

Bilangan Kromatik Lokasi Pada Graf Amalgamasi Kipas Berekor

Des Welyyanti^{1*}, Nada Andriani², Lyra Yulianti³

¹Jurusan Matematika, Universitas Andalas, Padang, Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
e-mail: wely@sci.unand.ac.id, nadaandriani05@gmail.com, lyra@sci.unand.ac.id

Diajukan: 17 Mei 2022, Diperbaiki: 29 Desember 2022, Diterima: 9 Maret 2023

Abstrak

Misalkan $G = (V, E)$ graf terhubung dan c suatu k -pewarnaan dari G . Misalkan $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ merupakan partisi terurut dari $V(G)$ ke dalam kelas warna yang dihasilkan. Berdasarkan pewarnaan titik, maka representasi titik v terhadap Π disebut kode warna dari v , dinotasikan dengan $c_\Pi(v)$. Kode warna $c_\Pi(v)$ dari suatu titik $v \in V(G)$ didefinisikan sebagai k -pasang terurut, yaitu,

$$c_\Pi(v) = (d(v, S_1), d(v, S_2), \dots, d(v, S_k)),$$

dengan $d(v, S_i) = \min\{d(v, x) | x \in S_i\}$ untuk $1 \leq i \leq k$. Jika setiap titik yang berbeda di G memiliki kode warna yang berbeda terhadap Π , maka c disebut pewarnaan lokasi. Banyaknya warna minimum yang digunakan untuk pewarnaan lokasi dari graf G disebut bilangan kromatik lokasi, dinotasikan dengan $\chi_L(G)$. Pada artikel ini akan dibahas mengenai bilangan kromatik lokasi pada graf amalgamasi kipas berekor ($Amal\{F_{n_j}, P_{m_j}, b\}_2$) dengan $2 \leq n_j < 23$ dengan n_j menyatakan banyaknya titik pada subgraf graf kipas ke- j dan m_j menyatakan banyaknya titik pada subgraf dari graf lintasan ke- j serta b menyatakan titik hasil identifikasi dari titik-titik terminal, dengan $1 \leq j \leq m$.

Kata Kunci: Bilangan Kromatik Lokasi, Amalgamasi, Graf Kipas Berekor, Graf Amalgamasi Kipas Berekor, Kode Warna.

Abstract

Let $G = (V, E)$ be a connected graph and let c be a proper coloring of G . Let $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ be an ordered partition of $V(G)$ into the resulting color classes. For a vertex v of G , the color code $c_\Pi(v)$ of v is the ordered k -tuple:

$$c_\Pi(v) = (d(v, S_1), d(v, S_2), \dots, d(v, S_k)),$$

where $d(v, S_i) = \min\{d(v, x) | x \in S_i\}$ for $1 \leq i \leq k$. If distinct vertices have distinct color codes, then c is called a locating coloring. The locating-chromatic number $\chi_L(G)$ is the minimum number of colors in a locating coloring of G . In this paper, we study the locating-chromatic number of the amalgamation of fan-tailed graphs ($Amal\{F_{n_i}, P_{m_i}, b\}_2$) with $2 \leq n_i < 23$ where n_i represents the number of vertex in the i -th fan graph subgraph and m_i represents the number of vertex in the i -th path graph subgraph and b represents the identification result of terminal points, where $1 \leq j \leq m$.

Keywords: Locating-Chromatic Number, Amalgamation, Fan-Tailed Graphs, The Amalgamation of Fan-Tailed Graphs, Color Code.

1 Pendahuluan

Bilangan kromatik lokasi untuk pertama kalinya dikenalkan oleh Chartrand dkk.[1], yaitu perpaduan konsep pewarnaan titik dan dimensi partisi pada suatu graf. Pewarnaan titik pada suatu

graf ialah pemberian warna kesemua titik pada graf dengan syarat setiap titik-titik yang bertetangga harus memiliki warna yang berbeda. Banyaknya warna minimum yang digunakan untuk pewarnaan titik pada graf G disebut bilangan kromatik, yang dinotasikan $\chi(G)$. Himpunan titik $V(G)$ dipartisi menjadi subhimpunan, yaitu S_1, S_2, \dots, S_k . Notasikan Π sebagai suatu himpunan terurut dari k -partisi, tulis $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$. Misalkan terdapat sebuah titik v di G , maka representasi v terhadap Π didefinisikan sebagai $r(v|\Pi) = (d(v, S_1), d(v, S_2), \dots, d(v, S_k))$. Jika setiap titik pada G mempunyai representasi yang berbeda terhadap Π , maka Π disebut partisi penyelesaian. Kardinalitas dari k -partisi penyelesaian terhadap $V(G)$ disebut dimensi partisi. Kelas warna pada suatu graf G dinotasikan dengan S_i merupakan himpunan titik-titik yang berwarna i dengan $1 \leq i \leq k$. Misalkan $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ merupakan partisi terurut dari $V(G)$. Berdasarkan pewarnaan titik, maka representasi titik v terhadap Π disebut kode warna dari v , dinotasikan dengan $c_\Pi(v)$. Kode warna $c_\Pi(v)$ dari suatu titik $v \in V(G)$ didefinisikan sebagai k -pasang terurut, yaitu $(d(v, S_1), d(v, S_2), \dots, d(v, S_k))$ dengan $d(v, S_i) = \min\{d(v, x) | x \in S_i\}$ untuk $1 \leq i \leq k$, dimana $d(v, x)$ adalah jarak antara titik v dan x . Jika setiap titik yang berbeda di G memiliki kode warna yang berbeda terhadap Π , maka c disebut pewarnaan lokasi. Banyaknya warna minimum yang digunakan untuk pewarnaan lokasi dari graf G disebut bilangan kromatik lokasi, dinotasikan dengan $\chi_L(G)$.

Chartrand dkk[1] menentukan bilangan kromatik lokasi dari beberapa graf sederhana, seperti graf lintasan P_n , graf lingkaran dan graf multipartit lengkap. Selanjutnya, Asmiati dkk.[2] menentukan bilangan kromatik lokasi dari amalgamasi graf bintang. Behtoei dkk.[3] membahas tentang bilangan kromatik lokasi dari graf kipas. Pada tahun 2014, Welyyanti dkk.[4] memperluas pengertian bilangan kromatik lokasi suatu graf yang dapat diaplikasikan pada semua jenis graf termasuk graf tak terhubung. Selanjutnya, Zikra[5] membahas tentang bilangan kromatik lokasi dari gabungan graf kipas. Pada penelitian ini akan ditentukan bilangan kromatik lokasi pada graf amalgamasi dua buah graf kipas berekor yang homogen.

2 Landasan Teori

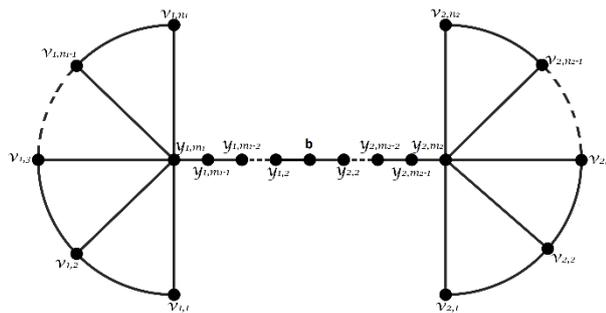
Definisi graf siklus, graf lintasan dan graf kipas berikut dikutip dari Bondy dan Murty[6]. Graf siklus (C_n) adalah graf terhubung dengan $n \geq 3$ titik, dimana setiap titiknya berderajat dua. Graf lintasan (P_n) adalah graf terhubung yang memuat dua titik berderajat satu dan $n - 2$ yang berderajat dua, untuk $n \geq 2$. Graf Kipas (F_n) dengan $n \geq 2$ adalah graf yang diperoleh dari operasi tambah graf lintasan (P_n), $n \geq 2$ dengan titik v_0 atau $F_n = P_n + v_0$. Dalam [1], Ansori mendefinisikan graf kipas berekor ($F_n P_m$) sebagai graf kipas (F_n) yang titik v_0 diberi titik-titik

