Limits: Journal of Mathematics and Its Applications
E-ISSN: 2579-8936
P-ISSN: 1829-605X
Vol. 19, No. 1, Mei 2022, 117-122
DOI: http://dx.doi.org/10.12962/limits.v19i1.12327

# Syarat Perlu atau Cukup F-bounded di dalam Ruang Metrik-$\alpha$ Fuzzy

**Zicky Lukman [1] *, Mahmud Yunus [2]**
[1,2]Departemen Matematika ITS Surabaya Indonesia
e-mail: [1]lukmanzicky@gmail.com, [2]yunusm@matematika.its.ac.id

*Diajukan: 12 Februari 2022, Diperbaiki: 14 Maret 2022, Diterima: 25 April 2022*

**Abstrak**

Metrik memiliki peran penting dalam matematika, baik dalam analisis maupun aplikasi. Salah satu konsep baru ruang metrik adalah ruang metrik-$\alpha$ fuzzy. Ruang metrik ini merupakan perluasan dari ruang metrik fuzzy dengan menambahkan generator $\alpha$. Dalam penelitian ini, dibahas karakterisasi F-bounded dalam ruang metrik-$\alpha$ fuzzy. Sifat F-bounded diperoleh dari himpunan bagian kompak dari himpunan semesta tertentu. Karakteristik ini telah dibahas oleh Changqing dan Kedian dalam ruang metrik fuzzy Hausdorff. Dalam penelitian ini, diperoleh syarat perlu atau cukup agar ruang metrik fuzzy memenuhi sifat-sifat F-bounded.

**Kata Kunci**: ruang metrik-$\alpha$ fuzzy, generator $\alpha$, F-bounded

***Abstract***

*Metrics have an important role in mathematics, both in analysis as well as applications. One of the new concepts of metric space is fuzzy $\alpha$-metric space. This metric space is an expansion of the fuzzy metric space by adding $\alpha$ generator. In this paper, we discuss characterization of F-bounded in the fuzzy $\alpha$-metric space. The property of F-bounded is obtained from the compact subset of a given universe set. This characteristic has been discussed by Changqing and Kedian in Hausdorff fuzzy metric spaces. In this paper, the necessary and sufficient conditions are obtained so that the fuzzy $\alpha$-metric space satisfies the properties of F-bounded.*

***Keywords***: *fuzzy $\alpha$-metric space, $\alpha$ generator, F-bounded*

## 1 Pendahuluan

Salah satu cabang dasar matematika yang berkembang adalah teori himpunan. Pada cabang ini, L.A. Zadeh merepresentasikan himpunan fuzzy[10]. Dengan konsep baru ini, muncullah konsep baru yang mencakup himpunan fuzzy, seperti kalkulus fuzzy, aljabar fuzzy, kontrol fuzzy, dan lain-lain[11].

Himpunan fuzzy juga memiliki peran dalam perkembangan matematika analisis, khususnya dalam metrik. Kramosil dan Michalek menggabungkan himpunan fuzzy dan ruang metrik sehingga muncul ruang metrik fuzzy-KM[5]. George dan Veeramani mengembangkan metrik ini dengan mendefinisikan ulang, sehingga muncul dalam ruang yang sama tetapi dengan nama yang berbeda, yaitu ruang metrik fuzzy-GV[3]. Hingga saat ini ruang dan karakternya terus digunakan oleh peneliti lain, baik untuk aplikasinya maupun untuk dikembangkan kembali. Pada tahun 2007, dalam tesis doktornya, Samuel Gomez merepresentasikan aplikasi ruang metrik ini, seperti *new vector median filter*, *impulsive noise filter, new adaptive vector filter*, dan lain-lain[4].

Setelah bertahun-tahun, ruang metrik fuzzy telah digunakan oleh peneliti lain untuk mempelajari lebih lanjut dan memodifikasi ruang metrik ini. Pada tahun 2017, Changqing dan Kedian membangun ruang metrik fuzzy Hausdorff yang memberikan beberapa sifat topologi[2]. Mereka juga menjelaskan bahwa ruang ini diselidiki untuk beberapa sifat topologi, seperti F-bounded, separabilitas, dan *connectedness*. Di tahun berikutnya, dalam skripsinya, Zicky Lukman menjelaskan tentang teorema titik tetap pada ruang metrik fuzzy[8]. Pada tahun yang sama, Cuneyt dan Sehla mendefinisikan ruang metrik fuzzy baru, yaitu ruang metrik-$\alpha$ fuzzy[1]. Mereka menyatakan bahwa ruang metrik ini dihasilkan oleh generator $\alpha$.

