kuantitas (20) menjadi

$$\begin{aligned}\alpha &= \cos^2\theta m_1 + \sin^2\theta m_2 \\ \alpha' &= \sin^2\theta m_1 + \cos^2\theta m_2 \\ \beta &= \frac{\epsilon m_3 + \sin\theta\cos\theta\left(m_2-m_1\right)}{\sqrt{2}} \\ \gamma &= \frac{\epsilon m_3 - \sin\theta\cos\theta\left(m_2-m_1\right)}{\sqrt{2}} \\ \sigma &= \frac{m_3}{2} \\ \rho &= \rho' = \frac{m_3}{2}\end{aligned} \tag{24}$$

dan matriks massa M_ν (21)menjadi

$$M_\nu = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \frac{m_3}{2} & \frac{m_3}{2} \\ \gamma & \frac{m_3}{2} & \frac{m_3}{2} \end{pmatrix} \tag{25}$$

Pers.(24) memperlihatkan bahwa α, β, dan γ merupakan besaran massa yang jauh lebih kecil dibanding m_3. Karena itu, bentuk dominan matriks M_ν berbentuk

$$M_\nu \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{26}$$

Selanjutnya, kita tentukan invers M_ν^{-1}. Semua elemen matriks (22) dapat disubtitusi dengan kuantitas-kuantitas (24) dan didapatkan komponen $\left(M_\nu^{-1}\right)_{11}$ adalah nol. Komponen ini memang sangat kecil tetapi tidak perlu nol dan hal ini dapat diperoleh jika digunakan

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{m_3-\alpha}{2} \\ \rho &= \rho' = \frac{m_3+\alpha'}{2}\end{aligned} \tag{27}$$

Kuantitas (27) dan (24) mereduksi invers matriks (22) menjadi

$$M_\nu^{-1} \approx \frac{1}{-\Sigma}\begin{pmatrix} m_3\alpha' & \frac{m_3}{2}\left(\gamma-\beta\right) & \frac{m_3}{2}\left(\beta-\gamma\right) \\ \frac{m_3}{2}\left(\gamma-\beta\right) & \frac{m_3}{2}\alpha-\gamma^2 & \beta\gamma-\frac{m_3}{2}\alpha \\ \frac{m_3}{2}\left(\beta-\gamma\right) & \beta\gamma-\frac{m_3}{2}\alpha & \frac{m_3}{2}\alpha-\beta^2 \end{pmatrix} \tag{28}$$

1. *Bauran Maksimal Tunggal*

Pertama ambil kasus $\theta \approx 0$ maka besaran-besaran (24) menjadi

$$\begin{aligned}\alpha &= m_1 \\ \alpha' &= m_2 \\ \beta &= \gamma = \frac{\epsilon m_3}{\sqrt{2}}\end{aligned} \tag{29}$$

sehingga

$$M_\nu^{-1} \approx \frac{1}{-\Sigma}\begin{pmatrix} m_2m_3 & 0 & 0 \\ 0 & x & -x \\ 0 & -x & x \end{pmatrix} \tag{30}$$

dengan $x = \frac{m_3}{2}\left(m_1 - \epsilon^2 m_3\right)$. Matriks massa neutrino Majorana masif

$$
\begin{aligned}
M_N &= \frac{m_\tau^2}{-\Sigma m_b^2}\begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_c & 0 \\ 0 & 0 & m_t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_2 m_3 & 0 & 0 \\ 0 & x & -x \\ 0 & -x & x \end{pmatrix} \\
&\quad \times \begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_c & 0 \\ 0 & & m_t \end{pmatrix} \\
&= \frac{k^2}{-\Sigma}\begin{pmatrix} m_2 m_3 m_u^2 & 0 & 0 \\ 0 & x m_c^2 & -x m_c m_t \\ 0 & -x m_c m_t & x m_t^2 \end{pmatrix} \quad (31)
\end{aligned}
$$

dengan $k = \frac{m_\tau}{m_b}$. Bentuk matriks massa ini memberi komponen terbesar

$$M_{N33} \approx \frac{k^2 m_\tau^2}{2}\frac{\left(m_1 - \epsilon^2 m_3\right)}{m_1 m_2} \quad (32)$$