tambahan sehingga titik v_0 tersebut menjadi graf lintasan (P_m), $m \geq 2$. Selanjutnya, Ansori[7] mendefinisikan graf amalgamasi kipas berekor ($Amal\{F_{n_i}P_{m_i}, b\}_t$) sebagai graf yang diperoleh dari hasil amalgamasi t -buah graf kipas berekor yang tidak harus homogen (graf-graf kipas berekor yang diamalgamasikan tidak harus memiliki banyak titik yang sama). Graf amalgamasi kipas berekor ($Amal\{F_{n_i}P_{m_i}, b\}_2$) adalah graf amalgamasi 2 buah graf kipas berekor dengan $m_i \geq 2$, $n_i \geq 2$, $t = 2$ dan $i = 1,2$, yaitu melekatkan dua titik berderajat satu pada masing-masing graf kipas berekor. Himpunan titik dan himpunan sisi graf amalgamasi kipas berekor ($Amal\{F_{n_i}P_{m_i}, b\}_2$) dengan $m_i \geq 2$, $n_i \geq 2$, $t = 2$ dan $i = 1,2$ adalah:

$$V(Amal\{F_{n_i}P_{m_i}, b\}_2) = \{b, y_{i,j}, v_{i,k} | i = 1,2, \quad j = 2,3, \dots, m_i, \quad k = 1,2, \dots, n_i\}$$

$$E(Amal\{F_{n_i}P_{m_i}, b\}_2) = \{by_{i,2}, y_{i,l}y_{i,l+1}, y_{i,m_i}v_{i,j}, v_{i,k}v_{i,k+1} | i = 1,2, l = 2,3, \dots, m_i - 1, j = 1,2, \dots, n_i, k = 1,2, \dots, n_i, k = 1,2, \dots, n_i - 1\}.$$

Ilustrasi graf amalgamasi kipas berekor dapat dilihat pada Gambar 1.



Gambar 1.[1] Graf amalgamasi 2 buah Graf Kipas Berekor Graf $Amal\{F_{n_i}P_{m_i}, b\}_2$

Berikut teorema dan akibat yang berkaitan dengan bilangan kromatik lokasi suatu graf yang diambil dari[1]. Definisikan $N(v)$ sebagai himpunan yang berisi semua titik yang menjadi tetangga dari v .

Teorema 1.[1] Misal c adalah pewarnaan lokasi pada graf terhubung G . Jika u dan v adalah dua titik yang berbeda di G sedemikian sehingga $d(u, w) = d(v, w)$ untuk setiap $w \in V(G) - \{u, v\}$, maka $c(u) \neq c(v)$. Secara khusus jika u dan v titik titik yang tidak bertetangga di G sedemikian sehingga $N(u) = N(v)$, maka $c(u) \neq c(v)$.

Akibat 2.[1] Misalkan G adalah graf terhubung dengan satu titik yang bertetangga dengan k daun, maka $\chi_L(G) = k + 1$.

Berikut ini adalah teorema yang berkaitan dengan bilangan kromatik lokasi graf kipas F_n yang diambil dari [5]. Teorema 3 digunakan untuk membuktikan bilangan kromatik lokasi pada graf kipas berekor.

Teorema 3.[5] Misalkan terdapat graf kipas F_n untuk $n \geq 2$, maka

$$\chi_L(F_n) = \begin{cases} 3, & \text{untuk } n = 2 \\ 4, & \text{untuk } 3 \leq n \leq 7 \\ 5, & \text{untuk } 8 \leq n \leq 23 \\ q, & \text{untuk } (q-2) \sum_{i=3}^{q-1} (i-2) \leq n \leq ((q-1) \sum_{i=3}^q (i-2)) - 1, q \geq 6. \end{cases}$$

3 Hasil dan Pembahasan

Pada Teorema 4 akan dibahas tentang bilangan kromatik lokasi untuk graf amalgamasi kipas berekor ($Amal\{F_{n_i}P_{m_i}, b\}_2$) dengan $m_i \geq 2$ dan $2 \leq n_i < 23$.

Teorema 4. Misalkan terdapat graf amalgamasi kipas berekor ($Amal\{F_{n_i}P_{m_i}, b\}_2$) untuk $m_i \geq 2$ dan $2 \leq n_i < 23$, maka

$$\chi_L(Amal\{F_{n_i}P_{m_i}, b\}_2) = \begin{cases} 4, & \text{untuk } 2 \leq n_i \leq 4, \\ 5, & \text{untuk } 5 \leq n_i \leq 15, \\ 6, & \text{untuk } 16 \leq n_i < 23. \end{cases}$$

Bukti. Misalkan terdapat graf amalgamasi kipas berekor $Amal\{F_{n_i}P_{m_i}, b\}_2$ dengan $m_i \geq 2$ dan $2 \leq n_i < 23$. Graf $Amal\{F_{n_i}P_{m_i}, b\}_2$ merupakan graf yang diperoleh dari hasil amalgamasi 2-buah graf kipas berekor yang homogen yang dihubungkan oleh suatu titik b , dimana titik b adalah titik hasil identifikasi dari graf $F_{n_i}P_{m_i}$ untuk $i = 1, 2$.

Definisikan suatu pewarnaan $c : V(Amal\{F_{n_i}P_{m_i}, b\}_2) \rightarrow \{1, 2, \dots, q\}$. Pemberian warna untuk setiap titik pada graf lintasan (P_{m_i}) memenuhi ketentuan sebagai berikut.

1. Hanya dua warna sebarang yang bisa diambil dari pewarnaan graf F_{m_i} .
2. Dua warna tersebut bisa digunakan berulang pada setiap titik di graf P_{m_i} .

Jika pewarnaan titik-titik pada graf P_{m_i} sesuai dengan ketentuan di atas, maka kode warna dari titik-titik pada graf P_{m_i} akan dibedakan oleh kelas warna selain kelas warna pada graf P_{m_i} . Untuk pewarnaan titik b , ambil satu warna sebarang dari warna yang diberikan pada titik-titik di graf $F_{n_i}P_{m_i}$. Tanpa mengurangi perumuman, misalkan $c(b) = 3$. Akibatnya, titik-titik pada graf $Amal\{F_{n_i}P_{m_i}, b\}_2$ akan memiliki kode warna yang berbeda, yang dibedakan oleh kelas warna S_i dengan $i = 3$. Perhatikan beberapa kasus berikut.

Kasus 1. $2 \leq n_i \leq 4$ dan $m_i \geq 2$.

Definisikan pewarnaan $c : V(Amal\{F_{n_i}P_{m_i}, b\}_2) \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ dan $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$, dimana Π adalah suatu himpunan partisi titik-titik pada graf $Amal\{F_{n_i}P_{m_i}, b\}_2$ dengan S_i menyatakan kelas

warna ke- i untuk $1 \leq i \leq 4$. Selanjutnya ditentukan n yang memenuhi pewarnaan 4-lokasi dari graf $Amal\{F_{n_i}P_{m_i}, b\}_2$. Warna yang dapat dikombinasikan pada titik-titik pada graf $Amal\{F_{n_i}P_{m_i}, b\}_2$ ada empat warna. Empat warna yang dikombinasikan pada graf $Amal\{F_{n_i}P_{m_i}, b\}_2$ hanya dipenuhi oleh $2 \leq n_i \leq 4$ dapat dilihat pada Tabel 1.

