Limits: Journal of Mathematics and Its Applications
E-ISSN: 2579-8936
P-ISSN: 1829-605X
Vol. 20, No. 2, Juli 2023, 191-208
DOI: http://dx.doi.org/10.12962/limits.v20i2.12954

Operator Solusi Model Fluida Termampatkan Tipe Korteweg Dengan Kondisi Batas *Slip* di *Half-Space* Kasus Koefisien $\left(\frac{\mu+\nu}{2\,\kappa}\right)^2 - \left(\frac{1}{\kappa}\right) \neq 0,\ \kappa = \mu\,\nu,\ \mu \neq \nu.$

Suma Inna[1*], Irma Fauziah[2], Muhammad Manaqib[3], Priska Maya Putri[4]
[1,2,3,4] Program Studi Matematika Fakultas Sain dan Teknologi UIN Syarif Hidayatullah Jakarta, Jl. Ir. H. Juanda No. 95 Tangerang Selatan 15412, Indonesia
email : suma.inna@uinjkt.ac.id[1], irma.fauziah@uinjkt.ac.id[2] muhammad.manaqib@uinjkt.ac.id[3], priska.maya17@mhs.uinjkt.ac.id[4]

Diajukan: 17 Mei 2022, Diperbaiki: 22 Juni 2023, Diterima: 28 Juli 2023

Abstrak

Artikel ini membahas model fluida termampatkan tipe Korteweg dengan kondisi batas slip di half space space ($\boldsymbol{R}_+^N$). Model ini biasanya digunakan untuk mendeskripsikan aliran fluida dua fase di mana terdapat fase transisi pada antarmuka fase tersebut yang dikenal dengan efek kapiler. Untuk mengatasi efek kapiler tersebut, Korteweg mengembangkan model Navier-Stokes dengan menambahkan unsur kapilaritas pada persamaan Navier-Stokes. Dalam artikel ini ditunjukkan bahwa terdapat solusi pada model Navier-Stokes tipe Korteweg untuk kasus di mana koefisien $\left(\frac{\mu+\nu}{2\,\kappa}\right)^2 - \left(\frac{1}{\kappa}\right) \neq 0,\ \kappa = \mu\,\nu$, dengan $\mu \neq \nu$. Kasus koefisien ini muncul berdasarkan kondisi akar persamaan karakteristik dari model yang dibahas dalam artikel ini.

Kata Kunci: Fluida termampatkan, Model Resolvent, Tranformasi Fourier Parsial, Navier Stokes Korteweg.

Abstract

This paper discusses the Korteweg-type compressible fluid model with slip boundary conditions in a half-space ($\mathbf{R}_+^N$). This model is commonly used to describe two-phase fluid flow with a transitional phase at the interface between the phases, known as the capillary effect. To address this effect, Korteweg developed a model by incorporating the capillarity effect into the Navier-Stokes equation, which is a model for compressible fluid flow. The paper demonstrates the existence of a solution for the Korteweg-type Navier-Stokes model in the case where the coefficient $\left(\frac{\mu+\nu}{2\,\kappa}\right)^2 - \left(\frac{1}{\kappa}\right) > 0,\ \kappa = \mu\,\nu$ *with* $\mu \neq \nu$. *This coefficient case arises from the root conditions of the characteristic equation of the model.*

Keywords *: Compressible Fluid, Resolvent Problem, Partial Fourier Transform, Navier Stokes Korteweg.*

1 Pendahuluan

Segala jenis zat yang dapat mengalir dalam wujud gas maupun cair termasuk dalam kategori fluida. Berdasarkan sifat kompresibilitasnya, fluida dapat dibagi menjadi dua jenis, yaitu fluida yang dapat dimampatkan (*compressible fluid*) dan fluida yang tidak dapat dimampatkan (*incompressible fluid*). Fluida yang dapat dimampatkan adalah fluida dengan densitas atau kerapatan yang dapat berubah-ubah dengan meningkatnya tekanan dan berkurang dengan adanya ekspansi. Contohnya adalah gas seperti oksigen (O2), nitrogen (N2), dan lain sebagainya. Sementara itu, fluida yang tidak dapat dimampatkan adalah fluida yang memiliki perubahan kerapatan yang sangat kecil ketika terkena tekanan, sehingga kerapatan dianggap tetap. Contohnya adalah air, minyak, oli, dan lain sebagainya.

Salah satu model matematika yang digunakan untuk mendeskripsikan aliran fluida yang dapat dimampatkan adalah model Navier-Stokes-Korteweg.

$$\left.\begin{aligned} \partial_t \rho + div(\rho \boldsymbol{u}) &= 0 && \text{di } \Omega \times (0,T) \\ \rho\,(\partial_t u + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u}) &= Div(S(\boldsymbol{u}) + K(\rho) - P(\rho)\mathbf{I}) && \text{di } \Omega \times (0,T) \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

dengan $T \in \mathbf{R}_+, \Omega \subset \mathbf{R}^N$, dengan $\mathbf{R}$ adalah himpunan bilangan riil, $\mathbf{R}_+$ adalah himpunan bilangan riil yang lebih dari nol dan $\mathbf{R}^N$ adalah ruang Euclid berdimensi N, $N \in \mathbf{N}$, dengan $\mathbf{N}$ adalah himpunan bilangan asli. Pada Persamaan (1), $\rho = \rho(x,t)$, $x = (x_1, \cdots, x_N) \in \Omega \subset \mathbf{R}^N, t \in (0,T)$ adalah fungsi tak diketahui dan bernilai skalar ($\rho : \Omega \subset \mathbf{R}^N \times (0,T) \to \mathbf{R}$) yang menyatakan kerapatan fluida. Fungsi tak diketahui lainnya dari Persamaan (1) adalah kecepatan fluida dinyatakan dinotasikan sebagai $\boldsymbol{u} = (u(x,t) = \left(u_1(x,t), \cdots, u_N(x,t)\right)^\top$. Kemudian $S(\boldsymbol{u}) = \mu D(\boldsymbol{u}) + (\nu - \mu)\, div\, \boldsymbol{u}\mathbf{I}$, dengan μ, ν konstanta densitas dan $D(\boldsymbol{u})$ adalah tensor tegangan ganda dengan komponen ke i,j-nya adalah $D_{ij}(\boldsymbol{u}) = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$; dan $\mathbf{I}$ adalah matriks identitas $N \times N$. Fungsi $K(\rho) = \kappa 2\,(\Delta\rho\, 2 - |\nabla\rho|\, 2\,) I - \kappa\nabla\rho \otimes \nabla\rho$, dengan κ menyatakan konstanta kapiler dan $a \otimes b = \left(a_i b_j\right)$, pertama kali diperkenalkan oleh Korteweg pada tahun 1901. Fungsi ini ditambahkan pada model Navier Stokes dalam rangka memodelkan fluida termampatkan 2 fase (seperti gas dan zat cair) di mana terdapat fase trasnsisi yang dikenal dengan efek kapilaritas pada antarmuka dua fase tersebut.

Persamaan Navier-Stokes-Korteweg (NSK) secara umum digunakan untuk memodelkan aliran gas dan cairan yang melalui fase transisi, seperti perubahan air menjadi gas akibat suhu dan tekanan. Persamaan NSK merupakan pengembangan dari persamaan Navier-Stokes (NS), yang merupakan persamaan dasar untuk aliran fluida termampatkan seperti gas. Perbedaan mendasar antara NSK dan NS terletak pada penambahan tensor tegangan dengan konstanta kapilaritas yang disebut sebagai konstanta kapiler. Secara umum, jika konstanta kapiler sama dengan 0, maka NSK akan sama dengan NS.

Model fluida termampatkan tipe Korteweg telah dibahas oleh beberapa peneliti seperti yang tercantum dalam referensi [1]–[5]. Kotschote membuktikan keunikan solusi lokal untuk model fluida isotermal [6]. Hirokazu Saito membahas model fluida termampatkan tipe Korteweg dengan kondisi batas bebas dan memperoleh operator solusi tunggal [7]. Kemudian, Hirokazu Saito juga membahas model fluida termampatkan tipe Korteweg dengan kondisi batas $\boldsymbol{n}.\nabla\,\rho = g$ dan $\mathbf{u} = 0$ [8].