Pada penelitian ini, dibahas konstruksi ruang metrik-$\alpha$ fuzzy dan beberapa hal yang terkait, seperti konvergensi, barisan Cauchy, dan kelengkapan. Selain itu, dianalisis salah satu karakteristik topologi, yaitu F-bounded.

## 2 Metode Penelitian

Pada bab ini, diuraikan mengenai beberapa pustaka yang diperlukan untuk penelitian ini dan teknik analisa data serta hal-hal lain yang terkait dengan metode penelitiannya.

### 2.1 Norm-t Kontinu

Diberikan suatu operasi biner  dengan : $[0,1] \times [0,1] \to [0,1]$. Operator  disebut norm-t kontinu jika untuk setiap $a, b, c, d \in [0,1]$ memenuhi sifat komutatif, asosiatif, identitas dan keterturutan.[7]

### 2.2 Ruang Metrik Fuzzy

Diberikan $X$ himpunan tak kosong dan  sebagai norm-t kontinu. Tiga tupel  disebut ruang metrik fuzzy jika $d_f$ sebagai himpunan fuzzy dari $X^2 \times (0, +\infty)$ dengan sebarang $x, y, z \in X$ serta $t, s > 0$ memenuhi syarat sebagai berikut[3,8]

FM1. $d_f(x, y, t) > 0$,

FM2. $d_f(x, y, t) = 1$ jika dan hanya jika $x = y$,

FM3. $d_f(x, y, t) = d_f(y, x, t)$,

FM4. $d_f(x, y, t) * d_f(y, z, s) \leq d_f(x, z, t + s)$,

FM5. $d_f(x, y, \cdot): (0, +\infty) \to [0,1]$ kontinu

### 2.3 Generator $\alpha$

Generator $\alpha$ merupakan suatu pemetaan injektif yang didefinisikan dengan

$$\alpha: R \to R_\alpha \subseteq R$$

dimana $x \mapsto \alpha(x)$[1,9].

**Contoh 1**[1] *Diberikan pemetaan* $\alpha$ *dengan*

$$\alpha(x) = \begin{cases} -x & \text{Jika } x \in [-1,1], \\ x & \text{untuk } x \text{ yang lain} \end{cases}$$

dan didefinisikan

$$x + \quad ^{\alpha} y = \begin{cases} -x - y & \text{Jika } x, y \in [-1,1], \\ x - y & \text{Jika } x \notin [-1,1] \text{ dan } y \in [-1,1], \\ -x + y & \text{Jika } x \in [-1,1] \text{ dan } y \notin [-1,1], \\ x + y & \text{Jika } x, y \notin [-1,1] \end{cases}$$

Ruang Metrik-$\alpha$ Fuzzy

Diberikan $X$ himpunan tak kosong dan  sebagai norm-t kontinu. Tiga tupel  disebut ruang metrik fuzzy jika $M^{\alpha}$ sebagai himpunan fuzzy dari $X^2 \times R_{\alpha}^{+}$ dengan sebarang $x, y, z \in X$ serta $t, s \in R_{\alpha}^{+}$ memenuhi syarat sebagai berikut [1]

1. $M^{\alpha}(x, y, t) > 0$,
2. $M^{\alpha}(x, y, t) = 1$ jika dan hanya jika $x = y$,
3. $M^{\alpha}(x, y, t) = M^{\alpha}(y, x, t)$,
4. $M^{\alpha}(x, y, t) * M^{\alpha}(y, z, s) \leq M^{\alpha}$,
5. $M^{\alpha}(x, y, \cdot): R_{\alpha}^{+ \to [0,1]}$ dikatakan kontinu-$\alpha$

**Contoh 2** *Diberikan suatu himpunan tak kosong X. Didefinisikan* $M^{\alpha}(x, y, t) = exp\left(\frac{-d(x,y)}{t}\right)$, *norm-t kontinu  dengan* $x * y = x \times y$ *dan* $t + \quad ^{\alpha} s = t + s$ *untuk* $x, y \in X$ *dan* $t, s \in R_{\alpha}^{+}$. *Pasangan  merupakan ruang metrik-α fuzzy.*