Tabel 1. Kombinasi warna Pewarnaan 4-lokasi graf $Amal\{F_{n_i}P_{m_i}, b\}_2$

n_i	Pewarnaan 4-lokasi graf $Amal\{F_{n_i}P_{m_i}, b\}_2$ $[c_{y_{1,m_1}}, c_{v_{1,1}}, c_{v_{1,2}}, \dots, c_{v_{1,n}}; c_{y_{2,m_2}}, c_{v_{2,1}}, c_{v_{2,2}}, \dots, c_{v_{2,n}}]$
2	[1,2,3; 1,4,2]
3	[1,2,3,4; 2,3,4,1]
4	[1,2,3,4,3; 2,3,4,1,4]

Selanjutnya ditentukan $\chi_L (Amal\{F_{n_i}P_{m_i}, b\}_2) = 4$ untuk $2 \leq n_i \leq 4$ dan $m_i \geq 2$ yang dijelaskan dalam beberapa subkasus berikut.

Subkasus 1.1 Untuk $n_i = 2$ dan $m_i \geq 2$.

Definisikan pewarnaan $c: V (Amal\{F_2P_{m_i}, b\}_2) \rightarrow \{1,2,3,4\}$, sedemikian sehingga.

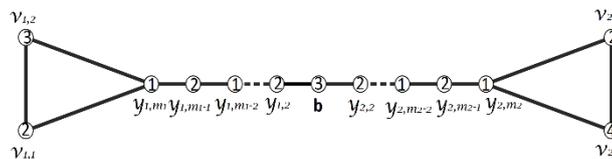
$$c(y_{1,m_1}) = c(y_{1,m_1-2}) = c(y_{2,m_2-2}) = c(y_{2,m_2}) = 1,$$

$$c(v_{1,1}) = c(v_{2,2}) = c(y_{1,m_1-1}) = c(y_{2,2}) = c(y_{2,m_2-1}) = 2,$$

$$c(b) = c(v_{1,2}) = 3,$$

$$c(v_{2,1}) = 4.$$

Pada Gambar 2 diberikan suatu pewarnaan 4-lokasi terhadap graf $Amal\{F_2P_{m_i}, b\}_2$.



Gambar 2. Pewarnaan 4-lokasi untuk $Amal\{F_2P_{m_i}, b\}_2$

Kode warna dari titik-titik pada graf $Amal\{F_2P_{m_i}, b\}_2$ terhadap Π disajikan sebagai berikut.

$$c_{\Pi}(v_{1,1}) = (d(v_{1,1}, S_1), d(v_{1,1}, S_2), d(v_{1,1}, S_3), d(v_{1,1}, S_4)) = (1,0,1,2m_i),$$

$$c_{\Pi}(v_{1,2}) = (d(v_{1,2}, S_1), d(v_{1,2}, S_2), d(v_{1,2}, S_3), d(v_{1,2}, S_4)) = (1,1,0,2m_i),$$

$$c_{\Pi}(v_{2,1}) = (d(v_{2,1}, S_1), d(v_{2,1}, S_2), d(v_{2,1}, S_3), d(v_{2,1}, S_4)) = (1,0,2m_i, 1),$$

$$c_{\Pi}(v_{2,2}) = (d(v_{2,2}, S_1), d(v_{2,2}, S_2), d(v_{2,2}, S_3), d(v_{2,2}, S_4)) = (1,1,2m_i, 0).$$

Dari penyajian kode warna di atas, dapat dilihat bahwa titik-titik graf $Amal\{F_2P_{m_i}, b\}_2$ memiliki kode warna yang berbeda. Untuk pewarnaan pada titik-titik graf P_{m_i} menggunakan ketentuan yang telah dipaparkan sebelumnya sehingga kode warna untuk setiap titik pada graf P_{m_i} pasti berbeda. Kode warna untuk setiap titik pada graf $Amal\{F_2P_{m_i}, b\}_2$ dibedakan oleh kelas warna S_i dengan $i = 3,4$, maka diperoleh $\chi_L (Amal\{F_{n_i}P_{m_i}, b\}_2) \leq 4$ untuk $n_i = 2$.

Subkasus 1.2 Untuk $n_i = 3$ dan $m_i \geq 2$.

Definisikan pewarnaan $c: V (Amal\{F_3P_{m_i}, b\}_2) \rightarrow \{1,2,3,4\}$, sedemikian sehingga.

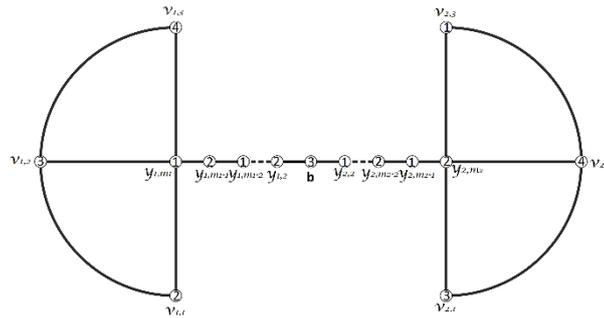
$$c(y_{1,m_1}) = c(y_{1,m_1-2}) = c(y_{2,2}) = c(y_{2,m_2-1}) = (v_{2,3}) = 1,$$

$$c(v_{1,1}) = c(y_{1,2}) = c(y_{1,m_1-1}) = c(y_{2,m_2-2}) = c(y_{2,m_2}) = 2,$$

$$c(b) = c(v_{1,2}) = c(v_{2,1}) = 3,$$

$$c(v_{1,3}) = c(v_{2,2}) = 4.$$

Pada Gambar 3 diberikan suatu pewarnaan 4-lokasi terhadap graf $Amal\{F_3P_{m_i}, b\}_2$.



Gambar 3. Pewarnaan 4-lokasi untuk $Amal\{F_3P_{m_i}, b\}_2$

Kode warna dari titik-titik pada graf $Amal\{F_3P_{m_i}, b\}_2$ terhadap Π disajikan sebagai berikut.

$$c_{\Pi}(v_{1,1}) = (d(v_{1,1}, S_1), d(v_{1,1}, S_2), d(v_{1,1}, S_3), d(v_{1,1}, S_4)) = (1,0,1,2),$$

$$c_{\Pi}(v_{1,2}) = (d(v_{1,2}, S_1), d(v_{1,2}, S_2), d(v_{1,2}, S_3), d(v_{1,2}, S_4)) = (1,1,0,1),$$

$$c_{\Pi}(v_{1,3}) = (1,2,1,0), c_{\Pi}(v_{2,1}) = (2,1,0,1), c_{\Pi}(v_{2,2}) = (1,1,1,0), c_{\Pi}(v_{2,3}) = (0,1,2,1).$$

Dari penyajian kode warna di atas, dapat dilihat bahwa titik-titik graf $Amal\{F_3P_{m_i}, b\}_2$ memiliki kode warna yang berbeda. Kode warna untuk setiap titik pada graf $Amal\{F_3P_{m_i}, b\}_2$ dibedakan oleh kelas warna S_i dengan $i = 3,4$, maka diperoleh $\chi_L (Amal\{F_{n_i}P_{m_i}, b\}_2) \leq 4$ untuk $n_i = 3$.

Subkasus 1.3 Untuk $n_i = 4$ dan $m_i \geq 2$.

Definisikan pewarnaan $c: V (Amal\{F_4P_{m_i}, b\}_2) \rightarrow \{1,2,3,4\}$, sedemikian sehingga.

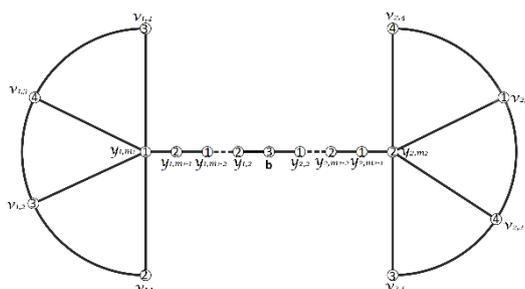
$$c(y_{1,m_1}) = c(y_{1,m_1-2}) = c(y_{2,2}) = c(y_{2,m_2-1}) = c(v_{2,3}) = 1,$$

$$c(v_{1,1}) = c(y_{1,2}) = c(y_{1,m_1-1}) = c(y_{2,m_2-2}) = c(y_{2,m_2}) = 2,$$

$$c(b) = c(v_{1,2}) = c(v_{1,4}) = c(v_{2,1}) = 3,$$

$$c(v_{1,3}) = c(v_{2,2}) = c(v_{2,4}) = 4.$$

Pada Gambar 4 diberikan suatu pewarnaan 4-lokasi terhadap graf $Amal\{F_4P_{m_i}, b\}_2$.