Jika kita akan menyelesaikan Persamaan (1) untuk sebarang koefisien μ, ν dan κ, maka ada lima kondisi akar persamaan karakteristik yang harus dianalisis yaitu:

$$\text{Kasus I: } \left(\frac{\mu+\nu}{2\,\kappa}\right)^2 - \left(\frac{1}{\kappa}\right) < 0;$$
$$\text{Kasus II: } \left(\frac{\mu+\nu}{2\,\kappa}\right)^2 - \left(\frac{1}{\kappa}\right) > 0,\ \kappa \neq \mu\,\nu;$$
$$\text{Kasus III: } \left(\frac{\mu+\nu}{2\,\kappa}\right)^2 - \left(\frac{1}{\kappa}\right) > 0,\ \kappa = \mu\,\nu;$$
$$\text{Kasus IV: } \left(\frac{\mu+\nu}{2\,\kappa}\right)^2 - \left(\frac{1}{\kappa}\right) = 0,\ \kappa \neq \mu\,\nu;$$
$$\text{Kasus V: } \left(\frac{\mu+\nu}{2\,\kappa}\right)^2 - \left(\frac{1}{\kappa}\right) = 0,\ \kappa = \mu\,\nu.$$

Suma Inna dkk membahas model fluida termampatkan tipe Korteweg dengan kondisi batas *slip* di *half-space* $(\boldsymbol{R}_+^N)$ untuk kasus pertama dan kedua yaitu kasus koefisien $\left(\frac{\mu+\nu}{2\,\kappa}\right)^2 - \left(\frac{1}{\kappa}\right) \neq 0,\ \kappa \neq \mu\,\nu$ dan $\mu \neq \nu$ serta menunjukkan adanya solusi tunggal dari sistem tersebut [9]. Kemudian Suma Inna dan Hirokazu Saito [10] menganalisis model NSK yang melibatkat variabel waktu t dan menunjukkan adanya solusi lokal model NSK dengan kondisi batas *slip*. Sementara artikel ini fokus membahas model (1) untuk kasus yang ketiga yaitu kasus koefisien $\left(\frac{\mu+\nu}{2\,\kappa}\right)^2 - \left(\frac{1}{\kappa}\right) \neq 0,\ \kappa = \mu\,\nu$ dengan $\mu \neq \nu$.

2 Metode Penyelesaian Sistem

Secara umum, untuk menyelesaikan Persamaan tak linear (1) dengan syarat batas, dilakukan dengan beberapa tahap. Tahap pertama adalah melakukan linearisasi terhadap sistem tersebut. Selanjutnya, dilakukan transformasi Laplace terhadap sistem tersebut untuk mengeliminasi variabel waktu t. Dengan demikian, diperoleh sistem persamaan yang dikenal sebagai persamaan resolven. Persamaan resolven yang sesuai dengan Persamaan (1) adalah sebagai berikut:

$$\left.\begin{aligned} \lambda\rho + \operatorname{div}\mathbf{u} &= d && \text{di } \Omega \\ \lambda\mathbf{u} - \mu\Delta\mathbf{u} - \nu\nabla\operatorname{div}\mathbf{u} - \kappa\Delta\nabla\rho &= \boldsymbol{f} && \text{di } \Omega \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Dalam artikel ini, kami membahas penyelesaian Persamaan (2) di *half space* dengan kondisi batas *slip*, yang dinyatakan sebagai persamaan berikut:

$$\left.\begin{array}{rl} \lambda\rho + \operatorname{div}\mathbf{u} = d & \text{di } \mathbf{R}_+^N \\ \lambda\mathbf{u} - \mu\Delta\mathbf{u} - \nu\nabla\operatorname{div}\mathbf{u} - \kappa\Delta\nabla\rho = \boldsymbol{f} & \text{di } \mathbf{R}_+^N \\ \boldsymbol{n}\cdot\nabla\rho = g & \text{pada } \mathbf{R}_0^N \\ \partial_N u_j + \partial_j u_N = h_j & \text{pada } \mathbf{R}_0^N, j = 1,\ldots,N-1 \\ u_N = h_N & \text{pada } \mathbf{R}_0^N \end{array}\right\} \quad (3)$$

dengan $\rho = \rho(x)$ merupakan fungsi bernilai skalar. Suatu fungsi dikatakan bernilai skalar jika domain dari fungsi tersebut berupa vektor dan hasil atau *range* dari fungsi tersebut berupa skalar. Sebagai contoh $f: \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ dengan definisi $f(x_1, x_2, \cdots, x_N) = x_1 + x_2 + \cdots + x_N$. Sementara $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x) = \left(u_1(x), \ldots, u_N(x)\right)^\top$ adalah fungsi bernilai vektor dan λ adalah parameter resolvent yang terdapat pada $\mathbf{C}_+ = \{z \in \boldsymbol{C} \mid \Re e\, z > 0\}$ dengan $\mathbf{C}$ adalah himpunan bilangan kompleks**.** Ruang $\mathbf{R}_+^N$ dan $\mathbf{R}_0^N$ untuk $N \geq 2$ $(N \in \mathbf{N})$ merupakan ruang yang didefinisikan sebagai berikut,

$$\mathbf{R}_+^N = \{x = (x', x_N) | x' = (x_1, \ldots, x_{N-1}) \in \mathbf{R}^{N-1}, x_N > 0\},$$
$$\mathbf{R}_+^0 = \{x = (x', x_N) | x' = (x_1, \ldots, x_{N-1}) \in \mathbf{R}^{N-1}, x_N = 0\}.$$

Untuk menyelesaikan Persamaan (3) dengan syarat batas secara umum, langkah-langkah umumnya meliputi penyelesaian Persamaan (3) di *whole space*, kemudian di *half space*, dan terakhir di *bent half space*.

Untuk suatu fungsi skalar $u = u(x)$ dan fungsi vektor $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x) = \left(v_1(x), \ldots, v_N(x)\right)^\top$ dan $\partial_J = \frac{\partial}{\partial x_J}$ $(J = 1, \ldots, N)$, didefinisikan

$$\nabla u = (\partial_1 u, \ldots, \partial_N u)^\top;$$
$$\nabla \mathbf{v} = \{\partial_J v_k \,|\, J, k = 1,2, \ldots N);$$
$$\nabla^2 u = (\partial_J \partial_k u \mid \{J, k, l = 1, \ldots, N\});$$
$$\operatorname{div}\mathbf{v} = \sum_{J=1}^{N} \partial_J v_J; \qquad \Delta u = \sum_{J=1}^{N} \partial_J^2 u;$$
$$\Delta\mathbf{v} = (\Delta v_1, \ldots, \Delta v_N)^\top.$$

Untuk vektor berdimensi-N, $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_N)^\top$ dan $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_N)^\top$,

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \textstyle\sum_{J=1}^{N} a_J b_J.$$

Khususnya, untuk $\boldsymbol{n} \cdot \nabla\rho = -\partial_N \rho$.

Selanjutnya, akan diperkenalkan beberapa notasi khusus yang digunakan pada artikel ini. Misal $q \in [1, \infty)$, $L_q(\mathbf{R}_+^N)$ dan $W_q^m(\mathbf{R}_+^N)$ menyatakan ruang Lebesque dan ruang Sobolev berturut-turut di $\mathbf{R}_+^N$, $m \in \boldsymbol{N}$, dan untuk $m = 0$, maka $W_q^0(\mathbf{R}_+^N) = L_q(\mathbf{R}_+^N)$ dan norma di $W_q^n(\mathbf{R}_+^N), n \in \mathbf{N}_0$, $\mathbf{N_0} = \mathbf{N} \cup \{0\}$. dinotasikan dengan $\|\cdot\|_{W_p^n(\boldsymbol{R}_+^N)}$. Misalkan X and Y adalah ruang Banach, maka X^m,

$m \in \mathbf{N}$, menyatakan perkalian X sebanyak m dan norma di X^m ditulis secara lebih singkat $\|\cdot\|_X$. Himpunan dari operator linear dari X ke Y dinotasikan dengan $\mathcal{L}(X,Y)$ dan himpunan dari operator linear dari X ke X dinotasikan dengan $\mathcal{L}(X)$. Untuk suatu domain $U \subset \mathbf{C}$, $Hol(U, \mathcal{L}(X,Y))$ menyatakan himpunan fungsi holomorfik bernilai $\mathcal{L}(X,Y)$ yang terdefinisi pada U.

Untuk menyelesaikan Sistem (3), digunakan pendekatan solusi dari sistem di *whole-space* ($\mathbf{R}^N$). Sistem Persamaan di *whole-space* ($\mathbf{R}^N$) dinyatakan dalam persamaan berikut,

$$\left.\begin{aligned} \lambda\rho + \operatorname{div}\mathbf{u} &= d && \text{di } \mathbf{R}^N \\ \mathbf{u} - \mu\Delta\mathbf{u} - \nu\nabla \operatorname{div}\mathbf{u} - \kappa\Delta\nabla\rho &= \mathbf{f} && \text{di } \mathbf{R}^N. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Untuk Sistem (4), Saito, pada [7], mendapatkan hasil sebagai berikut.

