Limits: Journal of Mathematics and Its Applications
E-ISSN: 2579-8936
P-ISSN: 1829-605X
Vol. 19, No. 2, Nopember 2022, 203-216
DOI: http://dx.doi.org/10.12962/limits.v19i2.10652

Penerapan Teori Residu dalam Penentuan Nilai Eksak dari Deret Tak Hingga

Yusuf Ramadana [1] dan **Dwi Fitriani Rosali** [2]
[1]Institut Teknologi Bandung, [2]Universitas Pendidikan Indonesia, Bandung Indonesia
email: [1]yusuf.ramadana20021996@gmail.com, [2]dewirosali@upi.edu

Diajukan: 28 Juli 2021, Diperbaiki: 27 Juni 2022, Diterima: 7 Nopember 2022

Abstrak

Teorema Residu memiliki penerapan yang menarik pada berbagai bidang matematika. Penerapan tersebut seperti pada evaluasi transformasi Fourier, transformasi Mellin, dan penentuan nilai integral tak wajar yang melibatkan fungsi yang tergolong relatif rumit seperti pada integral Dirichlet dan integral Fresnel. Selain penerapan-penerapan tersebut dalam penentuan nilai eksak integral, teori residu juga mempunyai penerapan pada penentuan nilai eksak dari suatu deret tak hingga yang konvergen. Pada penelitian ini, diturunkan kemudian dibuktikan sebuah aturan untuk menentukan nilai eksak dari suatu deret tak hingga yang memenuhi syarat-syarat tertentu. Metode penelitian yang digunakan berupa kajian literatur. Peneliti mengumpulkan sumber-sumber ilmiah baik berupa artikel ilmiah maupun buku-buku yang kemudian dianalisis untuk mencapai tujuan penelitian. Hasil penelitian memberikan syarat cukup terkait dengan penggunaan rumus yang diperoleh sekaligus memberikan bukti dengan pendekatan yang berbeda dari sebelumnya. Dari hasil yang diperoleh tersebut, juga dilakukan perhitungan mengenai nilai eksak dari fungsi Zeta-Riemann di bilangan genap positif sebagai salah satu aplikasi dari aturan tersebut.
Kata kunci: Analisis kompleks, deret tak hingga, residu.

Abstract

The residue theorem has interesting applications to various fields of mathematics. The applications are like in the evaluation of the Fourier transform, Mellin transform, and the evaluaion of the exact value of improper integral involving functions that are relatively complex such as Dirichlet integral and Fresnel integrals. Besides these applications in evaluation of the exact value of integral, residue theory also has an application to the evaluation of the exact value of a convergent infinite series. In this research, we derive and prove a rule to evaluate the exact value of a convergent infinite series that satisfy certain conditions. The research method that was in this study is literature review. The researchers collect scientific resources either scientific paper or books to be analyzed in order to achieve the research objective. The research results give sufficient condition related to the use of the formula/rule that was obtained and give proofs with an approach that is different from the previous one. From the obtained results, the researchers also do calculation to evaluate the exact value of Zeta-Riemann function at the even positive number as one of the applications of the obtained formula/rule.
Keywords*: Complex analysis, infinite series, residue.*

1 Pendahuluan

Teorema residu memiliki aplikasi yang sangat menarik pada berbagai bidang matematika. Salah satu penerapan tersebut adalah pada transformasi Fourier dan transformasi Mellin.

Penerapan lainnya terletak pada evaluasi nilai integral tak wajar yang melibatkan fungsi yang rumit, seperti integral berikut.

$$\int_{\mathbb{R}^+} \frac{\sin x}{x} dx\,, \int_{\mathbb{R}^+} \cos x^2\, dx, \int_{\mathbb{R}^+} \sin x^2\, dx\,, \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-x^2}}{4+x^2} dx\,, \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{1+x^4} dx.$$

Integral pertama merupakan integral Dirichlet, sedangkan integral kedua dan ketiga merupakan integral Fresnel. Dengan penerapan residu, dimungkinkan untuk menentukan nilai integral tak wajar tersebut lebih mudah dibandingkan dengan cara yang biasa sepert teknik subtitusi dan teknik integral parsial. Salah satu penerapan teori residu lainnya adalah dalam mengevaluasi nilai eksak dari suatu deret tak hingga dari bilangan-bilangan real yang konvergen.

Salah satu masalah deret tak hingga yang terkenal adalah deret pada masalah Bassel, variasi dan perumumannya. Masalah tersebut adalah menentukan nilai dari deret tak hingga

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}, \dots$$

Deret pertama (masalah Bessel) memiliki nilai eksak $\pi/6$ [1]. Nilai tersebut dapat pula diperoleh secara langsung menggunakan pendekatan bilangan Bernoulli sebagaimana dijelaskan oleh Maulidi dkk [2], Dwilewicz dkk [3], dan juga nantinya akan dibahas pada bagian akhir menggunakan aturan yang kemudian akan diturunkan.