Gambar 4. Pewarnaan 4-lokasi untuk $Amal\{F_4P_{m_i}, b\}_2$

Kode warna dari titik-titik pada graf $Amal\{F_4P_{m_i}, b\}_2$ terhadap Π disajikan sebagai berikut.

$$c_{\Pi}(v_{1,1}) = (d(v_{1,1}, S_1), d(v_{1,1}, S_2), d(v_{1,1}, S_3), d(v_{1,1}, S_4)) = (1, 0, 1, 2),$$

$$c_{\Pi}(v_{1,2}) = (d(v_{1,2}, S_1), d(v_{1,2}, S_2), d(v_{1,2}, S_3), d(v_{1,2}, S_4)) = (1, 1, 0, 1),$$

$$c_{\Pi}(v_{1,3}) = (1, 2, 1, 0), c_{\Pi}(v_{1,4}) = (1, 2, 0, 1), c_{\Pi}(v_{2,1}) = (2, 1, 0, 1), c_{\Pi}(v_{2,2}) = (1, 1, 1, 0),$$

$$c_{\Pi}(v_{2,3}) = (0, 1, 2, 1), c_{\Pi}(v_{2,4}) = (1, 1, 2, 0).$$

Dari penyajian kode warna di atas, dapat dilihat bahwa titik-titik graf $Amal\{F_4P_{m_i}, b\}_2$ memiliki kode warna yang berbeda, maka terbukti bahwa $\chi_L(Amal\{F_4P_{m_i}, b\}_2) \leq 4$. Untuk pewarnaan pada titik-titik graf P_{m_i} menggunakan ketentuan yang telah dipaparkan sebelumnya sehingga kode warna untuk setiap titik pada graf P_{m_i} pasti berbeda. Kode warna untuk setiap titik pada graf $Amal\{F_4P_{m_i}, b\}_2$ dibedakan oleh kelas warna S_i dengan $i = 3, 4$.

Selanjutnya akan ditentukan batas bawah $\chi_L(Amal\{F_4P_{m_i}, b\}_2) \geq 4$ untuk $2 \leq n_i \leq 4$, pewarnaan graf kipas pertama F_{n_1} mengikuti pola pewarnaan pada graf kipas pada Teorema 3. Untuk pewarnaan graf kipas kedua F_{n_2} merupakan modifikasi dari pewarnaan titik-titik pada graf kipas pertama F_{n_1} yaitu dengan menambahkan warna di graf kipas pertama F_{n_1} dengan 1 sehingga memenuhi pewarnaan lokasi. Andaikan $Amal\{F_{n_i}P_{m_i}, b\}_2$ mempunyai 3-pewarnaan lokasi maka $Amal\{F_{n_i}P_{m_i}, b\}_2$ mempunyai paling sedikit dua titik dominan dengan warna yang sama.

Akibatnya, $\chi_L \left(Amal\{F_{n_i}P_{m_i}, b\}_2 \right) \geq 4$ dipenuhi oleh $2 \leq n_i \leq 4$. Jadi, $\chi_L \left(Amal\{F_{n_i}P_{m_i}, b\}_2 \right) = 4$ untuk $2 \leq n_i \leq 4$.

Kasus 2. Untuk $5 \leq n_i \leq 15$ dan $m_i \geq 2$.

Definisikan pewarnaan $c : V \left(Amal\{F_{n_i}P_{m_i}, b\}_2 \right) \rightarrow \{1,2,3,4,5\}$ dan $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\}$ dimana Π adalah suatu himpunan partisi titik-titik pada graf $Amal\{F_{n_i}P_{m_i}, b\}_2$ dengan S_i menyatakan kelas warna ke- i untuk $1 \leq i \leq 5$. Selanjutnya akan ditentukan n yang memenuhi pewarnaan 5-lokasi dari graf $Amal\{F_{n_i}P_{m_i}, b\}_2$. Warna yang dapat dikombinasikan pada titik-titik pada graf $Amal\{F_{n_i}P_{m_i}, b\}_2$ ada lima warna. Lima warna yang akan dikombinasikan pada graf $Amal\{F_{n_i}P_{m_i}, b\}_2$ hanya dipenuhi oleh $5 \leq n_i \leq 15$ dapat dilihat pada Tabel 2.

Tabel 2. Kombinasi warna Pewarnaan 5-lokasi graf $Amal\{F_{n_i}P_{m_i}, b\}_2$

n_i	Pewarnaan 5-lokasi graf $Amal\{F_{n_i}P_{m_i}, b\}_2$ [$c_{y_{1,m_1}}, c_{v_{1,1}}, c_{v_{1,2}}, \dots, c_{v_{1,n}}; c_{y_{2,m_2}}, c_{v_{2,1}}, c_{v_{2,2}}, \dots, c_{v_{2,n}}$]
5	[1,2,3,4,5, 2; 2,3,4,5,3,1]
6	[1,2,3,4,5,2,3; 2,3,4,5,3,1,5]
7	[1,2,3,4,5,4,5,2; 2,1,3,5, 4,3,5,1]
8	[1,2,3,4,5,4,5,2,3; 2,1,3,5,4,3,5,1,5]
9	[1,2,3,4,5,4,5,2,3,5; 2,1,4,3,5,3,5,1,4,5]
10	[1,2,3,4,5,4,5,2,3,5,2; 2,1,4,3,5,3,5,4,1,3,1]
11	[1,2,3,4,5,4,5,2,3,5, 2,4; 2,1,4,3,5,3,5,4,1,3,1,5]
12	[1,2,3,4,5,4,5,2,3,5,2,4,2; 2,1,4,3,5,3,5,4,5,4,1,5,1]
13	[1,2,3,4,5,3,2,4,5,2,5,3,4,2; 5,1,2,3,2,3,4,2,4,2,1,3,1,4]
14	[1,2,3,4,5,3,2,4,5,2,5,3,4,2,4; 5,1,2,3,2,3,4,2,4,2,1,3,1,4,1]
15	[1,2,3,4,5,3,2,4,5,2,5,3,4,3,4,2; 5,1,3,1,2,3,2,3,4,3,4,2,4,2,1,4]

Selanjutnya akan ditentukan $\chi_L \left(Amal\{F_{n_i}P_{m_i}, b\}_2 \right) = 5$ untuk $5 \leq n_i \leq 15$ dan $m_i \geq 2$ yang akan dijelaskan dalam beberapa subkasus berikut.

Subkasus 2.1 Untuk $n_i = 5$ dan $m_i \geq 2$.