**Definisi 1**[1] *Diberikan suatu ruang metrik-α fuzzy . Barisan* $\{x_n\}$ *pada  konvergen ke* $x \in X$ *jika untuk setiap* $\varepsilon, 0 < \varepsilon < 1$ *dan* $t \in R_{\alpha}^{+}$, *terdapat* $n_0(\varepsilon) \in N$ *sehingga* $M^{\alpha}(x_n, x, t) > 1 - \varepsilon$ *untuk* $n \geq n_0(\varepsilon)$ *atau*

$$\lim_{n \to +\infty} M^{\alpha}(x_n, x, t) = 1$$

**Definisi 2**[1] *Diberikan suatu ruang metrik-α fuzzy . Barisan* $\{x_n\}$ *pada  disebut barisan Cauchy jika untuk setiap* $\varepsilon, 0 < \varepsilon < 1$ *dan* $t \in R_{\alpha}^{+}$ *terdapat* $n_0(\varepsilon) \in N$ *sehingga*

$$M^{\alpha}(x_n, x_m, t) > 1 - \varepsilon$$

**Definisi 3**[1] *Diberikan suatu ruang metrik-α fuzzy . Tiga tupel  disebut lengkap jika setiap barisan Cauchy di X konvergen.*

## 3 Diskusi dan Pembahasan

Pada bab ini, diuraikan beberapa hasil dari penelitian yang sudah dilakukan. Sebelum masuk pada pokok pembahasan, diuraikan dahulu definisi F-bounded di ruang metrik fuzzy

**Definisi 4**[3] *Diberikan suatu ruang metrik-α fuzzy . Himpunan $A$, yang merupakan himpunan bagian tak kosong dari $X$, bersifat F-bounded jika dan hanya jika untuk $x, y \in A$, terdapat $t > 0$ dan dan $r$ dengan $0 < r < 1$ sehingga*

$$M(x, y, t) > 1 - r$$

Jika diperhatikan, definisi di atas memiliki penjabaran yang ekuivalen dengan definisi konvergensi barisan pada Definisi 1. Dikatakan ekuivalen karena suku-suku dari barisan $\{x_n\}$ yang konvergen ke $x$ bisa dinyatakan sebagai himpunan $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ dan sebagai elemen-elemen dari subhimpunan $X$. Selain menunjukkan syarat untuk F-bounded seperti pada Definisi 4, George dan Veeramani juga menguraikan bahwa syarat lain agar memenuhi sifat tersebut adalah memiliki subhimpunan yang kompak[3].

Berdasarkan pernyataan di atas, dikonstruksikan suatu proposisi untuk F-bounded agar sesuai di ruang metrik-$\alpha$ sebagai berikut

**Proposisi 5** *Diberikan suatu ruang metrik-α fuzzy . Jika $P$, yang merupakan himpunan bagian tak kosong dari $X$, merupakan himpunan kompak, maka $P$ bersifat F-bounded.*

**Bukti:**

Jika ada koleksi himpunan $G = \{G_a\}$ yang merupakan kover terbuka dari $P$, maka setiap $p_i$ berada di himpunan $G_{a_i}$ pada $G$ untuk $i \in N$. Karena $P \subseteq aG_a$, berakibat $aG_a$ merupakan subkover berhingga dari $G$. Karena berlaku untuk sebarang $G$, berakibat himpunan berhingga $P$ kompak.

**Proposisi 6** *Diberikan suatu ruang metrik lengkap $(X, d)$ dan ruang metrik-α fuzzy yang dibangun dari $(X, d)$. Jika himpunan $P$, yang merupakan himpunan bagian tak kosong dari $X$, terbatas di $(X, d)$, maka $P$ F-bounded di .*

**Bukti:**

Karena himpunan $P$ terbatas di $(X, d)$, berakibat untuk $x, y \in P$ dan sebarang $r, t$ positif dipenuhi

$$\frac{d(x,y)}{t} < \frac{r}{t}$$

Jika kedua ruas dieksponensialkan dan dikalikan $exp\left(\frac{-d(x,y)}{t}\right) \times exp\left(\frac{-r}{t}\right)$, maka diperoleh

$$exp\left(\frac{-d(x,y)}{t}\right) > exp\left(\frac{-r}{t}\right)$$

Untuk sebarang $r$ positif,

$$\lim_{r \to 0^{+} exp\left(\frac{-d(x,y)}{t}\right) > 1} \quad 1 - r$$

atau

$$M^{\alpha}(x, y, t) > 1 - r$$

**Proposisi 7** *Diberikan suatu ruang metrik-α fuzzy dan $P$ sebagai himpunan bagian tak kosong dari $X$. Jika barisan $\{x_n\}$ di $P$ yang konvergen ke $x$ di mana $x$ juga berada di $P$, maka $P$ F-bounded di.*