Pengandaian $\epsilon^2 m_3 << m_1$ memberikan

$$M_{N33} \approx \frac{k^2 m_\tau^2}{2m_2} \quad (33)$$

Sudut $\theta \approx 0$ merupakan kasus sudut baur kecil (SMA) dengan massa terkait

$$m_2 \leq \sqrt{\Delta m_\odot^2} = 10^{-3} eV \quad (34)$$

sehingga

$$M_{N33} \geq \frac{100^2}{2 \times 10^{-12}} GeV \geq 10^{15} GeV \quad (35)$$

dan bentuk matriks dominan M_N

$$M_N \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (36)$$

2. *Bauran Bimaksimal*

Jika $\sin\theta \approx 1/\sqrt{2}$ maka kita mempunyai dua bauran maksimal yaitu $U(23)$ dan $U(12)$. Untuk kasus ini kita dapat membagi dalam tiga subkasus yaitu $|m_2| >> |m_1|$, $m_2 \approx m_1$ dan $m_2 \approx -m_1$.

1. Untuk kasus $|m_2| >> |m_1|$, kita dapatkan

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \alpha' = \frac{m_2}{2} \\
\beta &= \frac{\epsilon m_3 + m_2/2}{\sqrt{2}} \quad (37) \\
\gamma &= \frac{\epsilon m_3 - m_2/2}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

Dengan demikian invers matriks massa dengan $2\epsilon m_3 << |m_2|$ didapatkan

$$M_\nu^{-1} \approx \frac{1}{4m_1}\begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 & -1 \\ \sqrt{2} & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (38)$$

Lebih lanjut didapatkan

$$M_{N33} \approx \frac{k^2 m_\tau^2}{4m_1} \quad (39)$$

Untuk sudut baur besar LMA,

$$m_2 = \sqrt{\Delta m_\odot^2 \approx 10^{-5} eV^2} \approx 10^{-3} eV >> m_1 \quad (40)$$

Misalkan, ambil orde m_1 lebih kecil tetapi paling dekat dengan m_2

$$m_1 \leq 10^{-4} eV \quad (41)$$

maka

$$M_{N33} \geq 10^{16} GeV \quad (LMA) \quad (42)$$

yakni skala GUT atau skala unifikasi. Sedangkan untuk osilasi vakum (VO)

$$m_2 =\approx 10^{-5} eV >> m_1 \quad (43)$$

Ambil $m_1 \leq 10^{-6} eV$ maka

$$M_{N33} \geq 10^{18} GeV \quad (VO) \quad (44)$$

yaitu skala Planck.

2. Untuk kasus $m_2 \approx m_1$ maka

$$\alpha' = m_2, \;\; \beta = \gamma = \frac{\epsilon m_3}{2} \quad (45)$$

dan invers matriks massa neutrino

$$M_\nu^{-1} \approx \frac{1}{-\Sigma}\begin{pmatrix} m_2 m_3 & 0 & 0 \\ 0 & y & -y \\ 0 & -y & y \end{pmatrix} \quad (46)$$

dengan $y = \frac{m_3}{2}\left(m_2 - \epsilon^2 m_3\right)$. Matriks massa neutrino ini dengan $m_2 >> \epsilon^2 m_3$ memberi suku M_{N33} Majorana masif

$$M_{N33} \approx \frac{k^2 m_\tau^2}{2m_2} \quad (47)$$

dan $M_{N33} \geq 10^{15} GeV$ baik untuk LMA maupun VO. Matriks M_N juga hirarkis dengan bentuk dominan sebagaimana bentuk (36).

3. Kasus $m_2 \approx -m_1$ memberi

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \alpha' = 0 \\
\beta &= \frac{\epsilon m_3 + m_2}{\sqrt{2}} \quad (48) \\
\gamma &= \frac{\epsilon m_3 - m_2}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

Selanjutnya, asumsi $\epsilon m_3 << m_2$ memberikan

$$\beta = -\gamma = \frac{m_2}{\sqrt{2}} \quad (49)$$

sehingga

$$M_\nu^{-1} \approx \frac{1}{-\Sigma}\begin{pmatrix} 0 & -\frac{m_2m_3}{\sqrt{2}} & \frac{m_2m_3}{\sqrt{2}} \\ -\frac{m_2m_3}{\sqrt{2}} & -\frac{m_2^2}{2} & -\frac{m_2^2}{2} \\ \frac{m_2m_3}{\sqrt{2}} & -\frac{m_2^2}{2} & -\frac{m_2^2}{2} \end{pmatrix} \quad (50)$$

Invers matriks massa neutrino tersebut memberikan elemen matriks massa neutrino efektif

$$M_{N13} \approx \frac{k^2 m_u m_t}{\sqrt{2}m_2}, \; M_{N33} \approx \frac{k^2 m_t^2}{2m_3} \quad (51)$$

Jika $m_2/m_3 \approx m_u/m_t$ maka $M_{N13} \approx M_{N33}$ dan dekat dengan skala unifikasi.