Masalah penentuan nilai eksak deret-deret sebelumnya kemudian diperluas menjadi penentuan nilai dari deret

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

dengan $x > 0$. Deret tersebut akan konvergen ketika $x > 1$. Deret tersebut kemudian diperluas dan didefinisikan sebagai fungsi Zeta-Riemann sebagaimana pada [4] dan [5], yaitu fungsi pada bidang kompleks $\zeta\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dengan

$$\zeta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}.$$

Euler memberikan bentuk lain dari fungsi tersebut dalam bentuk hasil kali tak hingga dengan melibatkan bilangan-bilangan prima. Hasil kali tersebut berupa

$$\zeta(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_k^{-z}}$$

dengan p_k adalah bilangan prima ke$-k$ dan $\Re(z) > 1$ sebagaimana pada [6], [7], [8], [9], dan [10].

Melalui tulisan ini, akan dideskripsikan cara menentukan nilai eksak dari suatu deret tak hingga dalam bentuk teorema dan buktinya. Teknik tersebut pada dasarnya telah dijelaskan dalam Marsden dkk [11] dan pada pembuktiannya digunakan persegi. Tulisan ini akan memberikan teknik pembuktikan yang berbeda dengan terlebih dahulu memaparkan lema dan teorema yang menunjang. Proses pembuktian di tulisan ini menggunakan lingkaran. Dengan kata lain, melalui tulisan ini, diberikan bukti lain dari aturan tersebut. Perbedaan bukti menggunakan lingkaran dan persegi terletak pada proses estimasi, yaitu pada penggunaan Teorema 8. Dengan menggunakan lingkaran, diberikan proses estimasi yang berbeda. Pada praktiknya secara umum, penggunaan lingkaran juga lebih memudahkan dalam menentukan *modulus* atau nilai mutlak dalam proses estimasi nilai integral. Lebih lanjut, hasil yang diperoleh kemudian digunakan untuk menentukan nilai eksak dari fungsi *Zeta-Riemann* di titik berupa bilangan genap positif.

Berikut ini dipaparkan mengenai definisi yang digunakan dan beberapa teorema serta lema yang digunakan dalam penelitian ini.

Definisi 1 [12] *Misalkan f adalah fungsi pada bidang kompleks dengan ekspansi deret Laurent*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \,(z - z_0)^n.$$

Residu dari f di z_0 didefinisikan sebagai koefisien dari $\frac{1}{z-z_0}$, yaitu a_{-1} dan ditulis dengan $Res_{z_0} f$.

Sebelum melangkah lebih lanjut, kita mengulas kembali secara singkat tentang *winding number*. *Winding number* dari suatu kurva γ terhadap titik asal, dinotasikan $W(\gamma, 0)$ adalah banyaknya putaran keseluruhan kurva γ mengelilingi titik asal [13]. Kita perluas *winding number* dari suatu kurva γ terhadap titik α sebagai banyaknya keseluruhan putaran dari kurva tersebut mengelilingi α. Dalam [14], ditunjukkan bahwa *winding number* dapat dinyatakan dalam bentuk integral

$$W(\gamma, \alpha) = \oint_\gamma \frac{dz}{z - \alpha}.$$

Dengan definisi-definisi tersebut, kita peroleh dua teorema berikut ini.

Teorema 2 (Rumus Residu Lokal) [14] *Misalkan z_0 adalah singularitas yang terasing dari f dan misalkan C_R adalah lingkaran berpusat di z_0 berjari-jari $R > 0$ dan berorientasi berlawanan arah jarum jam sedemikian sehingga f analitik pada C_R dan interiornya, kecuali mungkin di z_0. Maka,*

$$\oint_{C_R} f(\zeta)d\zeta = 2\pi i a_{-1}$$

Selanjutnya, dengan teorema Residu lokal tersebut, diperoleh rumus residu berikut yang dapat dipandang sebagai perluasan dari rumus residu lokal pada Teorema 2.

Teorema 3 (Rumus Residu) [14] *Misalkan U adalah himpunan buka di $\mathbb{C}$ dan γ adalah rantai tertutup di U yang homologus ke* 0 *di U. Misalkan bahwa f analitik pada U kecuali berhingga banyaknya titik $z_1, z_2, \dots, z_n$. Misalkan $m_i = W(\gamma, z_i)$. Maka*

$$\oint_{\gamma} f = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} m_i \cdot Res_{z_k} f$$

Untuk keperluan teknis agar memberi kemudahan dalam melakukan perhitungan, kita turunkan akibat berikut.