Didefinisikan ruang untuk fungsi ruas kanan $\mathbf{F}^0 = (d, \mathbf{f})$ sebagai berikut

$$\mathcal{X}_p^1(\mathbf{R}^{\mathrm{N}}) = W_p^1(\mathbf{R}^{\mathrm{N}}) \times L_p(\mathbf{R}^{\mathrm{N}})^N.$$

Kemudian, definisikan$X_p^1(\mathbf{R}^{\mathrm{N}})$ dan $\mathcal{F}_\lambda^0\mathbf{F}^0$ sebagai berikut:

$$X_p^1(\mathbf{R}^{\mathrm{N}}) = L_p(\mathbf{R}^{\mathrm{N}})^S, \quad \text{dengan } s = N + 1 + N;$$

$$\mathcal{F}_\lambda^0\mathbf{F}^1 = \left(\nabla d, \lambda^{\frac{1}{2}} d, \boldsymbol{f}\right) \in X_p^1(\mathbf{R}^{\mathrm{N}}).$$

Kemudian diperoleh teorema berikut.

Teorema 1 (Saito [7]). *Misalkan* $p \in (1,\infty)$ *dan asumsikan bahwa* μ, ν *dan* κ *adalah konstanta positif, maka untuk setiap* $\lambda \in \boldsymbol{C}_+$ *terdapat operator* $\mathcal{A}^1(\lambda)$ *dan* $\mathcal{B}^1(\lambda)$ *dengan,*

$$\mathcal{A}^1(\lambda) \in \mathrm{Hol}\left(\mathbf{C}_+, \mathcal{L}\left(X_q^1(\mathbf{R}^{\mathrm{N}}), W_q^3(\mathbf{R}^N)\right)\right),$$

$$\mathcal{B}^1(\lambda) \in \mathrm{Hol}\left(\mathbf{C}_+, \mathcal{L}\left(X_q^1(\mathbf{R}^{\mathrm{N}}), W_q^2(\mathbf{R}^N)^N\right)\right),$$

sehingga untuk setiap $\mathbf{F}^0 = (d, \boldsymbol{f}) \in \mathcal{X}_q^1(\mathbf{R}^N)$ *diperoleh operator solusi tunggal* $(\rho, \boldsymbol{u}) = \left(\mathcal{A}^1(\lambda)\mathcal{F}_\lambda^0\mathbf{F}^{\mathbf{0}}, \mathcal{B}^1(\lambda)\mathcal{F}_\lambda^0\mathbf{F}^{\mathbf{0}}\right)$ *dari Sistem* (4).

3 Hasil dan Pembahasan

Bagian ini merupakan inti dari pembahasan artikel ini yaitu membuktikan adanya solusi untuk Sistem (3). Definisikan ruang untuk fungsi ruas kanan Sistem (3), $\mathbf{F}^1 = (d, \mathbf{f}, g, \boldsymbol{h}', h_N)$ dengan $\boldsymbol{h}' = (h_1, \dots h_{N-1})$, sebagai berikut,

$$\mathcal{X}_p^2(\mathbf{R}_+^N) = W_p^1(\mathbf{R}_+^N) \times L_p(\mathbf{R}_+^N)^N \times W_p^2(\mathbf{R}_+^N) \times W_p^1(\mathbf{R}_+^N)^{N-1} \times W_p^2(\mathbf{R}_+^N).$$

Kemudian, definisikan $\mathcal{F}_\lambda^0\mathbf{F}^1$ dan $\mathfrak{X}_p^2(\mathbf{R}_+^N)$ sebagai berikut,

$$\mathfrak{X}_p^2(\mathbf{R}_+^N) = L_p(\mathbf{R}_+^{\mathrm{N}})^M,$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_\lambda^0\mathbf{F}^1 &= ((\nabla d, \lambda^{\frac{1}{2}} d), \mathbf{f}, \nabla^2 g, \lambda^{\frac{1}{2}} \nabla g, \lambda g), (\nabla \boldsymbol{h}', \lambda^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{h}'),\\ &\quad (\nabla^2 h_N, \lambda^{\frac{1}{2}} \nabla h_N, \lambda h_N)) \in \mathfrak{X}_p^2(\mathbf{R}_+^N)\\ M &= (N+1) + N + (N^2+N+1) + (N-1)(N+1) + (N^2+N+1)\end{aligned}$$

Tujuan utama dari artikel ini adalah mencari operator solusi dari Sistem Persamaan (3) atau dengan kata lain adalah membuktikan teorema berikut.

Teorema 2. *Misalkan* $q \in (1,\infty)$ *dan asumsikan bahwa* μ, ν *dan* κ *adalah konstanta positif yang memenuhi* $\left(\frac{\mu+\nu}{2\kappa}\right)^2 - \left(\frac{1}{\kappa}\right) > 0, \kappa = \mu\nu$ *dan* $\mu \neq \nu$, *maka untuk setiap* $\lambda \in \boldsymbol{C}_+$ *terdapat operator* $\mathcal{A}^0(\lambda)$ *dan* $\mathcal{B}^0(\lambda)$ *dengan,*

$$\mathcal{A}^0(\lambda) \in \mathrm{Hol}\left(\mathbf{C}_+, \mathcal{L}\left(\mathfrak{X}_p^2(\mathbf{R}_+^N), W_q^3(\mathbf{R}_+^N)\right)\right),$$

$$\mathcal{B}^0(\lambda) \in \mathrm{Hol}\left(\mathbf{C}_+, \mathcal{L}\left(\mathfrak{X}_p^2(\mathbf{R}_+^N), W_q^2(\mathbf{R}_+^N)^N\right)\right),$$

sehingga untuk setiap $\mathbf{F}^1 = (d, \boldsymbol{f}, g, \boldsymbol{h}', h_N) \in \mathcal{X}_p^2(\mathbf{R}_+^N)$, $(\rho, \mathbf{u}) = \left(\mathcal{A}^0(\lambda)\mathcal{F}_\lambda^0\mathbf{F}^1, \mathcal{B}^0(\lambda)\mathcal{F}_\lambda^0\mathbf{F}^1\right)$ *adalah operator solusi untuk Persamaan* (3).

Terdapat beberapa tahapan dalam membuktikan Teorema 2, yaitu: pertama, mereduksi Sistem tak homogen (3) menjadi sistem homogen. Tahap selanjutnya adalah menyelesaikan sistem homogen tersebut.

3.1 Reduksi Sistem

Misalkan $u_j = v_j (j = 1, \ldots, N-1)$, $u_N = v_N + h_N$, dan $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_N)^\top$, maka diperoleh sistem sebagai berikut,

$$\left.\begin{aligned} \lambda\rho + \operatorname{div}\mathbf{v} &= \tilde{d} && \text{di } \mathbf{R}_+^N\\ \lambda\mathbf{v} - \mu\Delta\mathbf{v} - \nu\nabla\operatorname{div}\mathbf{v} - \kappa\Delta\nabla\rho &= \tilde{\boldsymbol{f}} && \text{di } \mathbf{R}_+^N\\ \boldsymbol{n}\cdot\nabla\rho &= g && \text{pada } \mathbf{R}_0^N\\ \partial_N v_j + \partial_j v_N &= h_j && \text{pada } \mathbf{R}_0^N\\ v_N &= 0 && \text{pada } \mathbf{R}_0^N \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

dengan $\tilde{d} = d - (\partial_N h_N), \tilde{h}_j = -h_j - (\partial_j h_N)$

dan $\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{f} - (-\nu\,\partial_1\partial_N h_N, \ldots, -\nu\,\partial_{N-1}\partial_N h_N, \lambda h_N - \mu\,\Delta h_N - \nu\,\partial_N^2 h_N)^\top$.

Selanjutnya, digunakan ekstensi genap dan ekstensi ganjil untuk membentuk sistem persamaan homogen. Untuk suatu fungsi $f = f(x)$ di $\mathbf{R}_+^{\mathrm{N}}$, definisikan ekstensi genap E^e dan ekstensi ganjil E^o sebagai berikut,

$$E^e(f) = E^e f(x) = \begin{cases} f(x', x_N), & (x_N > 0)\\ f(x', -x_N), & (x_N < 0)\end{cases}$$

$$E^o(f) = E^o f(x) = \begin{cases} f(x', x_N), & (x_N > 0)\\ -f(x', -x_N), & (x_N < 0)\end{cases}$$

dengan $(x' = x_1, \ldots, x_{N-1})$. Kemudian definisikan ekstensi dari suatu fungsi vektor $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_N)^\top$ sebagai berikut,

$$\boldsymbol{E}\mathbf{f} = (E^e f_1, \ldots, E^e f_{N-1}, E^o f_N)^\top. \tag{6}$$

Catatan bahwa $\boldsymbol{E} \in \mathcal{L}\big(L_p\,(\mathbf{R}_+^N)^N, L_p\,(\mathbf{R}^N)^N\big)$ dan $E^e \in \mathcal{L}\big(W_p^1(\mathbf{R}_+^\mathbf{N}), W_p^1\,(\mathbf{R}^N)\big)$.

