Limits: Journal of Mathematics and Its Applications
E-ISSN: 2579-8936
P-ISSN: 1829-605X
Vol. 20, No. 1, Maret 2023, 69-79
DOI: http://dx.doi.org/10.12962/limits.v20i1.12618

Model Kredibilitas Bühlmann-Straub untuk Frekuensi Klaim Berdistribusi Binomial Negatif–Lindley

Ikhsan Maulidi[1], Uswah[2], Rini Oktavia[3], Alim Misbullah[4], Vina Apriliani[5*]
[1,2,3]Jurusan Matematika, Universitas Syiah Kuala, Banda Aceh, Aceh, Indonesia
[4]Jurusan Informatika, Universitas Syiah Kuala, Banda Aceh, Aceh, Indonesia
[5]Jurusan Pendidikan Matematika, Universitas Islam Negeri Ar-Raniry, Banda Aceh, Aceh, Indonesia
*e-mail: vina.apriliani@ar-raniry.ac.id

Diajukan: 30 Maret 2022, Diperbaiki: 29 Desember 2022, Diterima: 2 Maret 2023

Abstrak

Salah satu alat yang dapat digunakan untuk penentuan premi berbasis risiko adalah teori kredibilitas. Pendekatan yang dapat digunakan salah satunya adalah dengan pendekatan akurasi terbaik Bühlmann-Straub. Artikel ini mengkaji model kredibilitas Bühlmann-Straub parametrik di mana data frekuensi klaim diasumsikan mengikuti distribusi Binomial Negatif-Lindley (NB-L). Penentuan parameter kredibilitas Bühlmann-Straub ditentukan menggunakan kaidah dasar dalam teori peluang. Dari kajian yang telah dilakukan diperoleh persamaan eksplisit untuk menentukan premi kredibilitas Bühlmann-Straub. Simulasi penerapan model pada data juga diberikan dengan mengasumsikan data mengikuti distribusi NB-L. Parameter distribusi NB-L diduga dengan menggunakan metode momen dan penduga maksimum *likelihood*. Dari simulasi yang dilakukan diperoleh bahwa data yang digunakan memiliki nilai faktor kredibilitas yang tinggi, sehingga data dapat dianggap sangat baik untuk menduga premi di masa mendatang.
Kata Kunci: kredibilitas Bühlmann-Straub, Binomial Negatif-Lindley, premi, kredibilitas, penduga maksimum *Likelihood*, metode momen

Abstract

The credibility theory is one of the tools that can be used to determine risk-based premiums. One approach that can be used is the best accuracy approach such as Bühlmann-Straub. We study the parametric Bühlmann-Straub credibility model in which the claim frequency data is assumed to follow the Negative-Lindley (NB-L) Binomial distribution. Determination of the Bühlmann-Straub parameter is determined by using the basic rules in probability theory. From the study that has been carried out, an explicit equation has been obtained to determine the credibility premium of Bühlmann-Straub. A simulation of the application of the model to the data was also provided by assuming the data follows the NB-L distribution. The NB-L distribution parameters were estimated using the momen method and maximum likelihood estimation. From the simulation, it is found that the data used had a high credibility factor value which implies the data can be considered primely for estimating future premiums.
Keywords: *Bühlmann-Straub credibility, Negative Binomial-Lindley, premium, credibility, maximum Likelihood estimation, momen method*

1 Pendahuluan

Salah satu teknik determinasi premi berbasis risiko adalah dengan menggunakan teori kredibilitas. Teori kredibilitas bermanfaat untuk mengestimasi nilai premi bersih di masa yang akan datang dari pemegang polis [1]. Terdapat beberapa pendekatan pada teori kredibilitas, salah satunya ialah pendekatan kredibilitas keakuratan terbaik yang terdiri dari dua model, yaitu model Bühlmann dan model Bühlmann-Straub. Model Bühlmann merupakan model paling sederhana dalam menghitung premi di mana hanya membutuhkan besarnya klaim dari asuransi yang telah terjadi beberapa tahun lalu [2]. Selanjutnya, model Bühlmann-Straub merupakan model Bühlmann yang dikembangkan. Model tersebut lebih rumit dikarenakan kerugian per objek untuk setiap tahunnya berbeda dan jumlah individu pada setiap kelompok premi dapat bervariasi pada setiap periode [1].