Akibat 4 *Misalkan f analitik pada cakram tutup D (dengan batas berupa lingkaran C_R dengan orientasi positif) kecuali mungkin di berhingga banyaknya titik-titik $z_1, \dots, z_n$ yang tidak terletak di C_R. Maka,*

$$\oint_{C_R} f = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res_{z_k} f.$$

Bukti. Karena C_R adalah lingkaran dengan $z_1, \dots, z_n$ terletak di dalam interiornya, maka *winding number* dari C_R terhadap masing-masing titik tersebut adalah 1. Dari sini, dengan teorema 3, kita peroleh bahwa

$$\oint_{C_R} f = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} m_i \cdot \mathrm{Res}_{z_k} f = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}_{z_k} f$$

yang melengkapi bukti Akibat 4 ■

Akibat tersebut mengatakan bahwa integral suatu fungsi analitik pada suatu lingkaran adalah kelipatan $2\pi i$ dari jumlah residu-residunya di dalam lingkaran tersebut. Teorema berikut memberikan aturan mengenai cara menentukan residu dari perkalian antara suatu fungsi meromorfik f dan fungsi $z \mapsto (z - z_0)^m$ dengan z_0 adalah *pole* dari fungsi f dan m adalah derajat dari $pole$ f di z_0.

Teorema 5 *Misalkan $f(z)$ mempunyai pole berderajat m di z_0. Maka,*

$$Res_{z_0} f = \frac{1}{(m-1)!} \cdot \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z - z_0)^m f(z)$$

Bukti. Karena $f(z)$ mempunyai *pole* berderajat m di z_0, maka dapat ditulis bahwa

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z - z_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots$$

dengan deret tersebut merupakan deret konvergen. Kalikan kedua ruas dengan $(z - z_0)^m$, diperoleh

$$(z - z_0)^m f(z) = a_{-m} + a_{-m+1}(z - z_0) + \cdots + a_{-1}(z - z_0)^{m-1} + \cdots \quad (1)$$

Perhatikan bahwa ruas kanan pada Persamaan (1) merupakan deret yang konvergen. Sehingga, pemetaan $z \mapsto (z - z_0)^m f(z)$ merupakan fungsi analitik di z_0. Akibatnya, dengan mengunakan rumus ekspansi deret Taylor untuk $(z - z_0)^m f(z)$, diperoleh bahwa jika b_n adalah koefisien dari $(z - z_0)^n$ pada suku ke$-n$ dari ekpansi deret Taylor dari $(z - z_0)^m f(z)$, maka

$$b_n = \frac{1}{n!} \cdot \frac{d^n}{dz^n}\left((z - z_0)^m f(z)\right)|_{z=z_0}.$$

Oleh karena itu, dari Persamaan (1) diperoleh bahwa

$$\begin{aligned} a_{-1} = b_{m-1} &= \frac{1}{(m-1)!} \cdot \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left((z - z_0)^m f(z)\right)|_{z=z_0} \\ &= \frac{1}{(m-1)!} \cdot \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}(z - z_0)^m f(z). \end{aligned}$$

Ini membuktikan Teorema 5 ■

2 Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian berupa kajian literatur. Peneliti mengumpulkan sumber-sumber ilmiah baik berupa artikel ilmiah maupun buku-buku yang kemudian dianalisis untuk menjawab tujuan penelitian. Defnisi-definisi yang digunakan berasal dari sumber-sumber ilmiah maupun dari buku. Sedangkan, beberapa teorema, lemma, akibat dan bukti diambil dari sumber-sumber artikel.

3 Hasil

Hasil-hasil pada pendahuluan akan digunakan untuk membuktikan hasil utama yang disajikan pada bagian ini. Hasil utama akan disajikan pada teorema 8,9 dan akibat 10. Untuk tujuan tersebut, kita terlebih dahulu akan menyajikan dan membuktikan dua lema berikut ini.

Lema 6 *Misalkan $f(z)$ adalah fungsi meromorfik dan misalkan $G(z)$ adalah fungsi meromorfik dengan semua pole-nya adalah sederhana di $z \in \mathbb{Z}$, yaitu semua pole-nya berderajat 1, dan asumsikan juga bahwa bahwa semua residunya adalah 1. Maka, residu dari $G(z)f(z)$ adalah $f(n)$ di setiap bilangan bulat n yang bukan merupakan pole dari f.*

Bukti. Misalkan $z_0 = n \in \mathbb{Z}$ adalah *pole* sederhana dari $G(z)$ dengan residu 1 yang bukan merupakan *pole* dari f. Tuliskan $G(z)$ dalam bentuk ekspansi deret Laurent di z_0 sebagai berikut.

$$G(z) = \frac{1}{z-z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots \quad (2)$$

Kemudian, karena f meromorfik dengan z_0 bukan merupakan *pole* dari f, maka f analitik di z_0 dan dapat ditulis