Misalkan, $(\tilde{d}, \tilde{\boldsymbol{f}})$ merupakan fungsi yang terdapat di ruang $W_p^1(\mathbf{R}_+^N) \times L_p\,(\mathbf{R}_+^N)^N$ pada Sistem Persamaan (5) dan $\mathcal{A}^1(\lambda)\mathcal{F}_\lambda^0\mathbf{F}^0$, $\mathcal{B}^1(\lambda)\mathcal{F}_\lambda^0\mathbf{F}^0$ adalah operator solusi yang terdapat pada Teorema 1 di *whole-space* ($\mathbf{R}^\mathrm{N}$). Definisikan operator R dan **V** berturut-turut sebagai berikut,

$$\mathrm{R} = \mathcal{A}^1(\lambda)\mathcal{F}_\lambda^0\big(E^e\tilde{d}, \boldsymbol{E}\tilde{\mathbf{f}}\big) \text{ dan } \mathbf{V} = \mathcal{B}^1(\lambda)\mathcal{F}_\lambda^0\big(E^e\tilde{d}, \boldsymbol{E}\tilde{\mathbf{f}}\big). \tag{7}$$

Selanjutnya, definisikan $S = S(x', x_N)$ dan $\mathbf{T} = \mathbf{T}\,(x', x_N)$ sebagai

$$S = \mathrm{R}(x', -x_N), \qquad \mathbf{T} = \big(V_1(x', -x_N), \ldots, V_{N-1}(x', -x_N), -V_N(x', -x_N)\big)^\top. \tag{8}$$

Kemudian V_j dan T_j merupakan komponen ke *j* dari V dan T berturut-turut, dengan $j = 1, \ldots, N - 1$. Dengan demikian diperoleh

$$T_N(x', x_N) = -V_N(x', x_N) \tag{9}$$

Substitusi Persamaan (8) ke baris pertama Sistem (5) sehingga untuk baris pertama diperoleh sebagai berikut,

$$\begin{aligned}(\lambda S + \operatorname{div}\mathbf{T}(x', x_N) &= (\lambda R + \operatorname{div}\mathbf{V})(x', -x_N)\\ &= (E^e\tilde{d}(x', -x_N)\\ &= E^e\tilde{d}(x', x_N),\end{aligned}$$

Selanjutnya substitusi Persamaan (8) ke baris kedua Sistem (5) sehingga diperoleh sebagai berikut,

$$\begin{aligned}&(\lambda T_j - \mu\Delta T_j - \nu\partial_j \operatorname{div}\mathbf{T} - \kappa\,\partial_j\Delta S)(x', x_N)\\ &= \big(V_j - \mu\Delta\, V_j - \nu\,\partial_j \operatorname{div}\mathbf{V} - \kappa\partial_j\Delta R\big)(x', -x_N)\\ &= E^e\tilde{f}_j(x', -x_N)\\ &= E^e\,\tilde{f}_j(x', x_N),\end{aligned}$$

dengan $j = 1, \ldots, N-1$, dan

$$\begin{aligned}&(\lambda\, T_N - \mu\,\Delta\, T_N - \nu\,\partial_N \operatorname{div}\mathbf{T} - \kappa\,\partial_N\,\Delta\, S)(x', x_N)\\ &= (\lambda\, V_N - \mu\,\Delta\, V_N - \nu\,\partial_N \operatorname{div}\mathbf{V} - \kappa\,\partial_N\,\Delta\, R)(x', -x_N)\\ &= -(E^o\tilde{f}_N(x', -x_N)\\ &= E^o\tilde{f}_N(x', x_N),\end{aligned}$$

Dengan demikian, S dan **T** juga merupakan operator solusi di *whole-space* ($\mathbf{R}^\mathbf{N}$). Oleh karena itu, berdasarkan ketunggalan solusi di *whole-space*,

$$\left.\begin{aligned} T_j\,(x', x_N) &= V_j(x', x_N) \\ T_N(x', x_N) &= V_N\,(x', x_N) \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Akibatnya, berdasarkan Persamaan (9) dan (10), diperoleh $V_N(x', x_N) = -V_N(x', x\_N)$. Dengan demikian jika $x_N = 0$, maka $V_N(x', 0) = -V_N(x', 0)$ jika dan hanya jika $V_N(x', 0) = 0$.

Misalkan ρ dan u didefinisikan sebagai berikut,

$$\rho = R + \tilde{\rho} \text{ dan } \mathbf{u} = V + \tilde{\mathbf{v}} \tag{11}$$

Substitusi Persamaan (11) ke Sistem (3), maka diperoleh sistem homogen sebagai berikut

$$\left.\begin{aligned} \lambda\,\tilde{\rho} + \operatorname{div}\tilde{\mathbf{v}} = 0 &\quad \text{di } \mathbf{R}_+^N \\ \lambda\tilde{\mathbf{v}} - \mu\Delta\tilde{\mathbf{v}} - \nu\nabla\operatorname{div}\tilde{\mathbf{v}} - \kappa\Delta\nabla\tilde{\rho} = 0 &\quad \text{di } \mathbf{R}_+^N \\ \boldsymbol{n}\cdot\nabla\tilde{\rho} = -\tilde{g} &\quad \text{pada } \mathbf{R}_0^N \\ \partial_N\tilde{v}_j + \partial_j\tilde{v}_N = \tilde{\tilde{h}}_j &\quad \text{pada } \mathbf{R}_0^N \\ \tilde{v}_N = 0 &\quad \text{pada } \mathbf{R}_0^N \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

dengan

$$\tilde{g} = g + \partial_N(\mathcal{B}^1(\lambda)\mathcal{F}_\lambda^0(\,E^e\tilde{d}, \boldsymbol{E}\tilde{\mathbf{f}}), \tilde{\tilde{h}}_j = \tilde{h} - \partial_N h_N - \partial_N(\mathcal{B}^1(\lambda)\mathcal{F}_\lambda^0(\,E^e\tilde{d}, \boldsymbol{E}\tilde{\mathbf{f}}).$$

Selanjutnya, untuk membuktikan Teorema 2 cukup dengan menyelesaikan Sistem Homogen (12) yang akan dibahas pada bagian berikut.

3.2 Penyelesaian Sistem Persamaan Homogen di *half-space* $(\mathbf{R}_+^{\mathrm{N}})$

Sistem Persamaan Homogen (12) secara sederhana dapat ditulis sebagai berikut,

$$\left.\begin{aligned} \lambda\rho + \operatorname{div}\mathbf{v} = 0 &\quad \text{di } \mathbf{R}_+^N \\ \lambda\mathbf{v} - \mu\Delta\mathbf{v} - \nu\nabla\operatorname{div}\mathbf{v} - \kappa\Delta\nabla\rho = 0 &\quad \text{di } \mathbf{R}_+^N \\ \boldsymbol{n}\cdot\nabla\rho = -g &\quad \text{pada } \mathbf{R}_0^N \\ \partial_N v_j + \partial_j v_N = h_j &\quad \text{pada } \mathbf{R}_0^N \\ v_N = 0 &\quad \text{pada } \mathbf{R}_0^N \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

dengan $j = 1, \ldots, N-1$. Untuk membuktikan Teorema 2 cukup dengan membuktikan Teorema 3 berikut.

Untuk fungsi ruas kanan $\boldsymbol{G} = (g, h_1, \ldots, h_{N-1})$ pada Sistem (13), definisikan ruang

$$\mathcal{Y}_p(\mathbf{R}_+^{\mathrm{N}}) = W_p^2(\mathbf{R}_+^{\mathrm{N}}) \times W_p^2(\mathbf{R}_+^{\mathrm{N}})^{N-1}.$$

Kemudian definisikan

$$Y_p^2(\mathbf{R}_+^{\mathrm{N}}) = L_p(\mathbf{R}_+^{\mathrm{N}})^z, z = (N^2 + N + 1) + (N-1)(N+1),$$

$$\mathcal{G}_\lambda\boldsymbol{G} = \left(\left(\nabla^2 g, \lambda^{\frac{1}{2}}\nabla g, \lambda\,g\right), (\nabla\,h_1, \cdots \nabla\,h_{N-1}), \left(\lambda^{\frac{1}{2}}\,h_1, \cdots \lambda^{\frac{1}{2}}\,h_{N-1}\right)\right) \in Y_p^2\,(\mathbf{R}_+^{\mathrm{N}}).$$

Teorema 3. *Misalkan* $p \in (1, \infty)$ *dan asumsikan bahwa* μ, ν *dan* κ *adalah konstanta positif yang memenuhi* $\left(\frac{\mu+\nu}{2\kappa}\right)^2 - \left(\frac{1}{\kappa}\right) > 0,\ \kappa = \mu\nu, \mu \neq \nu$, *maka untuk setiap* $\lambda \in \mathbf{C}_+$ *terdapat operator* $\mathcal{A}^2(\lambda)$ *dan* $\mathcal{B}^2(\lambda)$ *dengan,*

$$\mathcal{A}^2(\lambda) \in \mathrm{Hol}\left(\mathbf{C}_+, \mathcal{L}\left(Y_q^2(\mathbf{R}_+^N), W_q^3(\mathbf{R}_+^N)\right)\right),$$

$$\mathcal{B}^2(\lambda) \in \mathrm{Hol}\left(\mathbf{C}_+, \mathcal{L}\left(Y_q^2(\mathbf{R}_+^N), W_q^2(\mathbf{R}_+^N)^N\right)\right),$$

sehingga untuk setiap $\boldsymbol{G} = (g, h_1 \dots h_{N-1}) \in \mathcal{Y}_p(\mathbf{R}_+^N)$, $(\rho, \mathbf{v}) = (\mathcal{A}^2(\lambda)\mathcal{G}_\lambda \mathbf{G}, \mathcal{B}^2(\lambda)\mathcal{G}_\lambda \mathbf{G})$ *adalah operator solusi dari Persamaan* (13).