Kasus menarik $\delta \approx 0$ yang mungkin terjadi jika $m_2 < 0$ dan $|m_2| \approx \epsilon m_3$ sehingga $\gamma \approx -\sqrt{2}m_2$, maka

$$M_\nu^{-1} \approx \frac{1}{-\Sigma}\begin{pmatrix} 0 & -\frac{m_2m_3}{\sqrt{2}} & \frac{m_2m_3}{\sqrt{2}} \\ -\frac{m_2m_3}{\sqrt{2}} & 2\epsilon m_2 m_3 & 0 \\ \frac{m_2m_3}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (52)$$

Matriks invers ini dan hubungan (3) memberikan matriks massa neutrino Majorana

$$M_N \approx \frac{k^2}{m_2}\begin{pmatrix} 0 & -\frac{m_u m_c}{\sqrt{2}} & \frac{m_u m_t}{\sqrt{2}} \\ -\frac{m_u m_c}{\sqrt{2}} & 2\epsilon m_c^2 & 0 \\ \frac{m_u m_t}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (53)$$

yang memberi bentuk dominan

$$M_N \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (54)$$

Massa terberat

$$M_{N13} \approx \frac{k^2}{\sqrt{2}}\frac{m_u m_t}{m_2} \quad (55)$$

untuk $m_2 \leq 10^{-3} eV$ maka

$$M_{N13} \geq \frac{(0,001)(100)}{10^{-12}} GeV \geq 10^{11} GeV \quad (56)$$

yakni skala antara (intermediate scale) sebagaimana diperoleh sebelumnya [13].

Untuk $\gamma \approx 0$ dan $\beta \approx \sqrt{2}m_2 \approx \sqrt{2}\epsilon m_3$ diperoleh

$$M_\nu^{-1} \approx \frac{1}{-\Sigma}\begin{pmatrix} 0 & -\frac{m_2m_3}{\sqrt{2}} & \frac{m_2m_3}{\sqrt{2}} \\ -\frac{m_2m_3}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{m_2m_3}{\sqrt{2}} & 0 & -2\epsilon m_2 m_3 \end{pmatrix} \quad (57)$$

dan

$$M_{N13} \approx \frac{k^2 m_u m_t}{\sqrt{2}m_2}, \; M_{N33} \approx \frac{2k^2 \epsilon m_t^2}{m_2} \quad (58)$$

Jika $\epsilon \approx m_u/m_t$ maka $M_{N13} \approx M_{N33}$ dan dekat dengan skala unifikasi.

B. Hirarki Terbalik

Sekarang kita tinjau bila $|m_1| \approx |m_2| >> m_3$. Dalam kasus ini berlaku

$$\Delta m_{atm}^2 = m_2^2 - m_3^2 \approx m_2^2 \quad (59)$$

Kondisi ini membuat elemen (20) menjadi

$$\begin{aligned} \alpha &= \cos^2\theta m_1 + \sin^2\theta m_2 \\ \alpha' &= \sin^2\theta m_1 + \cos^2\theta m_2 \\ \beta &= \frac{-\epsilon\alpha + \sin\theta\cos\theta\,(m_2 - m_1)}{\sqrt{2}} \\ \gamma &= \frac{-\epsilon\alpha - \sin\theta\cos\theta\,(m_2 - m_1)}{\sqrt{2}} \\ \rho &= \rho' = -\sigma \approx \frac{\alpha'}{2} \end{aligned} \quad (60)$$

Dengan demikian matriks massa neutrino efektif diberikan oleh

$$M_\nu = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \frac{\alpha'}{2} & -\frac{\alpha'}{2} \\ \gamma & -\frac{\alpha'}{2} & \frac{\alpha'}{2} \end{pmatrix} \quad (61)$$