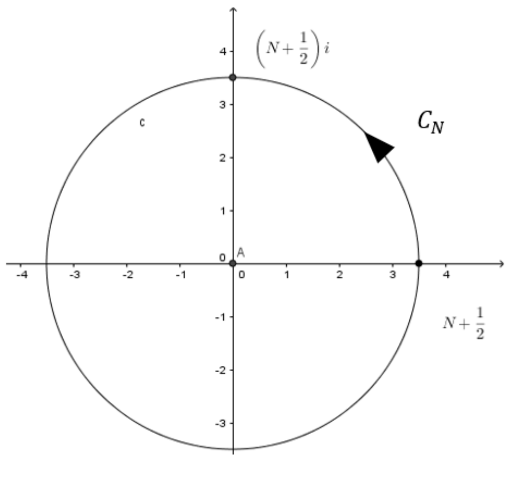
$$f(z) = b_0 + b_1(z - z_0) + \cdots \quad (3)$$

dengan $b_0 = f(z_0)$. Kalikan Persamaan (2) dan (3) pada masing-masing ruas maka akan diperoleh

$$G(z)f(z) = \frac{b_0}{z - z_0} + a_0b_0 + b_1 + H(z)$$

dengan $H(z)$ adalah fungsi analitik di z_0. Oleh karena itu, dari persamaan terakhir, diperoleh bahwa residu dari $G(z)f(z)$ di $z_0 = n$ adalah $b_0 = f(z_0) = f(n)$. Jadi, residu dari $G(z)f(z)$ adalah $f(n)$ di setiap bilangan bulat n yang bukan merupakan *pole* dari f ■

Pole akan digunakan secara berulang pada pembahasan berikutnya. Untuk alasan kemudahan, jika f adalah fungsi pada U, didefinisikan $\boldsymbol{P}(f(z))$ sebagai himpunan semua pole dari $f(z)$. Selain itu, untuk U kontur (tutup) pada $\mathbb{C}$ dinotasikan $Int\ (U)$ sebagai interior dari U.



Gambar 1. Lingkaran C_N

Akibat 7 *Misalkan $N \in \mathbb{N}$ dan f adalah fungsi dengan berhingga banyaknya pole. Misalkan pula C_N adalah lingkaran yang berpusat di titik asal dengan jari-jari $N + \frac{1}{2}$ sedemikian sehingga semua pole dari f terletak pada interior C_N. Selanjutnya, tinjau fungsi $G(z)$ sebagaimana dimaksud pada Lema 6. Maka,*

$$\oint_{C_N} Gf = 2\,\pi i \sum_{z_k \in \boldsymbol{P}(f)} \operatorname{Res}_{z_k} Gf + 2\,\pi i \sum_{\substack{k=-N \\ f(k)\in\mathbb{C}}}^{N} f(k).$$

**Catatan: C_N diperlihatkan pada Gambar 1.*

Bukti. Misalkan f adalah fungsi dengan berhingga banyaknya *pole*. Selanjutnya, tinjau fungsi $G(z)f(z)$ pada lingkaran C_N. Dengan Akibat 4, diperoleh

$$\oint_{C_N} Gf = 2\pi i \sum_{z_k \in \boldsymbol{P}(Gf)\cap\, Int(C_N)} \operatorname{Res}_{z_k} Gf.$$

Perhatikan bahwa jika z_k pole dari Gf di interior C_N, maka terdapat dua kemungkinan dari z_k, yaitu z_k merupakan *pole* dari f atau bukan merupakan *pole* dari f. Oleh karena itu,

$$\oint_{C_N} Gf = 2\,\pi i \sum_{z_k \in \boldsymbol{P}(Gf)\cap\, Int(C_N)\cap \boldsymbol{P}(f)} \operatorname{Res}_{z_k} Gf + 2\,\pi i \sum_{z_k \in \boldsymbol{P}(Gf)\cap\, Int(C_N)\setminus \boldsymbol{P}(f)} \operatorname{Res}_{z_k} Gf.$$

Misalkan $z_k \in \boldsymbol{P}(Gf) \setminus \boldsymbol{P}(f)$. Maka, $z_k \in \boldsymbol{P}(Gf)$ dan $z_k \notin \boldsymbol{P}(f)$. Berdasarkan sifat G, $z_k \in \mathbb{Z}$. Kemudian, dengan Lema 6 diperoleh bahwa $\operatorname{Res}_{z_k} f = f(z_k)$ untuk tiap z_k yang berada di $\boldsymbol{P}(Gf) \setminus \boldsymbol{P}(f)$ dengan z_k adalah bilangan bulat. Oleh karena itu,

$$\oint_{C_N} Gf = 2\,\pi i \sum_{z_k \in \boldsymbol{P}(Gf)\cap\, Int(C_N)\cap \boldsymbol{P}(f)} \operatorname{Res}_{z_k} Gf + 2\,\pi i \sum_{\substack{k=-N \\ f(k)\in\mathbb{C}}}^{N} f(k).$$

Selanjutnya, jika $z_k \in \boldsymbol{P}(f)$ dan merupakan bilangan bulat, maka dengan sifat G, diperoleh bahwa $z_k \in \boldsymbol{P}(Gf)$. Di lain pihak, jika $z_k \in \boldsymbol{P}(f)$ dan bukan bilangan bulat, maka jelas bahwa $z_k \in \boldsymbol{P}(Gf)$. Oleh karena itu, $\boldsymbol{P}(f) \subseteq \boldsymbol{P}(Gf)$ dan $\boldsymbol{P}(Gf) \cap \boldsymbol{P}(f) = \boldsymbol{P}(f)$ yang berakibat bahwa

$$\oint_{C_N} Gf = 2\,\pi i \sum_{z_k \in \boldsymbol{P}(f)\cap\, Int(C_N)} \operatorname{Res}_{z_k} Gf + 2\,\pi i \sum_{\substack{k=-N \\ f(k)\in\mathbb{C}}}^{N} f(k).$$