Definisikan pewarnaan $c : V \left(Amal\{F_5P_{m_i}, b\}_2 \right) \rightarrow \{1,2,3,4,5\}$, sedemikian sehingga.

$$c(y_{1,m_1}) = c(y_{1,m_1-2}) = c(y_{2,2}) = c(y_{2,m_2-1}) = c(v_{2,5}) = 1,$$

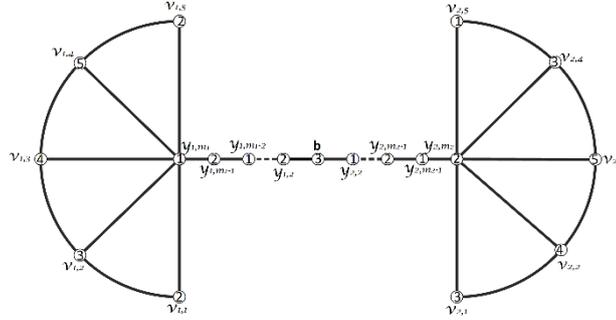
$$c(v_{1,1}) = c(v_{1,5}) = c(y_{1,2}) = c(y_{1,m_1-1}) = c(y_{2,m_2-2}) = c(y_{2,m_2}) = 2,$$

$$c(b) = c(v_{1,2}) = c(v_{2,1}) = c(v_{2,4}) = 3,$$

$$c(v_{1,3}) = c(v_{2,2}) = 4,$$

$$c(v_{1,4}) = c(v_{2,3}) = 5.$$

Pada Gambar 5 diberikan suatu pewarnaan 5-lokasi terhadap graf $Amal\{F_5P_{m_i}, b\}_2$.



Gambar 5. Pewarnaan 5-lokasi untuk $Amal\{F_5P_{m_i}, b\}_2$

Kode warna dari titik-titik pada graf $Amal\{F_5P_{m_i}, b\}_2$ terhadap Π disajikan sebagai berikut.

$$c_{\Pi}(v_{1,1}) = (d(v_{1,1}, S_1), d(v_{1,1}, S_2), d(v_{1,1}, S_3), d(v_{1,1}, S_4), d(v_{1,1}, S_5)) = (1, 0, 1, 2, 2),$$

$$c_{\Pi}(v_{1,2}) = (1, 1, 0, 1, 2), c_{\Pi}(v_{1,3}) = (1, 2, 1, 0, 1), c_{\Pi}(v_{1,4}) = (1, 1, 2, 1, 0), c_{\Pi}(v_{1,5}) = (1, 0, 2, 2, 1),$$

$$c_{\Pi}(v_{2,1}) = (2, 1, 0, 1, 2), c_{\Pi}(v_{2,2}) = (2, 1, 1, 0, 1), c_{\Pi}(v_{2,3}) = (2, 1, 1, 1, 0), c_{\Pi}(v_{2,4}) = (1, 1, 0, 2, 1)$$

$$c_{\Pi}(v_{2,5}) = (0, 1, 1, 2, 2).$$

Dari penyajian kode warna di atas, dapat dilihat bahwa titik-titik graf $Amal\{F_5P_{m_i}, b\}_2$ memiliki kode warna yang berbeda. Kode warna untuk setiap titik pada graf $Amal\{F_5P_{m_i}, b\}_2$ dibedakan oleh kelas warna S_i dengan $i = 3, 4, 5$, maka diperoleh $\chi_L (Amal\{F_{n_i}P_{m_i}, b\}_2) \leq 5$ untuk $n_i = 5$.

Subkasus 2.2 Untuk $6 \leq n_i \leq 14$ dan $m_i \geq 2$.

Pembuktian $\chi_L (Amal\{F_{n_i}P_{m_i}, b\}_2) \leq 5$ untuk $6 \leq n_i \leq 14$ dan $m_i \geq 2$ mengacu pada pembuktian yang dipaparkan pada Subkasus 2.1 dan Tabel 2. Oleh karena itu, pewarnaan 5-lokasi dipenuhi oleh $6 \leq n_i \leq 14$. Akibatnya, diperoleh $\chi_L (Amal\{F_{n_i}P_{m_i}, b\}_2) \leq 5$ untuk $6 \leq n_i \leq 14$.

Subkasus 2.3 Untuk $n_i = 15$ dan $m_i \geq 2$.

Definisikan pewarnaan $c: V (Amal\{F_{15}P_{m_i}, b\}_2) \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$, sedemikian sehingga.

$$c(y_{1,m_i}) = c(y_{1,m_i-2}) = c(y_{2,m_i-2}) = c(v_{2,1}) = c(v_{2,1}) = c(v_{2,3}) = c(v_{2,14}) = 1,$$

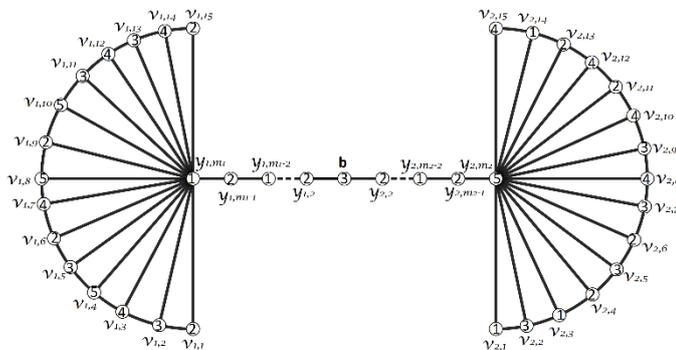
$$c(v_{1,1}) = c(v_{1,6}) = c(v_{1,9}) = c(v_{1,15}) = c(y_{1,2}) = c(y_{1,m_i-1}) = c(y_{2,m_i-1}) = c(y_{2,2}) = c(v_{2,4}) \\ = c(v_{2,6}) = c(v_{2,11}) = c(v_{2,13}) = 2,$$

$$c(b) = c(v_{1,2}) = c(v_{1,5}) = c(v_{1,11}) = c(v_{1,13}) = c(v_{2,2}) = c(v_{2,5}) = c(v_{2,7}) = c(v_{2,9}) = 3,$$

$$c(v_{1,3}) = c(v_{1,7}) = c(v_{1,12}) = c(v_{1,14}) = c(v_{2,8}) = c(v_{2,10}) = c(v_{2,12}) = c(v_{2,15}) = 4,$$

$$c(v_{1,4}) = c(v_{1,8}) = c(v_{1,10}) = c(y_{2,m_2}) = 5.$$

Pada Gambar 6 diberikan suatu pewarnaan 5-lokasi terhadap graf $Amal\{F_{15}P_{m_i}, b\}_2$.



Gambar 6. Pewarnaan 5-lokasi untuk $Amal\{F_{15}P_{m_i}, b\}_2$

Kode warna dari titik-titik pada graf $Amal\{F_{15}P_{m_i}, b\}_2$ terhadap Π disajikan sebagai berikut.

$$c_{\Pi}(v_{1,1}) = (1,0,1,2,2), c_{\Pi}(v_{1,2}) = (1,1,0,1,2), c_{\Pi}(v_{1,3}) = (1,2,1,0,1), c_{\Pi}(v_{1,4}) = (1,2,1,1,0),$$

$$c_{\Pi}(v_{1,5}) = (1,1,0,2,1), c_{\Pi}(v_{1,6}) = (1,0,1,1,2), c_{\Pi}(v_{1,7}) = (1,1,2,0,1), c_{\Pi}(v_{1,8}) = (1,1,2,1,0),$$

$$c_{\Pi}(v_{1,9}) = (1,0,2,2,1), c_{\Pi}(v_{1,10}) = (1,1,1,2,0), c_{\Pi}(v_{1,11}) = (1,2,0,1,1), c_{\Pi}(v_{1,12}) = (1,2,1,0,2),$$

$$c_{\Pi}(v_{1,13}) = (1,2,0,1,2), c_{\Pi}(v_{1,14}) = (1,1,1,0,2), c_{\Pi}(v_{1,15}) = (1,0,2,1,2), c_{\Pi}(v_{2,1}) = (0,2,1,2,1),$$

$$c_{\Pi}(v_{2,2}) = (1,2,0,2,1), c_{\Pi}(v_{2,3}) = (0,1,1,2,1), c_{\Pi}(v_{2,4}) = (1,0,1,2,1), c_{\Pi}(v_{2,5}) = (2,1,0,2,1),$$

$$c_{\Pi}(v_{2,6}) = (2,0,1,2,1), c_{\Pi}(v_{2,7}) = (2,1,0,1,1), c_{\Pi}(v_{2,8}) = (2,2,1,0,1), c_{\Pi}(v_{2,9}) = (2,2,0,1,1),$$