Bukti

Sebelumnya diperkenalkan definisi dari transformasi Fourier parsial berikut. Diberikan fungsi u terdefinisi pada $\mathbf{R}^N$. Maka transformasi Fourier parsial dan invers transformasi Fourier parsial dari $u = u\,(x', x_N)$ secara berturut-turut ditulis:

$$\hat{u} = \hat{u}\,(x_N) = \hat{u}(\xi', x_N) = \int_{R^{N-1}} e^{-ix'\cdot\xi'}\ u(x', x_N)\, dx'$$

$$\mathcal{F}_{\xi'}^{-1}\,[\hat{u}(\xi', x_N)](x') = \frac{1}{(2\,\pi)^{N-1}} \int_{R^{N-1}} e^{-ix'.\xi'}\ u(x', x_N)\, dx'$$

dengan $x' = (x_1, \dots, x_{N-1})$ dan $\xi' = \xi_1, \dots, \xi_N)$.

Misalkan div $\mathbf{v} = \psi$, lalu laukan transformasi Fourier parsial ke Sistem Persamaan (13) sehingga diperoleh sistem persamaan diferensial biasa sebagai berikut,

$$\lambda\,\hat{\rho} + \hat{\psi} = 0, x_N > 0 \tag{14}$$

$$\lambda\hat{v}_j - \mu\left((\partial_N^2) - |\xi|^2\right)\hat{v}_j - \nu i\xi_j\hat{\psi} - \kappa i\xi_j\left((\partial_N^2) - |\xi'|^2\right)\hat{\rho} = 0, x_N > 0 \tag{15}$$

$$\lambda\hat{v}_N - \mu\left((\partial_N^2) - |\xi|^2\right)\hat{v}_N - \nu\partial_N\hat{\psi} - \kappa\partial_N\left((\partial_N^2) - |\xi'|^2\right)\hat{\rho} = 0, x_N > 0 \tag{16}$$

dengan syarat batas sebagai berikut,

$$\partial_N\hat{\rho}(0) = -\,\hat{g}(0) \tag{17}$$

$$i\xi_j\hat{v}_N(0) + \partial_N\hat{v}_j(0) = \hat{h}_j(0) \tag{18}$$

$$\hat{v}_N(0) = 0 \tag{19}$$

dengan,

$$\hat{\psi} = \sum_{j=1}^{N-1} i\xi_j\hat{v}_j + \partial_N\hat{v}_N. \tag{20}$$

Substitusi Persamaan (14) ke Persamaan (15) dan (16) sehingga diperoleh

$$\lambda^2\hat{v}_j - \lambda\mu(\partial_N^2 - |\xi'|^2)\hat{v}_j - i\xi_j\left(\nu\lambda - \kappa(\partial_N^2 - |\xi'|^2)\right)\hat{\psi} = 0 \tag{21}$$

$$\lambda^2\hat{v}_N - \lambda\mu(\partial_N^2 - |\xi'|^2)\hat{v}_N - \partial_N\left(\lambda v - \kappa(\partial_N^2 - |\xi'|^2)\right)\hat{\psi} = 0 \tag{22}$$

dan ke Persamaan (17) sehingga diperoleh,

$$\partial_N \hat{\psi}(0) = \lambda \hat{g}(0). \tag{23}$$

Misalkan $P_\lambda(t)$ didefinisikan sebagai berikut,

$$P_\lambda(t) = \lambda^2 - \lambda(\mu+\nu)(t^2 - |\xi'|^2)^2 + \kappa(t^2 - |\xi'|^2) \tag{24}$$

Dengan demikian diperoleh bentuk sistem persamaan diferensial biasa sebagai berikut,

$$P_\lambda(\partial_N)\hat{\psi} = 0, x_N > 0 \tag{25}$$

$$(\partial_N^2 - \omega_\lambda^2)P_\lambda(\partial_N)\hat{v}_J = 0,\ x_N > 0,\ \text{untuk } J = 1, \dots, N \tag{26}$$

dengan

$$\omega_\lambda = \sqrt{|\xi'|^2 + \frac{\lambda}{\mu}}.$$

Misalkan μ, ν and κ adalah konstanta positif. Definisikan polinomial $p(s)$ sebagai

$$p(s) = s^2 - \frac{\mu+\nu}{\kappa}s + \frac{1}{\kappa},$$

maka diperoleh akar dari $p(s)$

$$s_\mp = \begin{cases} \dfrac{\mu+\nu}{2\kappa} \mp \sqrt{\eta}, & \eta \geq 0 \\ \dfrac{\mu+\nu}{2\kappa} \mp i\sqrt{\eta}, & \eta < 0 \end{cases}$$

dengan $i = \sqrt{-1}$ dan $\eta = \left(\frac{\mu+\nu}{2\kappa}\right)^2 - \frac{1}{\kappa}$. Misalkan $s = \lambda^{-1}(t^2 - |\xi'|^2)$, maka Persamaan (24) dapat ditulis

$$p_\lambda(t) = \kappa\lambda^2 p(s).$$

Misalkan $s_1 = s_-$, $s_2 = s_+$, maka untuk $j = 1, 2$

$$t_j = \pm\sqrt{|\xi'|^2 + s_j\lambda}$$

adalah akar dari Persamaan (24) dengan $(\xi', \lambda) \in \mathbf{R}^{N-1} \times \mathbf{C}_+$. Pada kasus koefisien $\eta > 0$, $\kappa = \mu\nu$ untuk $\mu \neq \nu$, diperoleh $(s_1, s_2) = (\mu^{-1}, \nu^{-1})$. Dengan demikian diperoleh akar karakteristik untuk untuk Persamaan (25) dan (26) adalah $t_1 = \omega_\lambda = \sqrt{|\xi'|^2 + \mu^{-1}\lambda}$ dan $t_2 = \sqrt{|\xi'|^2 + \nu^{-1}\lambda}$. Dengan demikian, solusi umum persamaan karakteristik dari Persamaan (25) dan (26) sebagai berikut,

$$\hat{\psi} = \sigma e^{-\omega_\lambda x_N} + \tau e^{-t_2 x_N}, \tag{27}$$

$$\hat{v}_J = \alpha_J e^{-\omega_\lambda x_N} + \beta_J x_N e^{-\omega_\lambda x_N} + \gamma_J(e^{-t_2 x_N} - e^{-\omega_\lambda x_N}) \tag{28}$$

Berdasarkan Persamaan (20) diperoleh,

$$\sigma = i\xi' \cdot \alpha' - i\xi' \cdot \gamma' - \omega_\lambda \alpha_N + \beta_N + \omega_\lambda \gamma_N, \tag{29}$$

$$\tau = i\xi' \cdot \gamma' - t_2\gamma_N \tag{30}$$

$$0 = i\xi' \cdot \beta' - \omega_\lambda \beta_N \tag{31}$$

dengan $i\xi' \cdot \alpha' = \sum_{j=1}^{N-1} i\xi_j \, a_j$ untuk $a' \in \{\alpha', \beta', \gamma'\}$.