Karena semua pole dari f berada pada interior C_N, maka $P(f) \subset C_N$ dan

$$\oint_{C_N} Gf = 2\,\pi i \sum_{z_k \in \boldsymbol{P}(f)} \operatorname{Res}_{z_k} Gf + 2\,\pi i \sum_{\substack{k=-N \\ f(k)\in\mathbb{C}}}^{N} f(k)$$

yang melengkapi bukti Akibat 7 ■

Oleh karena itu, cukup menentukan fungsi $G(z)$ yang memenuhi sifat bahwa $G(z)$ adalah fungsi meromorfik dengan semua *pole* nya adalah sederhana di $z \in \mathbb{Z}$ dan semua residunya adalah 1. Perhatikan bahwa fungsi yang memenuhinya syarat-syarat tersebut adalah

$$G(z) = \pi \cot(\pi z) = \frac{\pi \cos \pi z}{\sin \pi z}.$$

Melalui fungsi tersebut, diperoleh rumus untuk menentukan nilai eksak dari suatu deret tak hingga. Tetapi, suku-suku pada deret tersebut harus memenuhi syarat-syarat tertentu. Sebelum sampai pada teorema terkait rumus tersebut, terlebih dahulu akan dibuktikan sifat yang menjadi salah satu hasil utama di tulisan ini sebagai berikut.

Teorema 8 *Misalkan C_N adalah lingkaran yang berpusat di titik asal dan berjari-jari $N+\frac{1}{2}$. Maka, ada $M>0$ sedemikian sehingga* $\lim_{N\to\infty}\sup_{z\in C_N}|f(z)|\le M$ dengan $f(z)=\pi\cot\pi z$.

Bukti. Perhatikan bahwa $C_N=\left\{\left(N+\frac{1}{2}\right)e^{\pi i\theta}: 0\le\theta\le 2\pi\right\}$. Perhatikan bahwa secara umum,

$$|\cot\pi z|=\left|\frac{e^{\pi iz}+e^{-\pi iz}}{e^{\pi iz}-e^{-\pi iz}}\right|=\left|1+\frac{2e^{-\pi iz}}{e^{\pi iz}-e^{-\pi iz}}\right|$$

$$=\left|1+\frac{2}{e^{2\pi iz}-1}\right|=\left|1+\frac{2}{e^{2\pi i\left(N+\frac{1}{2}\right)e^{\pi i\theta}}-1}\right|$$

Misalkan $z\in C_N$. Dari bentuk tersebut, kita dapat mengambil $N\to\infty$, tetapi akan terjadi sedikit kendala pada nilai dari $\left|e^{2\pi i\left(N+\frac{1}{2}\right)e^{\pi i\theta}}\right|$. Untuk itu, kita akan membaginya menjadi 3 kasus sebagai berikut.

Kasus 1

Asumsikan bahwa $0<\left|e^{2\pi i\left(N+\frac{1}{2}\right)e^{i\theta}}\right|<1$. Maka, dengan mengambil $N\to\infty$, kita peroleh $e^{2\pi i\left(N+\frac{1}{2}\right)e^{i\theta}}\to 0$ yang berakibat bahwa

$$\lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{2}{e^{2\pi i\left(N+\frac{1}{2}\right)e^{i\theta}}-1}\right)=1+\frac{2}{0-1}=-1$$

Ini berakibat bahwa

$$\lim_{N\to\infty}\left|1+\frac{2}{e^{2\pi i\left(N+\frac{1}{2}\right)e^{i\theta}}-1}\right|=1$$

Kasus 2

Asumsikan bahwa $\left|e^{2\pi i\left(N+\frac{1}{2}\right)e^{i\theta}}\right|>1$. Maka,

$$\lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{2}{e^{2\pi i\left(N+\frac{1}{2}\right)e^{i\theta}}-1}\right)=1+0=1$$

dan

$$\lim_{N\to\infty}\left|1+\frac{2}{e^{2\pi i\left(N+\frac{1}{2}\right)e^{i\theta}}-1}\right|=1$$

Kasus 3

Asumsikan bahwa $\left|e^{2\pi i\left(N+\frac{1}{2}\right)e^{i\theta}}\right| = 1$. Maka, $\left|e^{2\pi i e^{i\theta}}\right| = 1$. Tulis $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. Dari sini,

$$1 = \left|e^{2\pi i e^{i\theta}}\right| = \left|e^{2\pi i(\cos\theta + i\sin\theta)}\right| = e^{-2\pi\sin\theta}$$