$$c_{\Pi}(v_{2,10}) = (2,1,1,0,1), c_{\Pi}(v_{2,11}) = (2,0,2,1,1), c_{\Pi}(v_{2,12}) = (2,1,2,0,1), c_{\Pi}(v_{2,13}) = (1,0,2,1,1),$$

$$c_{\Pi}(v_{2,14}) = (0,1,2,1,1), c_{\Pi}(v_{2,15}) = (1,2,2,0,1).$$

Dari penyajian kode warna di atas, dapat dilihat bahwa titik-titik graf $Amal\{F_{15}P_{m_i}, b\}_2$ memiliki kode warna yang berbeda. Kode warna untuk setiap titik pada graf $Amal\{F_{15}P_{m_i}, b\}_2$ dibedakan oleh kelas warna S_i dengan $i = 3,4,5$, maka diperoleh $\chi_L(Amal\{F_{n_i}P_{m_i}, b\}_2) \leq 5$ untuk $n_i = 15$. Selanjutnya pembuktian batas bawah $\chi_L(Amal\{F_{n_i}P_{m_i}, b\}_2) \geq 5$ untuk $5 \leq n_i \leq 15$ mengacu pada pembuktian batas bawah yang dipaparkan pada Subkasus 1.3. Andaikan $Amal\{F_{n_i}P_{m_i}, b\}_2$ untuk $5 \leq n_i \leq 15$ mempunyai 4-pewarnaan lokasi maka terdapat paling sedikit dua titik dengan kode warna yang sama. Akibatnya, $\chi_L(Amal\{F_{n_i}P_{m_i}, b\}_2) \geq 5$ dipenuhi oleh $5 \leq n_i \leq 15$. Jadi, $\chi_L(Amal\{F_{n_i}P_{m_i}, b\}_2) = 5$ untuk $5 \leq n_i \leq 15$.

Kasus 3. Untuk $6 \leq n_i < 23$ dan $m_i \geq 2$.

Definisikan pewarnaan $c : V \left(Amal\{F_{n_i}P_{m_i}, b\}_2 \right) \rightarrow \{1,2,3,4,5,6\}$ dan $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6\}$ dimana Π adalah suatu himpunan partisi titik-titik pada graf $Amal\{F_{n_i}P_{m_i}, b\}_2$ dengan S_i menyatakan kelas warna ke- i untuk $1 \leq i \leq 6$. Selanjutnya akan ditentukan n yang memenuhi pewarnaan 5-lokasi dari graf $Amal\{F_{n_i}P_{m_i}, b\}_2$. Warna yang dapat dikombinasikan pada titik-titik pada graf $Amal\{F_{n_i}P_{m_i}, b\}_2$ ada enam warna. Enam warna yang akan dikombinasikan pada graf $Amal\{F_{n_i}P_{m_i}, b\}_2$ dipenuhi oleh $16 \leq n_i < 23$ dapat dilihat pada Tabel 3.

Tabel 3. Kombinasi warna Pewarnaan 6-lokasi graf $Amal\{F_{n_i}P_{m_i}, b\}_2$

n_i	Pewarnaan 6-lokasi graf $Amal\{F_{n_i}P_{m_i}, b\}_2$ [$c_{y_{1,m_1}}, c_{v_{1,1}}, c_{v_{1,2}}, \dots, c_{v_{1,n}}; c_{y_{2,m_2}}, c_{v_{2,1}}, c_{v_{2,2}}, \dots, c_{v_{2,n}}$]
16	[1,2,3,4,5,6,2,3,2,4,2,4,3,5,2,5, 4; 2,3,4,5,6,3,4,6,5,3,6,4, 5,3,1,4,5]
17	[1,2,3,4,5,6,2,3,2,4,2,4,3,5,2, 5,4, 5; 2,3,4,5,6,3,4,6,5,3,6,4, 5,3,1,5,6,5]
18	[1,2,3,4,5,6,2,3,2,4,2,4,3,5,2,5,4,5,3; 2,3,4,5,6,3,4,6,5,3,6,4,5,4,1,4,6,1,5]
19	[1,2,3,4,5,6,4,5,2,3,6,2,3,5,4,5,4,2,6,2; 2,1,3,1,6,5,4,3,4,6,5,6,5,1,4,3,5,4,6,4]
20	[1,2,3,4,5,6,4,5,2,3,6,2,3,5,4,5,4,2,6,2,5; 2,1,3,1,6,5,4,3,4,6,5,6,5,1,4,3,5,4,6,4,1]
21	[1,2,3,4,5,6,4,5,2,3,6,2,3,5,4,5,4,2,6,2,5,2; 2,1,3,1,6,5,4,3,4,6,5,6,5,1,4,3,5,4,6,4,6,3]
22	[1,2,3,4,5,6,4,5,2,3,6,2,3,5,4,5,4,2,6,2,5,2,4; 2,1,3,1,6,5,4,3,4,6,5,6,5,1,4,3,5,4,6,4,6,3,5]

Karena pada penelitian ini dibatasi untuk $2 \leq n_i < 23$ maka tidak menutup kemungkinan bahwa $\chi_L \left(Amal\{F_{n_i}P_{m_i}, b\}_2 \right) = 6$ masih bisa digunakan untuk $n_i \geq 23$.

Selanjutnya dibuktikan bahwa $\chi_L \left(Amal\{F_{n_i}P_{m_i}, b\}_2 \right) = 6$ untuk $6 \leq n_i < 23$ dan $m_i \geq 2$ yang akan dijelaskan dalam beberapa subkasus berikut.

Subkasus 3.1 Untuk $n_i = 16$ dan $m_i \geq 2$.

Definisikan pewarnaan $c : V \left(Amal\{F_{16}P_{m_i}, b\}_2 \right) \rightarrow \{1,2,3,4,5,6\}$, sedemikian sehingga.

$$c(y_{1,m_1}) = c(y_{1,m_1-2}) = c(y_{2,2}) = c(y_{2,m_2-1}) = c(v_{2,14}) = 1,$$

$$c(v_{1,1}) = c(v_{1,6}) = c(v_{1,8}) = c(v_{1,10}) = c(v_{1,14}) = c(y_{1,2}) = c(y_{1,m_1-1}) = c(y_{2,m_2-2}) \\ = c(y_{2,m_2}) = 2,$$

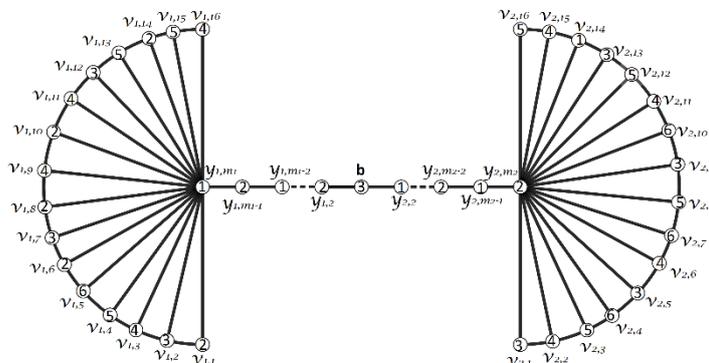
$$c(b) = c(v_{1,2}) = c(v_{1,7}) = c(v_{1,12}) = c(v_{2,1}) = c(v_{2,5}) = c(v_{2,5}) = c(v_{2,9}) = c(v_{2,13}) = 3,$$

$$c(v_{1,3}) = c(v_{1,9}) = c(v_{1,11}) = c(v_{1,16}) = c(v_{2,8}) = c(v_{2,2}) = c(v_{2,6}) = c(v_{2,11}) = c(v_{2,15}) = 4,$$

$$c(v_{1,4}) = c(v_{1,13}) = c(v_{1,15}) = c(v_{2,3}) = c(v_{2,8}) = c(v_{2,12}) = c(v_{2,16}) = 5,$$

$$c(v_{1,5}) = c(v_{2,4}) = c(v_{2,7}) = c(v_{2,10}) = 6.$$

Pada Gambar 7 diberikan suatu pewarnaan 6-lokasi terhadap graf $Amal\{F_{16}P_{m_i}, b\}_2$.