Pemodelan distribusi frekuensi klaim dapat diperoleh berdasarkan data frekuensi klaim di masa lalu. Frekuensi klaim dengan peubah acak yang nilainya berupa data cacah biasanya dimodelkan menggunakan distribusi Binomial Negatif. Namun pemodelan data menggunakan distribusi Binomial Negatif lebih baik digunakan jika distribusi data tidak memiliki *heavy tailed* (ekor tebal). *Heavy tailed* yang ekstrem menyebabkan terjadinya overdispersi [3]. Overdispersi adalah kondisi di mana nilai varians lebih besar dari nilai rata-ratanya. Jika data yang tersedia memiliki *heavy tailed* diperlukan alternatif yang lebih baik untuk distribusi Binomial Negatif.

Distribusi campuran menjadi salah satu yang dapat digunakan untuk memperoleh distribusi probabilitas baru. Salah satu distribusi campuran yang dapat digunakan untuk memodelkan frekuensi kedatangan klaim adalah distribusi Binomial Negatif-Lindley (NB-L) yang diperoleh dari distribusi Binomial Negatif dengan distribusi Lindley [4]. Distribusi Binomial Negatif-Lindley bergantung pada dua nilai parameter yang bernilai positif. Metode yang dapat digunakan untuk mencari nilai parameter distribusi NB-L ialah dengan metode momen dan *maximum likelihood estimation* (MLE).

Penelitian terkait penentuan premi dengan kredibilitas Bühlmann dan Bühlmann-Straub telah banyak dilakukan. Beberapa di antaranya yang dilakukan oleh [5] yang meneliti tentang premi kredibilitas pada data yang berdistribusi eksponen. [6] telah memberikan model kredibilitas Bayes dan Bühlmann untuk distribusi *phase-type*. Selain itu, [7] juga meneliti model parametrik untuk kredibilitas Bühlmann pada data yang mengikuti *Weilbull Count distribution*. Penelitian yang mengkaji model Bühlmann yang berdistribusi NB-L dapat dilihat dalam [8].

Artikel ini merupakan pengembangan dari model Bühlmann yang telah dirumuskan sebelumnya [8], yaitu model kredibilitas Bühlmann-Straub dengan klaim berdistribusi Binomial Negatif-Lindley. Hal yang membedakan antara model Bühlmann dan model Bühlmann-Straub adalah pada jumlah anggota pemegang polis yang mana diasumsikan tetap pada model Bühlmann. Pada model Bühlmann-Straub, jumlah pemegang polis akan memungkinkan berbeda-beda antar periode. Hal ini jelas lebih realistis untuk diaplikasikan pada data asuransi ke depan. Selain itu, distribusi NB-L juga lebih baik dalam memodelkan data yang memiliki nilai nol yang sangat banyak seperti data asuransi dibandingkan distribusi Poisson dan distribusi Binomial Negatif [4]. Perumusan dugaan parameter diberikan dalam bentuk persamaan eksplisit dan diberikan pula simulasi model tersebut pada data asuransi dengan menggunakan R [9].

2 Metode Penelitian

2.1 Fungsi Pembangkit Momen

Fungsi pembangkit momen adalah fungsi yang dapat menghasilkan momen-momen. Fungsi tersebut dapat digunakan untuk mencari nilai-nilai ekspektasi dengan lebih mudah.

Definisi 1[10] *Fungsi pembangkit momen dari suatu variabel X dapat didefinisikan sebagai:*

$$M(\theta) = \mathrm{E}(e^{\theta X}). \tag{1}$$

Teorema 2[10] *Turunan pertama dari fungsi pembangkit momen pada $\theta = 0$ adalah nilai ekspektasi dari variabel random X,*

$$M'^{(0)} = \mathrm{E}[X]. \tag{2}$$

Teorema 3[10] *Turunan kedua dari fungsi pembangkit momen pada $\theta = 0$ adalah nilai ekspektasi dari variabel random X^2 atau momen kedua dari X,*

$$M''^{(\theta)} = \mathrm{E}[X^2]. \tag{3}$$

Secara umum turunan ke-n dari fungsi pembangkit momen dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$M^{(n)}(0) = \mathrm{E}[X^n], n \geq 1.$$

2.2 Distribusi Binomial Negatif

Definisi 4[11] *Misalkan X adalah peubah acak diskrit yang berdistribusi binomial negatif dengan parameter (r,p) dan dinotasikan dengan $X \sim NB\ (r, p)$. Peubah acak X memiliki fungsi massa peluang sebagai berikut:*

$$P_x(x) = P(X = x) = \binom{x-1}{r-1} p^r (1-P)^{x-r},$$

dengan $x = r, r + 1, \ldots, r \leq x, 0 \leq p \leq 1$.