Akibatnya, $\sin\theta = 0$ dan $\theta = 0, \pi, 2\pi$. Kemudian, dari ketiga kemungkinan tersebut, $e^{2\pi i\left(N+\frac{1}{2}\right)e^{i\theta}}$ akan bernilai $e^{2\pi i\left(N+\frac{1}{2}\right)}$ atau $e^{-2\pi i\left(N+\frac{1}{2}\right)}$. Karena $e^{2\pi i\left(N+\frac{1}{2}\right)} = -e^{2\pi i}e^{\pi i} = -1$, dan $e^{-2\pi i\left(N+\frac{1}{2}\right)} = e^{-2\pi i}e^{-\pi i} = -1$, maka $e^{2\pi i\left(N+\frac{1}{2}\right)e^{i\theta}} = -1$. Kemudian, untuk setiap bilangan asli N,

$$\left|1 + \frac{2}{e^{2\pi i\left(N+\frac{1}{2}\right)e^{\pi i\theta}} - 1}\right| = 0$$

Dari ketiga kasus tersebut, diperoleh bahwa jika $f(z) = \pi\cot\pi z$, maka barisan $\left(\sup_{z\in C_N}|f(z)|\right)$ konvergen dan $\lim_{N\to\infty}\sup_{z\in C_N}|f(z)| \leq 1$. Oleh karena itu, terdapat bilangan asli $N(1) > 1$ sedemikian sehingga untuk setiap bilangan asli $N \geq N(1) > 1$, berlaku

$$\left|\sup_{z\in C_N}|f(z)| - 1\right| < 1$$

yang berakibat bahwa

$$0 \leq \sup_{z\in C_N}|f(z)| < 2, N \geq N(1).$$

Dari sini, untuk setiap $N \geq N(1)$, berlaku $|f(z)| < 2$ untuk $z \in C_N$. Dengan kata lain,

$$0 \leq \sup_{N\geq N(1)}\sup_{z\in C_N}|f(z)| < 2.$$

Karena f analitik pada C_N untuk setiap bilangan asli N, maka f terbatas pada lingkaran tersebut dan terdapat $M_N > 0$ sedemikian sehingga $|f(z)| \leq M_N$ untuk setiap $z \in C_N$. Misalkan

$$M \coloneqq \max_{1\leq N<N(1)} M_N.$$

Maka, $|f(z)| \leq M$ untuk setiap $z \in C_N$ dan $1 \leq N < N(1)$. Oleh karena itu, $|f(z)| \leq \max\{2, M\}$ untuk setiap $z \in C_N, N \in \mathbb{N}$. Perhatikan bahwa berdasarkan kontruksi tersebut, M tidak bergantung pada N. Jadi, $\lim_{N\to\infty}\sup_{z\in C_N} f(z) \leq M < \infty$ yang membuktikan Teorema 8 ■

Berikut ini adalah implikasi dari Teorema 8 yang berupa teorema-teorema terkait dengan rumus yang sangat berguna dalam menentukan nilai eksak dari suatu deret tak hingga dengan syarat-syarat tertentu.

Teorema 9 *Misalkan* $f(z)$ *analitik kecuali untuk berhingga banyaknya pole. Misalkan pula bahwa terdapat bilangan asli* $k > 1$ *dan konstanta* $A > 0$ *sedemikian sehingga* $|f(z)| \leq \frac{A}{|z|^k}$ *pada* C_N *untuk setiap* $N \in \mathbb{N}$. *Maka,*

$$\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z} \\ f(n)\in\mathbb{C}}} f(n) = -\sum \{Res_{z_k}\, \pi \cot \pi z\, f(z) \colon z_k \text{ pole dari } f\}.$$

Bukti. Misalkan N besar sedemikian sehingga semua pole dari f ada di interior C_N. Berdasarkan Akibat 7, diperoleh

$$\oint_{C_N} \pi(\cot \pi z) f(z) dz = 2\,\pi i \sum_{z_k \in \boldsymbol{P}(f)} \mathrm{Res}_{z_k}\, \pi(\cot \pi z) f(z) + 2\,\pi i \sum_{\substack{k=-N \\ f(k)\in\mathbb{C}}}^{N} f(k).$$

Akibatnya,

$$\left| 2\,\pi i \sum_{z_k \in \boldsymbol{P}(f)} \mathrm{Res}_{z_k}\, \pi(\cot \pi z) f(z) + 2\,\pi i \sum_{\substack{k=-N \\ f(k)\in\mathbb{C}}}^{N} f(k) \right| \leq \oint_{C_N} \pi(\cot \pi z) f(z) dz.$$

Kemudian, dengan sifat dasar integral kompleks atas kontur tertutup, maka

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_N} \pi \cot \pi z\, f(z) dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{\sup_{z\in C_N} |\pi \cot \pi z\,|}{\left(N + \frac{1}{2}\right)^k} 2\pi A \left(N + \frac{1}{2}\right) = \frac{A \sup_{z\in C_N} |\pi \cot \pi z\,|}{\left(N + \frac{1}{2}\right)^{k-1}}.$$

Catat bahwa A tidak bergantung pada N. Kemudian, dengan mengambil $N \to \infty$ pada kedua ruas di ketaksamaan tersebut, maka dengan Teorema 8 dan fakta bahwa $k > 1$,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_N} \pi \cot \pi z\, f(z) dz = 0.$$