Gambar 7. Pewarnaan 6-lokasi untuk $Amal\{F_{16}P_{m_i}, b\}_2$

Kode warna dari titik-titik pada graf $Amal\{F_{16}P_{m_i}, b\}_2$ terhadap Π disajikan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} c_{\Pi}(v_{1,1}) &= (1,0,1,2,2,2), & c_{\Pi}(v_{1,2}) &= (1,1,0,1,2,2), & c_{\Pi}(v_{1,3}) &= (1,2,1,0,1,2), \\ c_{\Pi}(v_{1,4}) &= (1,2,2,1,0,1), & c_{\Pi}(v_{1,5}) &= (1,1,2,2,1,0), & c_{\Pi}(v_{1,6}) &= (1,0,1,2,2,1), \\ c_{\Pi}(v_{1,7}) &= (1,1,0,2,2,2), & c_{\Pi}(v_{1,8}) &= (1,0,1,1,2,2), & c_{\Pi}(v_{1,9}) &= (1,1,2,0,2,2), \\ c_{\Pi}(v_{1,10}) &= (1,0,2,1,2,2), & c_{\Pi}(v_{1,11}) &= (1,1,1,0,2,2), & c_{\Pi}(v_{1,12}) &= (1,2,0,1,1,2), \\ c_{\Pi}(v_{1,13}) &= (1,1,1,2,0,2), & c_{\Pi}(v_{1,14}) &= (1,0,2,2,1,2), & c_{\Pi}(v_{1,15}) &= (1,1,2,1,0,2), \\ c_{\Pi}(v_{1,16}) &= (1,2,2,0,1,2), & c_{\Pi}(v_{2,1}) &= (2,1,0,1,2,2), & c_{\Pi}(v_{2,2}) &= (2,1,1,0,1,2), \\ c_{\Pi}(v_{2,3}) &= (2,1,2,1,0,1), & c_{\Pi}(v_{2,4}) &= (2,1,1,2,1,0), & c_{\Pi}(v_{2,5}) &= (2,1,0,1,2,1), \\ c_{\Pi}(v_{2,6}) &= (2,1,1,0,2,1), & c_{\Pi}(v_{2,7}) &= (2,1,2,1,1,0), & c_{\Pi}(v_{2,8}) &= (2,1,1,2,0,1), \\ c_{\Pi}(v_{2,9}) &= (2,1,0,2,1,1), & c_{\Pi}(v_{2,10}) &= (2,1,1,1,2,0), & c_{\Pi}(v_{2,11}) &= (2,1,2,0,1,2), \\ c_{\Pi}(v_{2,12}) &= (2,1,1,1,0,2), & c_{\Pi}(v_{2,13}) &= (1,1,0,2,1,2), & c_{\Pi}(v_{2,14}) &= (0,1,1,1,2,2), \\ c_{\Pi}(v_{2,15}) &= (1,1,2,0,1,2), & c_{\Pi}(v_{2,16}) &= (2,1,2,1,0,2). \end{aligned}$$

Dari penyajian kode warna di atas, dapat dilihat bahwa titik-titik graf $Amal\{F_{16}P_{m_i}, b\}_2$ memiliki kode warna yang berbeda. Kode warna untuk setiap titik pada graf $Amal\{F_{16}P_{m_i}, b\}_2$ dibedakan oleh kelas warna S_i dengan $i = 3,4,5,6$, maka diperoleh $\chi_L (Amal\{F_{n_i}P_{m_i}, b\}_2) \leq 6$ untuk $n_i = 16$.

Subkasus 3.2 Untuk $17 \leq n_i \leq 21$ dan $m_i \geq 2$.

Pembuktian $\chi_L (Amal\{F_{n_i}P_{m_i}, b\}_2) \leq 6$ untuk $17 \leq n_i \leq 21$ dan $m_i \geq 2$ mengacu pada pembuktian yang dipaparkan pada Subkasus 3.1 dan Tabel 3. Oleh karena itu, pewarnaan 6-lokasi

dipenuhi oleh $17 \leq n_i \leq 21$. Akibatnya, diperoleh $\chi_L \left(Amal\{F_{n_i}P_{m_i}, b\}_2 \right) \leq 6$ untuk $17 \leq n_i \leq 21$.

Subkasus 3.3 Untuk $n_i = 22$ dan $m_i \geq 2$.

Definisikan pewarnaan $c: V \left(Amal\{F_{22}P_{m_i}, b\}_2 \right) \rightarrow \{1,2,3,4,5,6\}$, sedemikian sehingga.

$$c(y_{1,m_1}) = c(y_{1,m_1-2}) = c(y_{2,2}) = c(y_{2,m_2-1}) = c(v_{2,1}) = c(v_{2,3}) = c(v_{2,13}) = 1,$$

$$c(v_{1,1}) = c(v_{1,8}) = c(v_{1,11}) = c(v_{1,17}) = c(v_{1,19}) = c(v_{1,21}) = c(y_{1,2}) = c(y_{1,m_1-1})$$

$$= c(y_{2,m_2-2}) = c(y_{2,m_2}) = 2,$$

$$c(b) = c(v_{1,2}) = c(v_{1,9}) = c(v_{1,12}) = c(v_{2,2}) = c(v_{2,7}) = c(v_{2,15}) = c(v_{2,21}) = 3,$$

$$c(v_{1,3}) = c(v_{1,6}) = c(v_{1,14}) = c(v_{1,16}) = c(v_{1,22}) = c(v_{2,6}) = c(v_{2,8}) = c(v_{2,14}) = c(v_{2,17})$$

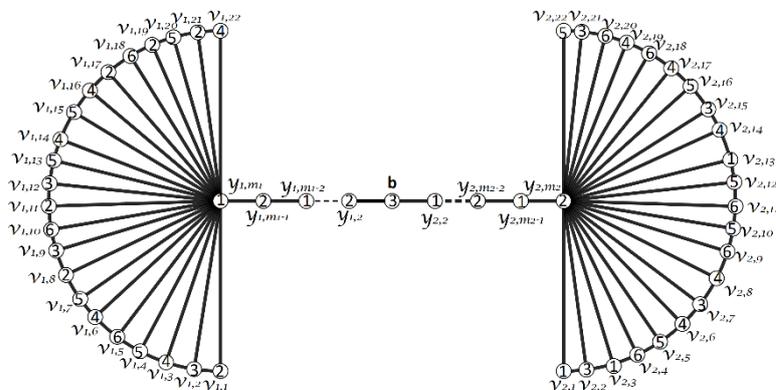
$$= c(v_{2,19}) = 4,$$

$$c(v_{1,4}) = c(v_{1,7}) = c(v_{1,13}) = c(v_{1,15}) = c(v_{1,20}) = c(v_{2,5}) = c(v_{2,10}) = c(v_{2,12}) = c(v_{2,16})$$

$$= c(v_{2,22}) = 5,$$

$$c(v_{1,5}) = c(v_{1,10}) = c(v_{1,18}) = c(v_{2,4}) = c(v_{2,9}) = c(v_{2,11}) = c(v_{2,18}) = c(v_{2,20}) = 6.$$

Pada Gambar 8 diberikan suatu pewarnaan 6-lokasi terhadap graf $Amal\{F_{22}P_{m_i}, b\}_2$.