Diberikan nilai harapan, momen kedua, dan varians dari X sebagai berikut:

$$E[X] = \frac{r\,(1-p)}{p}, \tag{4}$$

$$E(X^2) = \frac{r\,(1-p)[1 + r(1-p)]}{p^2}, \tag{5}$$

$$Var[X] = \frac{r\,(1-p)}{(p)^2}. \tag{6}$$

2.3 Distribusi Lindley

Distribusi Lindley diperkenalkan sebelumnya oleh Lindley pada tahun 1958 [12]. Model distribusi ini sangat berguna dalam pemodelan dibidang asuransi.

Definisi 5[12] *Misalkan Θ adalah peubah acak kontinu yang berdistribusi Lindley dengan parameter λ dan dinotasikan $\Theta \sim Lind(\lambda)$ maka Θ memiliki fungsi kepekatan peluang sebagai berikut:*

$$f_{\theta}(\theta) = \frac{\lambda^2}{\lambda + 1}(1+\theta)e^{-\lambda\theta}, \tag{7}$$

di mana $\theta > 0$ dan $\lambda > 0$.

Lemma 6[12] *Misalkan $\Theta \sim Lind(\lambda)$ dan memiliki fungsi peluang yang diberikan pada persamaan (7), maka fungsi pembangkit momen dari Θ adalah*

$$M_{\Theta}(z) = \frac{\lambda^2}{\lambda + 1}\left(\frac{\lambda - z + 1}{(\lambda - z)^2}\right). \tag{8}$$

Bukti: Dapat dibuktikan dengan menggunakan persamaan (1) dan (7). Selengkapnya dapat dilihat di dalam [12].

Nilai harapan dan varians dari distribusi Lindley dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan (2) dan (3) pada Teorema 2 dan Teorema 3.

2.4 Distribusi Binomial Negatif-Lindley (NB-L)

Definisi 7[4] *Misalkan X adalah peubah acak yang berdistribusi Binomial Negatif-Lindley dengan parameter (r, λ), dinotasikan dengan NB-L(r, λ) jika memenuhi kondisi sebagai berikut:*

$$X|\Theta \sim NB(r, p = e^{-\Theta}) \text{ dan } \Theta \sim Lind(\lambda) \text{ dengan } r > 0 \text{ dan } \lambda > 0.$$

Fungsi pembangkit momen $X \sim NB-L(r, \lambda)$ adalah

$$P_{\Theta}(z) = \frac{\lambda^2}{\lambda + 1}\left(\frac{\lambda - z + 1}{(\lambda - z)^2}\right),$$

dengan $z = 0,1,2, \ldots$.

2.5 Kredibilitas Bühlmann-Straub

Model Bühlmann-Straub adalah model Bühlmann yang telah dimodifikasi. Pada model ini, kerugian per-objek yang rentan terhadap risiko jika risiko tersebut benar-benar terjadi (eksposur) dapat bervariasi dari tahun ke tahun, dan jumlah tahun pengamatan dapat berubah dari satu risiko ke risiko lainnya. Untuk menentukan kredibilitas Bühlmann-Straub diperlukan beberapa parameter, yaitu:

1. *Hypothetical mean* atau premi individu $(\mu(\Theta_i))$ dan nilai harapan dari *hypothetical mean* (μ),

$$\mu(\Theta_i) = E(\bar{X}_i|\Theta), \tag{9}$$

$$E(\bar{X}_i) = E[E(\bar{X}_i|\Theta_i)] = E(\mu(\Theta_i) = \mu. \tag{10}$$

2. Nilai harapan dari *variance process* (v) dan varians dari *hypothetical mean* (a),

$$var(X_i|\Theta) = var(\mu(\Theta) + E\left[\frac{var(\Theta)}{m_i}\right] = \frac{V}{m_i} + a, \tag{11}$$