Selanjutnya, substitusikan $\kappa = \mu\nu$ pada Persamaan (21) menjadi sebagai berikut,

$$\begin{aligned}\lambda\mu\left(\partial_N^2 - \omega_\lambda^2\right)\hat{v}_j + i\xi_j\left(\lambda\nu - \mu\nu(\partial_N^2 - |\xi'|^2)\right)\psi \\ = \lambda\left(\partial_N^2 - \omega_\lambda^2\right)\hat{v}_j + i\xi_j\left(\frac{\lambda}{\mu}\nu - \nu(\partial_N^2 - |\xi'|^2)\right)\hat{\psi} \\ = \lambda\left(\partial_N^2 - \omega_\lambda^2\right)\hat{v}_j + i\xi_j\left(\nu\left(\frac{\lambda}{\mu} - (\partial_N^2 - |\xi'|^2)\right)\right)\hat{\psi}\end{aligned}$$

Karena $\omega_\lambda = \sqrt{|\xi'|^2 + \frac{\lambda}{\mu}}$, maka $\omega_\lambda^2 = |\xi'|^2 + \frac{\lambda}{\mu}$. Dengan demikian diperoleh persamaan

$$\begin{aligned}\lambda\mu\left(\partial_N^2 - \omega_\lambda^2\right)\hat{v}_j + i\xi_j\left(\lambda\nu - \mu\nu(\partial_N^2 - |\xi'|^2)\right)\hat{\psi} \\ = \lambda\left(\partial_N^2 - \omega_\lambda^2\right)\hat{v}_j - \nu i\xi_j\left(\partial_N^2 - \omega_\lambda^2\right)\hat{\psi}\end{aligned} \tag{32}$$

Kemudian, subtitusikan $\kappa = \mu\nu$ terhadap Persamaan (32) sehingga diperoleh persamaan berikut,

$$\begin{aligned}\lambda\mu\left(\partial_N^2 - \omega_\lambda^2\right)\hat{v}_N + \partial_N\left(\lambda\nu - \mu\nu(\partial_N^2 - |\xi'|^2)\right)\hat{\psi} \\ = \lambda\left(\partial_N^2 - \omega_\lambda^2\right)\hat{v}_N + \partial_N\left(\frac{\lambda}{\mu}\nu - \nu(\partial_N^2 - |\xi'|^2)\right)\hat{\psi} \\ = \lambda\left(\partial_N^2 - \omega_\lambda^2\right)\hat{v}_N + \partial_N\left(\nu\left(\frac{\lambda}{\mu} - (\partial_N^2 - |\xi'|^2)\right)\right)\hat{\psi}\end{aligned}$$

Dengan menggunakan fakta bahwa $\omega_\lambda = \sqrt{|\xi'|^2 + \frac{\lambda}{\mu}}$, maka diperoleh $\omega_\lambda^2 = |\xi'|^2 + \frac{\lambda}{\mu}$. Dengan demikian diperoleh persamaan berikut

$$\lambda\mu\left(\partial_N^2 - \omega_\lambda^2\right)\hat{v}_N + \partial_N\left(\lambda\nu - \mu\nu(\partial_N^2 - |\xi'|^2)\right)\hat{\psi} = \lambda\left(\partial_N^2 - \omega_\lambda^2\right)\hat{v}_N - \nu\partial_N\left(\partial_N^2 - \omega_\lambda^2\right)\hat{\psi}. \tag{33}$$

Berdasarkan Persamaan (32) dan (33), maka Persamaan (21) dan (22) dapat ditulis sebagai berikut,

$$\lambda\left(\partial_N^2 - \omega_\lambda^2\right)\hat{v}_j - \nu i\xi_j\left(\partial_N^2 - \omega_\lambda^2\right)\hat{\psi} = 0 \tag{34}$$

$$\lambda\left(\partial_N^2 - \omega_\lambda^2\right)\hat{v}_N - \nu\partial_N\left(\partial_N^2 - \omega_\lambda^2\right)\hat{\psi} = 0 \tag{35}$$

Selanjutnya, substitusi Persamaan (27) dan (28) terhadap Persamaan (34) sebagai berikut,

$$\begin{aligned}\lambda\left(\partial_N^2 - \omega_\lambda^2\right)\left(\alpha_j e^{-\omega_\lambda x_N} + \beta_j x_N e^{-\omega_\lambda x_N} + \gamma_j(e^{-t_2 x_N} - e^{-\omega_\lambda x_N})\right) \\ -\nu i\xi_j\left(\partial_N^2 - \omega_\lambda^2\right)\left(\sigma e^{-\omega_\lambda x_N} + \tau e^{-t_2 x_N}\right) \\ = \lambda\partial_N^2\left(\alpha_j e^{-\omega_\lambda x_N} + \beta_j x_N e^{-\omega_\lambda x_N} + \gamma_j(e^{-t_2 x_N} - e^{-\omega_\lambda x_N})\right) \\ -\lambda\omega_\lambda^2\left(\alpha_j e^{-\omega_\lambda x_N} + \beta_j x_N e^{-\omega_\lambda x_N} + \gamma_j(e^{-t_2 x_N} - e^{-\omega_\lambda x_N})\right) \\ - \nu i\xi_j\left(\partial_N^2\left(\sigma e^{-\omega_\lambda x_N} + \tau e^{-t_2 x_N}\right) - \omega_\lambda^2\left(\sigma e^{-\omega_\lambda x_N} + \tau e^{-t_2 x_N}\right)\right)\end{aligned}$$

$$= \lambda(\omega_\lambda^2\alpha_j e^{-\omega_\lambda x_N} + \omega_\lambda^2\beta_j x_N e^{-\omega_\lambda x_N} - 2\omega_\lambda^2\beta_j x_N e^{-\omega_\lambda x_N} + t_2^2\gamma_j e^{-t_2 x_N}$$
$$+ \omega_\lambda^2\gamma_j e^{-\omega_\lambda x_N} - \omega_\lambda^2\alpha_j e^{-\omega_\lambda x_N}$$
$$-\omega_\lambda^2\beta_j x_N e^{-\omega_\lambda x_N} - \omega_\lambda^2\gamma_j e^{-t_2 x_N}\ \omega_\lambda^2\gamma_j e^{-\omega_\lambda x_N})$$
$$- \nu i\xi_j\left(\omega_\lambda^2\sigma e^{-\omega_\lambda x_N} - t_2^2\tau e^{-t_2 x_N} - \omega_\lambda^2\sigma e^{-\omega_\lambda x_N} - \omega_\lambda^2\tau e^{-t_2 x_N}\right)$$
$$= \lambda\left(-2\omega_\lambda\beta_j e^{-\omega_\lambda x_N} + \left(t^2 - \omega_\lambda^2\right)\gamma_j\, e^{-t_2 x_N}\right) - \nu i\xi_j\left(t^2 - \omega_\lambda^2\right)\tau e^{-t_2 x_N}$$
$$= -2\lambda\omega_\lambda\beta_j e^{-\omega_\lambda x_N} + \left(\left(t^2 - \omega_\lambda^2\right)\left(\lambda\gamma_j - \nu i\xi_j\tau\right)\right)(e^{-t_2 x_N}) = 0. \tag{36}$$

Subsitusi Persamaan (27) dan (28) terhadap Persamaan (35),

$$\lambda\left(\partial_N^2 - \omega_\lambda^2\right)(\alpha_N e^{-\omega_\lambda x_N} + \beta_N x_N e^{-\omega_\lambda x_N} + \gamma_N(e^{-t_2 x_N} - e^{-\omega_\lambda x_N}))$$
$$-\nu\partial_N\left(\partial_N^2 - \omega_\lambda^2\right)(\sigma e^{-\omega_\lambda x_N} + \tau e^{-t_2 x_N})$$
$$= \lambda(\omega_\lambda^2\alpha_N e^{-\omega_\lambda x_N} + \omega_\lambda^2\beta_N x_N e^{-\omega_\lambda x_N} - 2\omega_\lambda^2\beta_N x_N e^{-\omega_\lambda x_N} + t_2^2\gamma_N e^{-t_2 x_N}$$
$$+ \omega_\lambda^2\gamma_N e^{-\omega_\lambda x_N} - \omega_\lambda^2\alpha_N e^{-\omega_\lambda x_N} - \omega_\lambda^2\beta_N x_N e^{-\omega_\lambda x_N}$$
$$-\omega_\lambda^2\gamma_N e^{-t_2 x_N} - \omega_\lambda^2\gamma_N e^{-\omega_\lambda x_N})$$
$$- \nu\partial_N\left(\omega_\lambda^2\sigma e^{-\omega_\lambda x_N} - t_2^2\tau e^{-t_2 x_N} - \omega_\lambda^2\sigma e^{-\omega_\lambda x_N} - \omega_\lambda^2\tau e^{-t_2 x_N}\right)$$
$$= \lambda\left(-2\omega_\lambda\beta_N e^{-\omega_\lambda x_N} + \left(t^2 - \omega_\lambda^2\right)\gamma_N\, e^{-t_2 x_N}\right) - \nu\left(t^2 - \omega_\lambda^2\right)\tau t_2 e^{-t_2 x_N}$$
$$= -2\lambda\omega_\lambda\beta_N e^{-\omega_\lambda x_N} + \left(\left(t^2 - \omega_\lambda^2\right)(\lambda\gamma_N - \nu t_2\tau)\right)(e^{-t_2 x_N}) = 0. \tag{37}$$