**Bukti:**

Karena barisan $\{x_n\}$ konvergen, berdasarkan Definisi 2, bisa dituliskan dengan

$$M^{\alpha}(x_n, x, t) > 1 - \varepsilon$$

atau

$$x_n \in B^{\alpha}(x, \varepsilon, t)$$

dimana barisan ini berada di suatu bola terbuka dengan pusat $x$ dan jari-jari $\varepsilon$. Diketahui juga *range* dari $\varepsilon$ sama dengan variabel $r$ di ruang metrik-$\alpha$ fuzzy. Karena $B^{\alpha}(x, \varepsilon, t)$ bisa direpresentasikan sebagai himpunan $P$, berakibat $P$ akan terdiri dari semua suku-suku dari barisan $x_n$ dan nilai konvergensinya, yaitu $x$. Berdasarkan Proposisi 2 dimana keterbatasan tetap dipertahankan di ruang metrik-$\alpha$ fuzzy, maka himpunan $P$ *F-bounded*.

## 4 Simpulan

Dalam penelitian ini, diperoleh syarat perlu atau cukup untuk ruang metrik-α fuzzy agar memenuhi sifat F-bounded adalah memiliki subhimpunan tak kosong yang kompak atau mendapatkan suatu subhimpunan yang memuat semua suku-suku dari barisan $\{x_n\}$ dan nilai konvergensinya. Selain itu, karena ruang metrik-α fuzzy pada makalah ini dibangun dari ruang metrik yang lengkap, jika $P$ terbatas di $(X, d)$, maka $P$ bersifat F-bounded di .

Ada bagian yang perlu diteliti dan dikembangkan dari ruang metrik-$\alpha$ fuzzy ini, salah satunya yaitu mengonstruksikan contoh lain yang memenuhi ruang metrik-$\alpha$ fuzzy namun tidak memenuhi kriteria ruang metrik fuzzy. Selain itu, bisa dikonstruksikan suatu ruang metrik-$\alpha$ fuzzy tanpa dibangun dari metrik $d$.

## 5 Ucapan Terima Kasih

Penulis berterima kasih kepada para pengulas atas komentar, kritik, bantuan dan saran yang berharga untuk perbaikan makalah ini.

# 6 Daftar Pustaka


[1]. Cevik, C., & Eminoglu, S. (2018). Generated Fuzzy Metric Space and Some Topological Properties. *Intelligent & Fuzzy Systems*, 877-885.

[2]. Changqing, L., & Kedian, L. (2017). On Topological Properties of the Hausdorff Fuzzy Metric Spaces. *Filomat*, 1167-1173.

[3]. George, A., & Veeramani, P. (1994). On Some Results in Fuzzy Metric Spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 395-399.

[4]. Gomez, S. (2007). *Fuzzy Metrics and Fuzzy Logic for Colour Image Filtering.* Valencia: Universidad de Politecnica.

[5]. Kramosil, I., & Michalek, J. (1975). Fuzzy Metric and Statistical Metric. 326-334.

[6]. Kreyzig, E. (1978). *Introductory Functional Analysis with Appliations.* Canada: John Wiley & Sons.

[7]. Kumam, P., & Wuthipol, S. (2011). Common Fixed Theorems for a Pair of Weakly Compatible Mapping in Fuzzy Metric Spaces. *Hindawi*, 1-14.

[8]. Lukman, Z. (2018). *Fixed Point Theorem on Fuzzy Metric Spaces.* Surabaya: Mathematic department of ITS.

[9]. Missier, S. P., & Rodrigo, P. A. (2014). Strongly alpha Countinuous Functions in Topological Spaces. *IOSR Journal of Mathematics*, 55-60.

[10]. Zadeh, A. L. (1965). Fuzzy Sets. *Inform and Control*, 338-353.

[11]. Zimmerman. (1992). *Fuzzy Sets and Its Applications.* Massachusetts: Kluwer Academic Publisher.