$$v = E\left(Var\big((X_i|\Theta)\big)\right), \tag{12}$$

$$a = var(\mu(\Theta)). \tag{13}$$

3. Koefisien kredibilitas Bühlmann-Straub (k), faktor kredibilitas Bühlmann-Straub populasi (Z), faktor kredibilitas Bühlmann-Straub untuk setiap kelompok pemegang polis i (Z_i), premi Bühlmann-Straub populasi (C), premi Bühlmann-Straub untuk setiap kelompok pemegang polis i $(\hat{C}_i)$. Persamaan untuk menentukan koefisien kredibilitas Bühlmann-Straub adalah

$$k = \frac{v}{a}. \tag{14}$$

Dari persamaan (14), maka didapat faktor kredibilitas Bühlmann-Straub untuk setiap kelompok pemegang polis i, yaitu:

$$Z_i = \frac{m_i}{m_i + k}, \tag{15}$$

dengan m_i menyatakan banyaknya pemegang polis pada grup ke i untuk semua periode. Selanjutnya, besar premi kredibilitas untuk setiap kelompok pemegang polis i adalah

$$\hat{C}_i = Z_i\bar{X}_i + (1 - Z_i)\bar{X}_i. \tag{16}$$

Untuk menentukan besar klaim untuk setiap grup polis i dapat digunakan persamaan

$$\bar{X}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{m_{ij}}{m_i} X_{ij}, \qquad i = 1, \dots. l$$

dengan m_{ij} menyatakan banyaknya pemegang polis grup ke i pada periode ke j. Penentuan banyak individu kelompok pemegang polis untuk setiap grup polis i adalah dengan persamaan

$$m_i = \sum_{j=1}^{n} m_{ij}.$$

Dengan menggunakan persamaan-persamaan di atas, maka didapatkan pula faktor kredibilitas Bühlmann-Straub populasi, yaitu:

$$Z = \frac{m}{m + k}, \tag{17}$$

di mana $m = \sum_{i=1}^{r} m_i$ dan k memenuhi persamaan (14). Besaran premi populasi adalah

$$C = Z\bar{X} + (1 - Z)\mu \tag{18}$$

dengan $\bar{X}$ menyatakan besar rataan klaim data amatan dan dihitung dengan persamaan

$$\bar{X} = \sum_{j=1}^{n} \frac{m_i \bar{X}_i}{m}, [1].$$

3 Hasil dan Pembahasan

Model penentuan premi dengan kredibilitas Bühlmann-Straub dapat ditentukan dengan memberikan persamaan dugaan parameter kredibilitasnya. Berikut diuraikan proses penurunan persamaan dugaan parameter tersebut.

3.1 Persamaan *Hypothetical Mean*

Berdasarkan persamaan (4) dan persamaan (9), formula *hypothetical mean* menggunakan distribusi Binomial Negatif-Lindley dapat ditentukan sebagai berikut:

$$\mu(\Theta_i) = E(\bar{X}_i|\Theta = \theta) = m_i\left(\frac{1-p}{p} + \frac{1-p}{p} + \cdots \ldots + \frac{1-p}{p}\right)$$
$$= m_i\left(\frac{r_i\,(1-p_i)}{p_i}\right). \tag{19}$$

Karena $X_i|\Theta \sim NB\left(r, p = e^{-\theta}\right)$, maka persamaan *hypothetical mean* pada persamaan (19) adalah

$$\mu(\theta_i) = E(\bar{X}_i|\Theta_i = \theta_i) = m_i\left(\frac{r_i\,(1-p_i)}{p_i}\right) = m_i\left(\frac{r\left(1-e^{-\theta_i}\right)}{e^{-\theta_i}}\right) = m_i r_i\left(e^{\theta_i}-1\right). \tag{20}$$

Dengan menggunakan persamaan (10) dan persamaan (20), maka nilai harapan dari *hypothetical mean/collective premium* (μ) adalah

$$\mu_i = E[\bar{X}_i] = E\left(E(\bar{X}_i|\Theta)\right) = E\left(\mu_i(\Theta_i)\right) = E\left(m_i r_i\left(e^{\theta_i}-1\right)\right). \tag{21}$$