Menggunakan elemen-elemen (60) diperoleh $\left(M_\nu^{-1}\right)_{11} = 0$. Elemen ini memang sangat kecil tetapi tidak perlu nol dan dipenuhi bila digunakan

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{m_3 - \alpha'}{2} \\ \rho &= \rho' = \frac{m_3 + \alpha'}{2} \end{aligned} \quad (62)$$

dan didapatkan $\left(M_\nu^{-1}\right)_{11} = \frac{m_3\alpha'}{-\Sigma}$. Secara lengkap, $\left(M_\nu^{-1}\right)$ diberikan oleh

$$M_\nu^{-1} \approx \frac{1}{-\Sigma}\begin{pmatrix} m_3\alpha' & -\frac{\alpha'}{2}(\beta+\gamma) & -\frac{\alpha'}{2}(\beta+\gamma) \\ -\frac{\alpha'}{2}(\beta+\gamma) & \frac{\alpha\alpha'}{2} - \gamma^2 & \beta\gamma + \frac{\alpha\alpha'}{2} \\ -\frac{\alpha'}{2}(\beta+\gamma) & \beta\gamma + \frac{\alpha\alpha'}{2} & \frac{\alpha\alpha'}{2} - \beta^2 \end{pmatrix} \quad (63)$$

Selanjutnya kita selidiki untuk kasus demi kasus.

1. Bauran Maksimal Tunggal

Pertama ambil kasus $\theta \approx 0$ maka besaran-besaran (60) menjadi

$$\begin{aligned} \alpha &= m_1 \;\; \alpha' = m_2 \\ \beta &= \gamma = \frac{-\epsilon m_1}{\sqrt{2}} \end{aligned} \tag{64}$$

Matriks massa neutrino efektif diberikan oleh

$$M_\nu \approx \begin{pmatrix} m_2 & -\frac{\epsilon m_2}{\sqrt{2}} & -\frac{\epsilon m_2}{\sqrt{2}} \\ -\frac{\epsilon m_2}{\sqrt{2}} & \frac{m_2}{2} & -\frac{m_2}{2} \\ -\frac{\epsilon m_2}{\sqrt{2}} & -\frac{m_2}{2} & \frac{m_2}{2} \end{pmatrix} \tag{65}$$

Bentuk dominannya diberikan oleh

$$M_\nu \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{66}$$

Matriks inversnya diberikan oleh

$$M_\nu^{-1} \approx \frac{1}{m_3} \begin{pmatrix} \frac{m_3}{m_2} & \frac{\epsilon}{\sqrt{2}} & \frac{\epsilon}{\sqrt{2}} \\ \frac{\epsilon}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\epsilon}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \tag{67}$$

Matriks invers ini memberi bentuk dominan bagi M_N sebagaimana bentuk (36) dengan massa terbesar

$$M_{N33} \approx \frac{2k^2 m_t^2}{2m_3} \tag{68}$$

dan pada skala unifikasi atau di atasnya.

2. Bauran Bimaksimal

Untuk sudut $\theta \approx \pi/4$ terdapat dua subkasus yaitu $m_2 \approx m_1$ dan $m_2 \approx -m_1$.

1) Untuk $m_2 \approx m_1$ maka

$$\begin{aligned} \alpha &\approx \alpha' \approx m_1 \\ \beta &\approx \gamma \approx -\frac{\epsilon m_2}{\sqrt{2}} \end{aligned} \tag{69}$$

dan matriks massa neutrino efektif

$$M_\nu \approx \begin{pmatrix} m_2 & -\frac{\epsilon m_2}{\sqrt{2}} & -\frac{\epsilon m_2}{\sqrt{2}} \\ -\frac{\epsilon m_2}{\sqrt{2}} & \frac{m_2}{2} & -\frac{m_2}{2} \\ -\frac{\epsilon m_2}{\sqrt{2}} & -\frac{m_2}{2} & \frac{m_2}{2} \end{pmatrix} \tag{70}$$

Tampak memberi hasil yang sama dengan kasus sudut kecil $\theta \approx 0$ untuk hirarki terbalik.