Gambar 8. Pewarnaan 6-lokasi untuk $Amal\{F_{22}P_{m_i}, b\}_2$

Kode warna dari titik-titik pada graf $Amal\{F_{22}P_{m_i}, b\}_2$ terhadap Π disajikan sebagai berikut.

$$c_{\Pi}(v_{1,1}) = (1,0,1,2,2,2), \quad c_{\Pi}(v_{1,2}) = (1,1,0,1,2,2), \quad c_{\Pi}(v_{1,3}) = (1,2,1,0,1,2),$$

$$c_{\Pi}(v_{1,4}) = (1,2,2,1,0,1), \quad c_{\Pi}(v_{1,5}) = (1,2,2,1,1,0), \quad c_{\Pi}(v_{1,6}) = (1,2,2,0,1,1),$$

$$c_{\Pi}(v_{1,7}) = (1,1,2,1,0,2), \quad c_{\Pi}(v_{1,8}) = (1,0,1,2,1,2), \quad c_{\Pi}(v_{1,9}) = (1,1,0,2,2,1),$$

$$c_{\Pi}(v_{1,10}) = (1,1,1,2,2,0), \quad c_{\Pi}(v_{1,11}) = (1,0,1,2,2,1), \quad c_{\Pi}(v_{1,12}) = (1,1,0,2,2,1),$$

$$c_{\Pi}(v_{1,13}) = (1,2,1,1,0,1), \quad c_{\Pi}(v_{1,14}) = (1,2,2,0,1,2), \quad c_{\Pi}(v_{1,15}) = (1,2,2,1,0,2),$$

$$c_{\Pi}(v_{1,16}) = (1,1,2,0,1,2), \quad c_{\Pi}(v_{1,17}) = (1,0,2,1,2,1), \quad c_{\Pi}(v_{1,18}) = (1,1,2,2,2,0),$$

$$\begin{aligned}
c_{\Pi}(v_{1,19}) &= (1,0,2,2,1,1), & c_{\Pi}(v_{1,20}) &= (1,1,2,2,0,2), & c_{\Pi}(v_{1,21}) &= (1,0,2,1,1,2), \\
c_{\Pi}(v_{1,22}) &= (1,1,2,0,2,2), & c_{\Pi}(v_{2,1}) &= (0,1,1,2,2,2), & c_{\Pi}(v_{2,2}) &= (1,1,0,2,2,2), \\
c_{\Pi}(v_{2,3}) &= (0,1,1,2,2,1), & c_{\Pi}(v_{2,4}) &= (1,1,2,2,1,0), & c_{\Pi}(v_{2,5}) &= (2,1,2,1,0,1), \\
c_{\Pi}(v_{2,6}) &= (2,1,1,0,1,2), & c_{\Pi}(v_{2,7}) &= (2,1,0,1,2,2), & c_{\Pi}(v_{2,8}) &= (2,1,1,0,2,1), \\
c_{\Pi}(v_{2,9}) &= (2,1,2,1,1,0), & c_{\Pi}(v_{2,10}) &= (2,1,2,2,0,1), & c_{\Pi}(v_{2,11}) &= (2,1,2,2,1,0), \\
c_{\Pi}(v_{2,12}) &= (1,1,2,2,0,1), & c_{\Pi}(v_{2,13}) &= (0,1,2,1,1,2), & c_{\Pi}(v_{2,14}) &= (1,1,1,0,2,2), \\
c_{\Pi}(v_{2,15}) &= (2,1,0,1,1,2), & c_{\Pi}(v_{2,16}) &= (2,1,1,1,0,2), & c_{\Pi}(v_{2,17}) &= (2,1,2,0,1,1), \\
c_{\Pi}(v_{2,18}) &= (2,1,2,1,2,0), & c_{\Pi}(v_{2,19}) &= (2,1,2,0,2,1), & c_{\Pi}(v_{2,20}) &= (2,1,1,1,2,0), \\
c_{\Pi}(v_{2,21}) &= (2,1,0,2,1,1), & c_{\Pi}(v_{2,22}) &= (2,1,1,2,0,2).
\end{aligned}$$

Dari penyajian kode warna di atas, dapat dilihat bahwa titik-titik graf $Amal\{F_{22}P_{m_i}, b\}_2$ memiliki kode warna yang berbeda. Kode warna untuk setiap titik pada graf $Amal\{F_{22}P_{m_i}, b\}_2$ dibedakan oleh kelas warna S_i dengan $i = 3,4,5,6$, maka diperoleh $\chi_L\left(Amal\{F_{n_i}P_{m_i}, b\}_2\right) \leq 6$ untuk $n_i = 22$. Selanjutnya pembuktian batas bawah untuk $\chi_L\left(Amal\{F_{n_i}P_{m_i}, b\}_2\right) \geq 6$ untuk $16 \leq n_i < 23$ mengacu pada pembuktian batas bawah yang dipaparkan pada Subkasus 1.3. Andaikan $Amal\{F_{n_i}P_{m_i}, b\}_2$ untuk $16 \leq n_i \leq 23$ mempunyai 5-pewarnaan lokasi maka terdapat paling sedikit dua titik dengan kode warna yang sama. Akibatnya, $\chi_L\left(Amal\{F_{n_i}P_{m_i}, b\}_2\right) \geq 6$ dipenuhi oleh $16 \leq n_i < 23$. Jadi, $\chi_L\left(Amal\{F_{n_i}P_{m_i}, b\}_2\right) = 6$ untuk $16 \leq n_i < 23$.

4 Simpulan

Pada penelitian ini diperoleh bilangan kromatik lokasi pada graf amalgamasi kipas berekor ($Amal\{F_{n_i}P_{m_i}, b\}_2$) dengan $m_i \geq 2$ dan $2 \leq n_i < 23$ yaitu,

$$\chi_L(Amal\{F_{n_i}P_{m_i}, b\}_2) = \begin{cases} 4, & \text{untuk } 2 \leq n_i \leq 4, \\ 5, & \text{untuk } 5 \leq n_i \leq 15, \\ 6, & \text{untuk } 16 \leq n_i < 23. \end{cases}$$

Karena pada penelitian ini dibatasi untuk $2 \leq n_i < 23$ maka tidak menutup kemungkinan bahwa $\chi_L\left(Amal\{F_{n_i}P_{m_i}, b\}_2\right) = 6$ masih bisa digunakan untuk $n_i \geq 23$. Hal ini dapat dijadikan masalah untuk penelitian selanjutnya

5 Ucapan Terima Kasih

Penelitian ini didanai oleh Penelitian Dasar FMIPA Universitas Andalas Tahun 2022.

6 Daftar Pustaka

- [1] G. Chartrand, M.A Henning, P.J. Slater, and P. Zhang, "The Locating Chromatic Number of a Graph," *Bull. Inst. Combin. Appl*, vol. 40, no. 6, pp. 89–101, 2002.
- [2] Asmiati, H. Assiyatun, and E. T. Baskoro, "Locating-chromatic number of amalgamation of stars," *ITB Journal of Science*, vol. 43 A, no. 1, 2011, doi: 10.5614/itbj.sci.2011.43.1.1.
- [3] A. Behtoei and M. Anbarloei, "The locating chromatic number of the Join of Graphs," *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, vol. 40, no. 6, 2014.
- [4] D. Welyyanti, E. T. Baskoro, R. Simanjuntak, and S. Uttunggadewa, "THE LOCATING-CHROMATIC NUMBER OF DISCONNECTED GRAPHS," 2014. [Online]. Available: <http://pphmj.com/journals/fjms.htm>
- [5] F. Zikra, "Bilangan Kromatik Lokasi Gabungan Graf Kipas," Universitas Andalas, Padang, 2022.
- [6] J. A. Bondy and U.S.R Murty, *Graph Theory with Applications*. New York: Elsevier Science Publishing, 1976.
- [7]. M. Ansori, "Bilangan Rainbow Connection pada Graf Amalgamasi Graf Kipas Berekor," Universitas Andalas, Padang, 2021.