Berdasarkan Lemma 6, dijelaskan bahwa $\Theta \sim$ Lind (λ) memiliki fungsi pembangkit momen, sehingga dengan menggunakan persamaan (8) maka persamaan (21) menjadi

$$\mu_i = m_i r_i\left(\frac{\lambda_i^2}{\lambda_i+1}\left(\frac{\lambda_i - z + 1}{(\lambda_i - z)^2}\right) - 1\right)$$
$$= m_i r_i\left(\frac{\lambda_i^2}{\lambda_i+1}\left(\frac{\lambda_i - 1 + 1}{(\lambda_i - 1)^2}\right) - 1\right)$$
$$= m_i r_i\left(\frac{\lambda_i^2}{\lambda_i+1}\left(\frac{\lambda_i}{(\lambda_i - 1)^2}\right) - 1\right)$$
$$= m_i r_i\left(\frac{\lambda_i^2}{\lambda_i+1}\frac{\lambda_i}{(\lambda_i - 1)^2} - 1\right).$$

Untuk menentukan premi dibutuhkan nilai parameter a. Nilai a merupakan ragam dari *hypothetical mean* $\mu(\Theta)$. Berdasarkan persamaan (13) dan persamaan (20) maka diperoleh

$$a_i = var\left(\mu(\Theta)\right) = var\left(m_i r_i(e^{\Theta_i}-1)\right)$$

$$= m_i var\ (r_i e^{\Theta_i} - r_i)$$
$$= m_i r_i^2 var\ (e^{\Theta_i})$$
$$= m_i\, r_i^2 \left[E\ (e^{2\Theta_i}) - \left(E\ (e^{\Theta_i})\right)^2 \right]. \quad (22)$$

Dengan menggunakan persamaan (8), maka persamaan (22) menjadi

$$a_i = r^2 m_i [E(e^{2\Theta_i}) - (E(e^{\Theta_i}))^2]$$
$$= r^2 m_i \left[\frac{\lambda_i^2}{\lambda_i + 1}\left(\frac{\lambda_i - z + 1}{(\lambda_i - z)^2}\right) - \left(\frac{\lambda_i^2}{\lambda_i + 1}\left(\frac{\lambda_i - z + 1}{(\lambda_i - z)^2}\right)\right)^2 \right]$$
$$= r^2 m_i \left[\frac{\lambda_i^2}{\lambda_i + 1}\left(\frac{\lambda_i - 2 + 1}{(\lambda_i - 2)^2}\right) - \left(\frac{\lambda_i^2}{\lambda_i + 1}\left(\frac{\lambda_i - 1 + 1}{(\lambda_i - 1)^2}\right)\right)^2 \right]$$
$$= r^2 m_i \frac{\lambda_i^2}{\lambda_i + 1} \left[\frac{\lambda_i - 1}{(\lambda_i - 2)^2} - \left(\frac{\lambda_i^4}{(\lambda_i + 1)((\lambda_i - 1)^4} \right) \right]. \quad (23)$$

3.2 Persamaan *Variance Process* dan Nilai Harapannya

Persamaan *variance process* menggunakan distribusi NB-L dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan (11), yaitu:

$$var(X_i|\Theta_i = \theta_i) = \frac{v_i(\theta)}{m_i} \rightarrow v_i(\theta) = m_i var(X_i|\Theta_i = \theta_i)$$
$$v_i(\theta) = m_i \left(E((X_i)^2|\Theta_i = \theta_i) - \left(E\big((X_i)\big|\Theta_i = \theta_i\big)\right)^2 \right). \quad (24)$$

Berdasarkan persamaan (5) dan persamaan (6) serta X_i berdistribusi Binomial Negatif, maka *variance process* pada persamaan (24) menjadi

$$v_i(\theta) = m_i \left(\frac{r_i(\, 1 - p_i)[1 + r_i(1 - p_i)]}{p_i^2} - \left(\frac{r_i(\, 1 - p_i)}{p_i}\right)^2 \right)$$
$$= m_i \left(\frac{r_i(\, 1 - p_i)[1 + r_i(1 - p_i)]}{p_i^2} - \left(\frac{r_i(\, 1 - p_i)}{p_i}\right)\left(\frac{r_i(\, 1 - p_i)}{p_i}\right) \right)$$
$$= m_i \left(\frac{r_i(\, 1 - p_i)}{p_i^2} \right) = m_i \left(\frac{-r_i p_i + r_i}{p_i^2} \right)$$
$$= m_i \left(r_i (p_i^{-2} - p_i^{-1}) \right) = m_i \left(r_i (e^{2\Theta_i} - e^{\Theta_i}) \right). \quad (25)$$