2) Untuk $m_2 \approx -m_1$ diperoleh

$$\begin{aligned} \alpha &\approx \alpha' \approx 0 \\ \beta &\approx -\gamma \approx -\frac{m_2}{\sqrt{2}} \end{aligned} \tag{71}$$

Karena itu, matriks massa neutrino efektif

$$M_\nu \approx \begin{pmatrix} 0 & \frac{m_2}{\sqrt{2}} & -\frac{m_2}{\sqrt{2}} \\ \frac{m_2}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ -\frac{m_2}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{72}$$

dan bentuk dominannya

$$M_\nu \approx \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{73}$$

Matriks invers

$$M_\nu^{-1} \approx \frac{1}{-2m_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{74}$$

yang memberi massa terbesar

$$M_{N33} \approx \frac{k^2 m_t^2}{2m_3} \tag{75}$$

dengan skala unifikasi atau di atasnya.

IV. DISKUSI DAN SIMPULAN

Pada pembahasan ini hanya ditinjau matriks bauran riel atau tanpa sudut fasa. Sudut fasa ini dapat menjadi sumber informasi bagi terjadinya alam semesta taksimetri saat ini, sebagai contoh [14]. Tanda dari m_i terkait dengan paritas CP dari neutrino sedangkan massa fisis $|m_i|$[15].

Analisa memberikan dua bentuk dominan M_N yaitu bentuk diagonal (36) dan off-diagonal (54). Bentuk diagonal umumnya berskala unifikasi kecuali pada kasus osilasi vakum yang berskala di atas unifikasi menuju skala Planck. Sedangkan bentuk off-diagonal pada skala antara.

Ucapan Terima Kasih

Penulis sampaikan terimakasih kepada Anwari Fundamental Science Foundation (AFSiF) yang mendukung penelitian ini.

[1] Y. Fukuda *dkk.*, Phys.Rev.Lett. **81**, 1158(1998); M.H. Ahn *dkk.*,Phys.Rev.Lett. **90**, 041801(2003); Q.R. Ahmad *dkk.*, Phys.Rev.Lett. **89**, 011301; 011302(2002); K.Eguchi *dkk.*, Phys.Rev.Lett. **90**, 021802(2003).

[2] M. Gell-Mann, P.Ramond and R. Slansky, in *Supergravity*, eds. P. van Nieuwenhuizen and D. Freedman (North Hollad, Amsterdam, 1979); T.Yanagida, in *Proceedings of the Workshop on Unified Theories and Baryon Number in the Universe*, eds. O.Sawada and A. Sugamoto (KEK, Tsukuba, 1979).

[3] H. Nishiura, K.Matsuda and T. Fukuyama, Phys. Rev. **D60** 013006 (1999); H. Fritzsch and Z. Xing, Nucl. Phys. **B556** 49 (1999).

[4] P. Ramond, R.G.Roberts and G.G. Ross, Nucl.Phys. **B406** 19 (1993).

[5] H. Arason, D.J. Castano, E.J. Piard and P. Ramond, Phys.Rev. **D47** 232 (1993).

[6] H. Fusaoka and Y. Koide, Phys. Rev. **D57**, 3986 (1998).

[7] B. Pontecorvo, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **33** 549 (1957); Z. Maki, M. Nakagawa, and S. Sakata, Prog. Theor. Phys. **28**, 870 (1962).

[8] J.N. Bahcal, P.I. Krastev and A. Yu. Smirnov, Phys. Rev. **D58**, 096016 (1998); **D60**, 093001 (1999).

[9] E. Kh. Akhmedov, Phys. Lett **B467**, 95 (1999).

[10] M.Appolonio *dkk.* [CHOOZ Collab.], Phys.Lett. **B420**,397(1998).

[11] Y. Fukuda *dkk.*, Phys.Rev.Lett. **81**, 1562(1998).

[12] D. Falcone, hep-ph/0002242.

[13] M. Jezabek and Y. sumino, Phys.Lett. **B440**, 327 (1998); B. Stech, Phys.Lett. **B465**, 219 (1999).

[14] T. Endoh, T. Morozumi, T. Onogi, and A. Purwanto, Phys. Rev. **D64**, (2001)013006; T. Endoh, T. Morozumi, and A. Purwanto, Nucl.Phys.Proc.Suppl. **B111**, 299(2001).

[15] S.M.Bilenky, C. Giunti and W. Grimus, Prog. Part. Nucl. Phys. **43** 1 (1999).