Dari sini, diperoleh bahwa

$$\lim_{N\to\infty} \left| 2\,\pi i \sum_{z_k \in \boldsymbol{P}(f)} \mathrm{Res}_{z_k}\, \pi(\cot \pi z) f(z) + 2\,\pi i \sum_{\substack{k=-N \\ f(k)\in\mathbb{C}}}^{N} f(k) \right| = \left| \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_N} \pi \cot \pi z\, f(z) dz \right| = 0$$

yang berakibat

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{\substack{k=-N \\ f(k)\in\mathbb{C}}}^{N} f(k) = -\sum_{z_k \in \boldsymbol{P}(f)} \mathrm{Res}_{z_k}\, \pi(\cot \pi z) f(z)$$

dan

$$\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z} \\ f(k)\in\mathbb{C}}} f(k) = -\sum \left\{Res_{z_k}\, \pi \cot \pi z\, f(z) \colon z_k \text{ pole dari } f\right\}$$

yang membuktikan Teorema 9 ■

Jika f memiliki berhingga banyaknya *pole* dan bukan merupakan bilangan bulat, diperoleh akibat berikut.

Akibat 10 *Misalkan* $f(z)$ *analitik kecuali untuk berhingga banyaknya pole dan bukan merupakan bilangan bulat. Misalkan pula bahwa terdapat bilangan asli* $k > 1$ *dan konstanta* $M > 0$ *sedemikian sehingga* $|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^k}$ *pada* C_N *untuk setiap* $N \in \mathbb{N}$. *Maka,*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) \; = -\sum \{Res_{z_k}\, \pi \cot \pi z\, f(z) \colon z_k \; pole \; dari \; f\}.$$

Sebagai contoh dari penerapan Teorema 7, tinjau f dengan $f(z) = \frac{e^{-z^2}\cos z}{z^2+1}$ dan juga tinjau bentuk deret berikut.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2}\cos n}{n^2+1}.$$

Dapat dilihat bahwa $|f(z)| \leq 1/z^2$ pada $\mathbb{C}$. Kemudian, *pole* dari f adalah $\pm i$. Karena

$$f(z) = \frac{e^{-z^2}\cos z}{z^2+1} = \frac{e^{-z^2}\cos z}{(z-i)(z+i)},$$

maka

$$\pi \cot \pi z\, f(z) = \frac{e^{-z^2}\pi \cot \pi z \cos z}{(z-i)(z+i)}.$$

Dari sini,

$$Res_{z=i}\pi \cot \pi z\, f(z) = \frac{e^{-i^2}\pi \cot(\pi i)\cos i}{2i} = \frac{\pi}{4e}\frac{e^{-\pi}+e^{\pi}}{e^{-\pi}-e^{\pi}}(e^{-1}+e),$$

dan

$$Res_{z=-i}\pi \cot \pi z\, f(z) = \frac{e^{-(-i)^2}\pi \cot(-\pi i)\cos(-i)}{-2i} = \frac{\pi e}{4}\frac{e^{-\pi}+e^{\pi}}{e^{-\pi}-e^{\pi}}(e^{-1}+e),$$

sehingga dengan Teorema 9 diperoleh bahwa

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2}\cos n}{n^2+1} &= \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-n^2}\cos n}{n^2+1} - \frac{1}{2}\cdot 1 \\
&= \frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{e}+e\right)\frac{e^{-\pi}+e^{\pi}}{e^{-\pi}-e^{\pi}}(e^{-1}+e)\right) - \frac{1}{2} \\
&= \frac{\pi}{8}\left(\frac{1}{e}+e\right)^2 \frac{e^{\pi}+e^{\,-\pi}}{e^{\pi}-e^{-\pi}} - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Kemudian, dengan Teorema 9, dilakukan perhitungan mengenai nilai eksak dari fungsi *Zeta-Riemann* di titik berupa bilangan genap positif. Hasil tersebut dinyatakan dalam akibat berikut.

Akibat 11 (Nilai Eksak Fungsi Zeta-Riemann di titik genap) *Misalkan* $\zeta: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *merupakan fungsi zeta-riemann, maka*

$$\zeta(2k) = \frac{(-1)^{k+1}}{2} \cdot \frac{(2\pi)^{2k} B_{2k}}{(2k)!}$$

untuk setiap bilangan asli k.