Berdasarkan persamaan (12) dan persamaan (25), maka diperoleh nilai harapan dari *variance process* (v_i), yaitu:

$$v_i = E\big(v(\Theta_i)\big) = m_i \left(E\ \left(r_i(e^{2\Theta_i} - e^{\Theta_i})\right) \right) = m_i (r_i [E(e^{2\Theta_i}) - E(e^{\Theta_i})]). \quad (26)$$

Dengan menggunakan persamaan (8), maka persamaan (26) menjadi

$$v_i = m_i\left(r_i\left[\frac{\lambda_i^2}{\lambda_i+1}\left(\frac{\lambda_i-2+1}{(\lambda_i-2)^2}\right)-\frac{\lambda_i^2}{\lambda_i+1}\left(\frac{\lambda_i-1+1}{(\lambda_i-1)^2}\right)\right]\right)$$

$$= m_i r_i\left(\frac{\lambda_i^2}{\lambda_i+1}\left[\frac{\lambda-1}{(\lambda-2)^2}-\left(\frac{\lambda}{(\lambda-1)^2}\right)\right]\right). \qquad (27)$$

3.3 Koefisien Kredibilitas Bühlmann-Straub

Pada bagian sebelumnya telah didapatkan formula v (*variance* dari $\mu(\theta)$) pada persamaan (27) dan a (nilai harapan dari $v(\theta)$) pada persamaan (23), sehingga dari formulasi tersebut diperoleh koefisien kredibilitas Bühlmann-Straub (k) berdasarkan persamaan (14), yaitu:

$$k = \frac{v}{a} = \frac{m_i r\frac{\lambda^2}{\lambda+1}\left[\frac{\lambda-1}{(\lambda-2)^2}-\left(\frac{\lambda}{(\lambda-1)^2}\right)\right]}{m_i r^2\frac{\lambda^2}{\lambda+1}\left[\frac{\lambda-1}{(\lambda-2)^2}-\left(\frac{\lambda^4}{(\lambda+1)((\lambda-1)^4)}\right)\right]}$$

$$= \frac{m_i r}{m_i r^2}\left[\frac{\lambda-1}{(\lambda-2)^2}-\left(\frac{\lambda}{(\lambda-1)^2}\right)\right]\left[\frac{\lambda-1}{(\lambda-2)^2}-\left(\frac{\lambda^4}{(\lambda+1)((\lambda-1)^4)}\right)\right]^{-1}$$

$$= \frac{1}{r}\left[\frac{\lambda^5-2\lambda^4-\lambda^3+3\lambda^2-1}{\lambda^4-5\lambda^2+4\lambda-1}\right]. \qquad (28)$$

3.4 Faktor Kredibilitas dan Premi Kredibilitas Bühlmann-Straub

Setelah menformulasikan model seperti pada bagian sebelumnya, maka kita dapatkan faktor kredibilitas Bühlmann-Straub untuk setiap pemegang polis i berdasarkan persamaan (15). Selanjutnya persamaan (16), (17), dan (18) dapat digunakan untuk mengestimasi premi kredibilitas Bühlmann-Straub untuk setiap kelompok polis dan populasi.

4 Simulasi Data

Data yang digunakan dalam penelitian ini bersumber dari [13]. Data tersebut merupakan data pemegang polis asuransi jaminan sosial disabilitas yang diambil dari Amerika Serikat selama 15 tahun dari tahun 2001 sampai dengan 2015 dengan 52 grup polis. Dari data tersebut terdapat rataan klaim untuk kelompok pemegang polis ke-**i** pada tahun ke-**j** dengan $\boldsymbol{i = 1, 2, 3, .. 52}$ dan $\boldsymbol{j = 1, 2, .. 15}$. Potongan data tersebut disajikan dalam tabel berikut ini.