Dengan demikian, berdasarkan hasil perhitungan Persamaan (36) dan (37) diperoleh,

$$-2\lambda\omega_\lambda\beta_j = 0,\ \left(t_2^2 - \omega_\lambda^2\right)\left(\lambda\gamma_j - \nu i\xi_j\tau\right) = 0, \tag{38}$$
$$-2\lambda\omega_\lambda\beta_N = 0,\ \left(t_2^2 - \omega_\lambda^2\right)(\lambda\gamma_N - \nu t_2\tau) = 0. \tag{39}$$

Karena $t_2 \neq \omega_\lambda$ maka berdasarkan Persamaan (38) dan (39) diperoleh koefisien,

$$\beta_J = 0$$
$$\left(\lambda\gamma_j - \nu i\xi_j\tau\right) = 0, \tag{40}$$
$$(\lambda\gamma_N - \nu t_2\tau) = 0. \tag{41}$$

Berdasarkan Persamaan (40) dan (41) diperoleh

$$\gamma_j = -\frac{i\xi_j}{t_2}\gamma_N. \tag{42}$$

Persamaan (42) dikali $i\xi_j$, lalu jumlahkan untuk $j = 1$ sampai $j = N - 1$ untuk mendapatkan

$$i\xi' \cdot \gamma' = \frac{|\xi'|^2}{t_2}\gamma_N. \tag{43}$$

Untuk mendapatkan nilai τ, substitusikan (43) terhadap (30) sehingga diperoleh sebagai berikut,

$$\tau = \frac{|\xi'|^2}{t_2}\gamma_N - t_2\gamma_N$$

$$= \frac{1}{t_2}(|\xi'|^2 - t_2^2)\gamma_N \tag{44}$$

karena $\beta_J = 0$ maka Persamaan (28) dapat ditulis dalam bentuk lain yaitu,

$$\hat{v}_J = \alpha_J e^{-\omega_\lambda x_N} + \gamma_J(e^{-t_2 x_N} - e^{-\omega_\lambda x_N}) \tag{45}$$

dimana $J = 1, \dots, N$. Selanjutnya, substitusikan Persamaan (45) terhadap syarat batas pada Persamaan (19),

$$\begin{aligned} \hat{v}_N(0) &= \alpha_N e^{-\omega_\lambda x_N} + \gamma_N(e^{-t_2 x_N} - e^{-\omega_\lambda x_N}) \\ &= \alpha_N e^{-\omega_\lambda 0} + \gamma_N(e^{-t_2 0} - e^{-\omega_\lambda 0}) \\ &= \alpha_N + \gamma_N - \gamma_N = \alpha_N, \end{aligned}$$

dan karena $\hat{v}_N(0) = 0$ maka

$$\alpha_N = 0.$$

Kemudian, turunkan $\hat{v}_J$ pada Persamaan (45) terhadap x_N sehingga menjadi sebagai berikut,

$$\begin{aligned} \partial_N \hat{v}_J &= \alpha_J e^{-\omega_\lambda x_N} + \gamma_J(e^{-t_2 x_N} - e^{-\omega_\lambda x_N}) \\ &= \partial_N \alpha_J e^{-\omega_\lambda x_N} + \partial_N \gamma_J e^{-t_2 x_N} - \partial_N \gamma_J e^{-\omega_\lambda x_N} \\ &= -\omega_\lambda \alpha_J e^{-\omega_\lambda x_N} - t_2 \gamma_J e^{-t_2 x_N} + \omega_\lambda \gamma_J e^{-\omega_\lambda x_N} \\ &= \omega_\lambda(\gamma_J - \alpha_J) e^{-\omega_\lambda x_N} - t_2 \gamma_J e^{-t_2 x_N}. \end{aligned} \tag{46}$$

Ketika $x_N = 0$, Persamaan (46) menjadi sebagai berikut,

$$\partial_N \hat{v}_j = \omega_\lambda(\gamma_j - \alpha_j) e^{-\omega_\lambda 0} - t_2 \gamma_j e^{-t_2 0} = \omega_\lambda(\gamma_j - \alpha_j) - t_2 \gamma_j \tag{47}$$

dengan $j = 1, \dots, N-1$. Kemudian, substitusikan Persamaan (47) terhadap syarat batas Persamaan (18) sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut

$$\omega_\lambda \alpha_j + (t_2 - \omega_\lambda)\gamma_j = \hat{h}_j(0). \tag{48}$$

Selanjutnya, substitusikan Persamaan (42) ke Persamaan (48) sehingga diperoleh

$$\hat{h}_j(0) = \omega_\lambda \alpha_j - \frac{i\xi_j}{t_2}(t_2 - \omega_\lambda)\gamma_N$$

yang berakibat

$$\alpha_j = \omega_\lambda^{-1}\left(\hat{h}_j + \frac{i\xi_j}{t_2}(t_2 - \omega_\lambda)\gamma_N\right). \tag{49}$$

Kalikan Persamanan (49) dengan $i\xi_j$ lalu jumlahkan untuk $j = 1$ sampai $j = N-1$ untuk mendapatkan

$$i\xi' \cdot \alpha' = \omega_\lambda^{-1}\left(i\xi' \cdot \hat{\boldsymbol{h}}'(0) - \frac{|\xi'|^2}{t_2}(t_2 - \omega_\lambda)\gamma_N\right). \tag{50}$$

Substitusi $\beta_N = 0$, $\alpha_N = 0$, Persamaan (43), dan Persamaan (50) terhadap Persamaan (29) sehingga diperoleh

$$\sigma = \omega_\lambda^{-1}\left(i\xi' \cdot \hat{\boldsymbol{h}}'(0) - \frac{|\xi'|^2}{t_2}(t_2 - \omega_\lambda)\gamma_N\right) - \frac{|\xi'|^2}{t_2}\gamma_N + \omega_N\gamma_N$$

$$= \omega_\lambda^{-1} i\xi' \cdot \hat{\boldsymbol{h}}'(0) - \omega_\lambda^{-1}\left(|\xi'|^2 - \omega_\lambda^2\right)\gamma_N \quad (51)$$

Selanjutnya, substitusikan Persamaan (27) ke syarat batas pada Persamaan (23) untuk mendapatkan

$$\partial_N \hat{\psi} = \partial_N(\sigma e^{-\omega_\lambda x_N} + \tau e^{-t_2 x_N}) = \partial_N \sigma e^{-\omega_\lambda x_N} + \partial_N \tau e^{-t_2 x_N}$$

sehingga

$$\lambda\hat{g}(0) = \partial_N\hat{\psi}(0) = -\omega_\lambda \sigma e^{-\omega_\lambda 0} - t_2 \tau e^{-t_2 0} = -\omega_\lambda\sigma - t_2\tau \quad (52)$$

Kemudian, substitusikan Persamaan (51) dan (44) ke Persamaan (52) sehingga diperoleh

$$\lambda\hat{g}(0) = -\omega_\lambda\left(\omega_\lambda^{-1} i\xi' \cdot \hat{\boldsymbol{h}}'(0) - \omega_\lambda^{-1}\left(|\xi'|^2 - \omega_\lambda^2\right)\gamma_N\right) - t_2\left(\frac{|\xi'|^2 - t_2^2}{t_2}\right)\gamma_N$$

$$= -i\xi' \cdot \hat{\boldsymbol{h}}'(0) + \left(|\xi'|^2 - \omega_\lambda^2\right)\gamma_N - (|\xi'|^2 - t_2^2)\gamma_N$$

$$= -i\xi' \cdot \hat{\boldsymbol{h}}'(0) + \left(t_2^2 - \omega_\lambda^2\right)\gamma_N.$$

Akibatnya diperoleh

$$\gamma_N = -\frac{1}{(t^2 - \omega_\lambda^2)}\left(\lambda\hat{g}(0) + i\xi' \cdot \hat{\boldsymbol{h}}'(0)\right). \quad (53)$$

Selanjutnya, substitusikan koefisien γ_N pada Persamaan (53) terhadap Persamaan (42), (44), (49), (51) dimana dimisalkan $|\xi'|^2 - t_2^2 = -\lambda s_2$ dan $|\xi'|^2 - \omega_\lambda^2 = -\lambda s_1$ sehingga diperoleh

$$\gamma_j = -\frac{i\xi_j}{t_2}\gamma_N = \frac{i\xi_j}{t_2(t_2^2 - \omega_\lambda^2)}\left(\lambda\hat{g}(0) + i\xi' \cdot \hat{\boldsymbol{h}}'(0)\right) \quad (54)$$

$$\tau = \frac{\lambda s_2}{t_2(t_2^2 - \omega_\lambda^2)}\left(\lambda\hat{g}(0) + i\xi' \cdot \hat{\boldsymbol{h}}'(0)\right) \quad (55)$$

$$\alpha_j = \omega_\lambda^{-1}\hat{h}_j(0) + \frac{i\xi_j}{\omega_\lambda t_2(t_2 + \omega_\lambda)}\left(\lambda\hat{g}(0) + i\xi' \cdot \hat{\boldsymbol{h}}'(0)\right) \quad (56)$$

$$\sigma = \omega_\lambda^{-1} i\xi' \cdot \hat{\boldsymbol{h}}'(0) - \frac{\lambda s_1}{\omega_\lambda(t_2^2 - \omega_\lambda^2)}\left(\lambda\hat{g}(0) + i\xi' \cdot \hat{\boldsymbol{h}}'(0)\right). \quad (57)$$