Bukti. Berdasarkan definisi,

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}.$$

Pandang fungsi $f: z \mapsto 1/z^{2k}$. Maka, $|f(z)| \leq 1/z^{2k}$ pada C_N untuk setiap $N \in \mathbb{N}$. Selain itu, satu-satunya pole dari $f(z)$ adalah 0. Dari sini, f memenuhi asumsi pada Teorema 9. Oleh karena itu, cukup ditentukan nilai residu dari $(\pi \cot \pi z) f(z) = \frac{\pi \cot \pi z}{z^{2k}}$ di 0. Perhatikan bahwa ekpansi deret Laurent dari $z \mapsto \pi \cot \pi z$ di 0 adalah

$$\cot \pi z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} \pi^{2n-1} z^{2n-1}$$

yang berakibat bahwa

$$\frac{\pi \cot \pi z}{z^{2k}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} \pi^{2n} z^{(2n-1)-2k}.$$

Oleh karena itu, residu dari $\frac{\pi \cot \pi z}{z^{2k}}$ di 0 adalah $(-1)^k \frac{2^{2k} B_{2k}}{(2k)!} \pi^{2k}$. Jadi, untuk setiap bilangan asli k,

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty, n\neq 0}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \left(-\frac{1}{2}\right) (-1)^k \frac{2^{2k} B_{2k}}{(2k)!} \pi^{2k} = \frac{(-1)^{k+1}}{2} \cdot \frac{(2\pi)^{2k} B_{2k}}{(2k)!}$$

dengan B_k adalah bilangan Bernoulli ke$-k$ ∎

Sebagai tambahan, bilangan Bernoulli secara eksplisit dituliskan sebagai

$$B_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{2^{n+1}-1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2^k} \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{k-1}{j} (j+1)^n$$

sebagaimana pada [15]. Salah satu implikasi penting dari akibat tersebut adalah bahwa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

yang memberikan solusi atas masalah Bessel.

4 Kesimpulan

Dari pemaparan sebelumnya, diperoleh cara bagaimana menentukan nilai eksak dari suatu deret tak hingga $\sum_{n\in\mathbb{Z}:f(n)\in\mathbb{C}} f(n)$ dengan catatan bahwa f analitik kecuali pada berhingga banyaknya *pole* dan terdapat bilangan asli $k > 1$ dan konstanta $A > 0$ sedemikian sehingga $|f(z)| \leq \frac{A}{|z|^k}$ pada C_N untuk setiap $N \in \mathbb{N}$. Selain itu, diperoleh juga terkait nilai eksak dari fungsi *Zeta-Riemann* di titik berupa bilangan genap positif dengan menggunakan aturan/teknik yang dipaparkan.

Aturan/teknik tersebut masih belum dinyatakan dalam pernyataan ekuivalen. Oleh karena itu, menarik depannya untuk diselidiki syarat perlu dan cukup agar pernyataan tersebut menjadi pernyataan ekuivalen.

5 Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak/Ibu reviewer yang telah memberikan komentar dan saran yang sangat bermanfaat agar makalah ini menjadi lebih baik.

6 Daftar Pustaka

[1] J. Choi, “Evaluation of certain alternating series,” *Honam Math. J.*, vol. 36, no. 2, pp. 263–273, 2014.

[2] I. Maulidi, V. Apriliani, and M. Syazali, “Fungsi Zeta Riemann Genap Menggunakan Bilangan Bernoulli,” *Desimal J. Mat.*, vol. 2, no. 1, pp. 43–47, 2019, doi: 10.24042/djm.v2i1.3589.

[3] A. Dil, K. N. Boyadzhie, and I. A. Aliev, “No Title,” *Lith. Math. J.*, vol. 60, no. 1, pp. 9–24, 2020.

[4] E. C. Titchmarsh, D. R. Heath-Brown, and E. C. T. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta-function*. Oxford University Press, 1986.

[5] J.-M. Coranson-Beaudu and L. Lamentin, “Proof of the Riemann hypothesis,” *African J. Math. Comput. Sci. Res.*, 2020.

[6] V. Moros, “The Zeta Function and the Riemann Hypothesis,” *2014*.

[7] P. Moree, I. Petrykiewicz, and A. Sedunova, “A computational history of prime numbers and Riemann zeros,” *arXiv Prepr. arXiv1810.05244*, 2018.

[8] M. Wolf, “Will a physicist prove the Riemann hypothesis?,” *Reports Prog. Phys.*, vol. 83, no. 3, 2020.

[9] A. Le Mehaute, P. Riot, and D. Tayurskii, “From Riemann Hypothesis Approach via the Theory of Category to Modern Monetary Theory,” *Hyperion Int. J. Econophysics New Econ.*, vol. 8, no. 2, pp. 263–292, 2015.

[10] A. Le Mehaute and P. Riot, “A Trail Between Riemann Hypothesis and the Founts of Currency,” *Hyperion Int. J. Econophysics New Econ.*, vol. 9, no. 1, 2016.

[11] J. E. Marsden and M. J. Hoffman, *Basic complex analysis*, Third. New York: W. H. Freeman and Company, 1999.

[12] R. Churchull and J. Brown, *Complex variables and applications eighth edition*. McGraw Hill Book Company, 2014.

[13] G. N. Kumar and M. Bangi, “An extension to winding number and point-in-polygon algorithm,” *IFAC-PapersOnLine*, vol. 51, no. 1, pp. 548–553, 2018.

[14] S. Lang, *Complex Analysis*. Springer Science & Business Media, 2013.

[15] G. Rzadkowski, “A Short Proof of the Explicit Formula for Bernoulli Numbers,” *Am. Math. Mon.*, vol. 111, no. 5, pp. 432–434, 2004.