Tabel 1. Data Simulasi

Grup (i)		**Tahun (j)**					
		1	**2**	**3**	**…**	**14**	**15**
1	$X_{ij}(juta\ dolar)$	211792	223434	232793	…	329307	329307
	m_{ij}	42416	45172	47729	…	63816	61603
2	$X_{ij}(juta\ dolar)$	489839	508690	532877	…	773985	773985
	m_{ij}	113158	122035	122938	…	163333	156934
3	$X_{ij}(juta\ dolar)$	264615	272820	281761	…	414495	414495
	m_{ij}	60785	66489	67459	…	69664	66752
…	$X_{ij}(juta\ dolar)$	…	…	…	…	…	…

Grup (i)		Tahun (j)					
		1	2	3	…	14	15
	m_{ij}	…	…	…	…	…	…
51	$X_{ij}(juta\ dolar)$	25573	26931	27896	…	35997	35997
	m_{ij}	6564	6397	7061	…	6164	6841
52	$X_{ij}(juta\ dolar)$	47655	51646	55450	…	86344	86344
	m_{ij}	11150	13700	14699	…	13430	11989

Algoritma yang digunakan dalam simulasi ini adalah sebagai berikut:

a) Menggunakan penduga maksimum *likelihood* dan aplikasi R (*package fitdistrplus*) untuk memberikan dugaan parameter θ_i dan r_i, untuk $i = 1,2,\dots,52$.

b) Menggunakan metode momen untuk memberikan dugaan pada parameter $\lambda_{i.}$

Dari hasil sebelumnya diperoleh θ_i dan r_i yang dapat dilihat pada Tabel 2 berikut.

Tabel 2. Data Parameter Distribusi Binomial Negatif (r_i, p_i)

i	**r**			***i***	**r**	***p***	***θ***
1	47,8056	0,0002	8,6746	27	62,9436	0,0019	6,2484
2	44,0627	0,0001	9,5708	28	106,2790	0,0062	5,0772
3	41,5500	0,0001	9,0032	29	76,0794	0,0033	5,7074
4	106,7460	0,0004	7,8795	30	22,5100	0,0004	7,7323
5	132,2030	0,0007	7,1998	31	61,6670	0,0043	5,4524
6	51,3646	0,0001	8,9114	32	76,1683	0,0008	7,0965
7	55,3160	0,0003	8,2178	33	43,2644	0,0005	7,5791
8	54,3212	0,0002	8,6190	34	48,9655	0,0002	8,5493
9	121,3640	0,0012	6,7539	35	64,8055	0,0013	6,6400
10	73,0055	0,0003	8,1882	36	76,5305	0,0003	8,0803
11	67,9605	0,0010	6,9374	37	164,8600	0,0002	8,4166
12	24,2776	0,0005	7,5955	38	0,2989	0,0000	13,0087
13	78,2677	0,0016	6,4087	39	37,0021	0,0015	6,5099
14	41,3394	0,0016	6,4398	40	41,9796	0,0014	6,5910
15	116,9740	0,0029	5,8371	41	41,7534	0,0003	8,2475
16	35,7089	0,0002	8,7737	42	55,9188	0,0001	9,1464
17	42,1173	0,0001	9,2189	43	70,0156	0,0003	8,1988
18	43,8819	0,0003	8,1171	44	193,2770	0,0014	6,5582
19	51,1501	0,0001	9,0820	45	51,9609	0,0030	5,7936
20	37,9837	0,0002	8,4893	46	26,8230	0,0006	7,4821
21	43,4207	0,0003	8,2353	47	32,6265	0,0003	8,2481
22	80,0172	0,0004	7,9280	48	35,2130	0,0002	8,7076
23	39,1226	0,0005	7,6053	49	54,8165	0,0003	8,1108
24	36,6808	0,0002	8,3286	50	114,7390	0,0001	9,1393
25	24,6443	0,0000	10,2527	51	76,6381	0,0024	6,0472
26	38,2412	0,0003	8,0209	52	30,9191	0,0005	7,7013

Dengan menggunakan persamaan (8) diperoleh dugaan parameter λ untuk grup polis 1 adalah 0,21051, dan dengan menggunakan persamaaan (28) diperoleh nilai koefisien kredibilitas $k = 0{,}074025$. Selanjutnya nilai Z_i dapat ditentukan dengan persamaan (15).

Dari hasil yang diperoleh, tingkat kredibilitas tertinggi adalah Z_{50} sebesar $99{,}9999999\%$ dan tingkat kredibilitas terendah Z_{31} sebesar $99{,}99998285\%$. Berdasarkan hal tersebut, nilai faktor kredibilitas yang diperoleh sangatlah tinggi sehingga premi kredibilitas Bühlmann-Straub dengan model NB-L dapat ditentukan dari data masa lampau sepenuhnya yaitu berupa rataan data klaim tersebut.

5 Simpulan

Model kredibilitas Bühlmann-Straub parametrik dengan klaim berdistribusi Binomial Negatif-Lindley cocok digunakan untuk mengaplikasikan data frekuensi klaim asuransi yang memiliki overdispersi yang tinggi. Penentuan premi kredibilitas Bühlmann Straub dilakukan dengan memberikan dugaan parameter kredibilitas yang bergantung pada parameter distribusi Binomial Negatif-Lindley. Dari contoh aplikasi yang dilakukan, model NB-L ini memberikan nilai faktor kredibilitas Bühlmann yang cukup besar, artinya data cukup baik dalam menduga nilai premi di masa mendatang.

6 Ucapan Terima Kasih

Ucapan terima kasih diberikan kepada Bapak Agah D. Garnadi dari Departemen Matematika, Institut Pertanian Bogor, Indonesia yang telah memotivasi penulis untuk mengkaji model kredibilitas ini.

7 Daftar Pustaka

[1] H. Bühlmann and A. Gisler, *A Course in Credibility Theory and Its Applications*. Springer Science & Business Media, 2006.

[2] A. R. Effendie, *Teori Risiko Aktuaria dengan Software R*. Yogyakarta: UGM Press, 2019.

[3] J. A. Green, "Too many zeros and/or highly skewed? a tutorial on modelling health behaviour as count data with Poisson and Negative Binomial regression," *Heal. Psychol. Behav. Med.*, vol. 9, no. 1, pp. 436–455, 2021, doi: 10.1080/21642850.2021.1920416.

[4] H. Zamani and N. Ismail, "Negative binomial-Lindley distribution and its application," *J. Math. Stat.*, vol. 6, no. 1, pp. 4–9, 2010, doi: 10.3844/jmssp.2010.4.9.

[5] L. M. Wen, W. Wang, and J. L. Wang, "The credibility premiums for exponential

principle," *Acta Math. Sin. Engl. Ser.*, vol. 27, no. 11, pp. 2217–2228, 2011, doi: 10.1007/s10114-011-9198-4.

[6] A. Hassan Zadeh and D. A. Stanford, "Bayesian and Bühlmann credibility for phase-type distributions with a univariate risk parameter," *Scand. Actuar. J.*, vol. 2016, no. 4, pp. 338–355, 2016.

[7] T. M. Karina, S. Nurrohmah, and I. Fithriani, "Buhlmann credibility model in predicting claim frequency that follows heterogeneous Weibull count distribution," in *Journal of Physics: Conference Series*, 2019, vol. 1218, no. 1, p. 012041. doi: 10.1088/1742-6596/1218/1/012041.

[8] I. Maulidi and V. Apriliani, "Model kredibilitas Bühlmann dengan frekuensi klaim berdistribusi Binomial Negatif-Lindley," *Limits J. Math. Its Appl.*, vol. 18, no. 1, pp. 71–78, 2021, doi: 10.12962/limits.v18i1.6690.

[9] I. Maulidi, W. Erliana, A. D. Garnadi, S. Nurdiati, and I. G. P. Purnaba, "Penghitungan kredibilitas dengan pustaka actuar dalam R," *J. Math. Its Appl.*, vol. 16, no. 2, pp. 45–52, 2017, doi: 10.29244/jmap.16.2.45-52.

[10] S. Ghahramani, *Fundamentals of Probability*. New York (US): Prentice Hall, 2005.

[11] L. J. Bain and M. Engelhardt, *Introduction to Probability and Mathematical Statistics*. California: Duxbury Press, 1992.

[12] M. E. Ghitany, B. Atieh, and S. Nadarajah, "Lindley distribution and its application," *Math. Comput. Simul.*, vol. 78, no. 4, pp. 493–506, 2008, doi: 10.1016/j.matcom.2007.06.007.

[13] I. S. Zahra, "Perhitungan Premi dengan Menggunakan Model Kredibilitas Buhlmann dan Buhlmann Straub," Institut Pertanian Bogor, 2019.