Misalkan

$$\mathcal{M}(x_N) = \frac{e^{-t_2 x_N} - e^{-\omega_\lambda x_N}}{t_2 - \omega_\lambda}.$$

Perhatikan bahwa

$$\hat{\psi} = \sigma e^{-\omega_\lambda x_N} + \tau e^{-t_2 x_N} = -\sigma\left(e^{-t_2 x_N} - e^{-\omega_\lambda x_N}\right) + (\sigma + \tau)e^{-t_2 x_N} = \hat{\psi}_1 + \hat{\psi}_2$$

di mana

$$\hat{\psi}_1 = \left[\frac{\lambda(s_2 - 2s_1)}{\omega_\lambda(t_2 + \omega_\lambda)} i\xi' \cdot \hat{\boldsymbol{h}}'(0) - \frac{\lambda s_1}{\omega_\lambda(t_2 + \omega_\lambda)}\lambda\hat{g}(0)\right]\mathcal{M}(x_N)$$

dan

$$\hat{\psi}_2 = \left[\omega_\lambda^{-1} i\xi' \cdot \hat{\boldsymbol{h}}'(0) + \frac{1}{s_2 - s_1} \sum_{l=1}^{2} (-1)^l \left(\frac{s_l}{t_l}\right) \left(\lambda \hat{g}(0) + i\xi' \cdot \hat{\boldsymbol{h}}'(0)\right)\right] (e^{-t_2 x_N})$$

Karena $\hat{\rho} = -\frac{\hat{\psi}}{\lambda}$, maka diperoleh

$$\begin{aligned} \hat{\rho} \;=\; & -(s_2 - 2s_1) \textstyle\sum_{n=1}^{N-1} \left[\frac{i\xi_n}{\omega_\lambda(t_2+\omega_\lambda)} \hat{h}_n(0) \mathcal{M}(x_N)\right] + \left[\frac{s_1 \lambda}{\omega_\lambda(t_2+\omega_\lambda)} \hat{g}(0) \mathcal{M}(x_N)\right] \\ & - \textstyle\sum_{n=1}^{N-1} \left[\frac{i\xi_n}{\omega_\lambda \lambda} \hat{h}_n(0) e^{-t_2 x_N}\right] + \frac{1}{s_2 - s_1} \sum_{l=1}^{2} (-1)^l s_l \left[\left(\frac{1}{t_l}\right) \hat{g}(0) e^{-t_2 x_N}\right] \\ & + \textstyle\sum_{l=1}^{2} \sum_{n=1}^{N-1} (-1)^l s_l \left[\left(\frac{i\xi_n}{t_l}\right) \hat{h}_n(0) e^{-t_2 x_N}\right] \end{aligned} \tag{58}$$

Substitusi koefisien α_j, γ_j pada Persamaan (54) dan (56) serta $\beta_j = 0$ ke Persamaan (28) sehingga diperoleh,

$$\begin{aligned} \hat{v}_j = & \left[\omega_\lambda^{-1} \hat{h}_j(0) + \frac{i\xi_j}{\omega_\lambda t_2 (t_2+\omega_\lambda)} \left(\lambda \hat{g}(0) + i\xi' \cdot \hat{\boldsymbol{h}}'(0)\right)\right] e^{-\omega_\lambda x_N} \\ & + \left[\frac{i\xi_j}{t_2(t_2+\omega_\lambda)} \left(\lambda \hat{g}(0) + i\xi' \cdot \hat{\boldsymbol{h}}'(0)\right)\right] \mathcal{M}(x_N) \end{aligned} \tag{59}$$

dimana $j = 1, \dots, N-1$. Selanjutnya, substitusikan koefisien $\alpha_N = 0$, $\beta_N = 0$ dan γ_N pada Persamaan (53) ke Persamaan (28) sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut,

$$\hat{v}_N = -\left[\frac{1}{t_2+\omega_\lambda} \left(\lambda \hat{g}(0) + i\xi' \cdot \hat{\boldsymbol{h}}'(0)\right)\right] \mathcal{M}(x_N) \tag{60}$$

Dengan demikian diperoleh solusi operator solusi $\rho = \rho_1 + \rho_2$, v_j dan v_N dengan melakukan invers transfromasi Fourier parsial terhadap Persamaan (58), (59) dan (60) sehingga diperoleh,

$$\begin{aligned} \rho \;=\; & -(s_2 - 2s_1) \textstyle\sum_{n=1}^{N-1} \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{i\xi_n}{\omega_\lambda(t_2+\omega_\lambda)} \hat{h}_n(0) \mathcal{M}(x_N)\right](x') \\ & + s_1 \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{\lambda}{\omega_\lambda(t_2+\omega_\lambda)} \hat{g}(0) \mathcal{M}(x_N)\right](x') \\ & - \sum_{n=1}^{N-1} \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{i\xi_n}{\omega_\lambda \lambda} \hat{h}_n(0) e^{-t_2 x_N}\right](x') \\ & + \frac{1}{s_2 - s_1} \sum_{l=1}^{2} (-1)^l s_l \mathcal{F}^{-1} \left[\left(\frac{1}{t_l}\right) \hat{g}(0) e^{-t_2 x_N}\right](x') \\ & + \sum_{l=1}^{2} \sum_{n=1}^{N-1} (-1)^l s_l \mathcal{F}^{-1} \left[\left(\frac{i\xi_n}{t_l}\right) \hat{h}_n(0) e^{-t_2 x_N}\right](x') \\ =: \; & \mathcal{A}^2(\lambda) \mathcal{G}_\lambda \boldsymbol{G} \end{aligned}$$

$$v_j \;=\; \mathcal{F}^{-1}\left[\omega_\lambda^{-1} \hat{h}_j(0) e^{-\omega_\lambda x_N}\right](x') + \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{i\xi_j \lambda}{\omega_\lambda t_2 (t_2+\omega_\lambda)} \hat{g}(0) e^{-\omega_\lambda x_N}\right](x')$$

$$+\sum_{n=1}^{N-1}\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{i\xi_j i\xi_n}{\omega_\lambda t_2(t_2+\omega_\lambda)}\hat{h}_n(0)e^{-\omega_\lambda x_N}\right](x')$$
$$+\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{i\xi_j\lambda}{\big(t_2(t_2+\omega_\lambda)\big)}\hat{g}(0)\mathcal{M}(x_N)\right](x')$$
$$+\sum_{n=1}^{N-1}\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{i\xi_j i\xi_n}{\big(t_2(t_2+\omega_\lambda)\big)}\hat{h}_n(0)\mathcal{M}(x_N)\right](x')$$
$$=:\ \mathcal{B}_j^2(\lambda)\mathcal{G}_\lambda\boldsymbol{G},\ (j=1,\dots,N-1)$$

$$v_N = -\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{(t_2+\omega_\lambda)}\Big(\lambda\hat{g}(0)+i\xi'\cdot\hat{\boldsymbol{h}}'(0)\Big)\mathcal{M}(x_N)\right](x')$$
$$= -\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\lambda}{t_2+t_1}\hat{g}(0)\mathcal{M}(x_N)\right](x') - \textstyle\sum_{n=1}^{N-1}\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{i\xi_n}{t_2+t_1}\hat{h}_n(0)\mathcal{M}(x_N)\right](x')$$
$$=:\ \mathcal{B}_N^2(\lambda)\mathcal{G}_\lambda\boldsymbol{G}.$$

Misalkan,

$$\mathcal{B}^2(\lambda)=\big(\mathcal{B}_1^2(\lambda),\mathcal{B}_2^2(\lambda),\dots,\mathcal{B}_N^2(\lambda)\big)^\top$$

maka operator solusi $(\rho,\mathbf{v})$ dapat ditulis sebagai berikut,

$$(\rho,\mathbf{v})=(\mathcal{A}^2(\lambda)\mathcal{G}_\lambda\boldsymbol{G},\ \mathcal{B}^2(\lambda)\mathcal{G}_\lambda\boldsymbol{G})$$

Dengan demikian, diperoleh operator solusi $(\rho,\mathbf{v})=(\mathcal{A}^2(\lambda)\mathcal{G}_\lambda\boldsymbol{G},\ \mathcal{B}^2(\lambda)\mathcal{G}_\lambda\boldsymbol{G})$ dari Sistem Persamaan Homogen (13) di *half-space* $(\mathbf{R}_+^{\mathrm{N}})$. Dengan demikian maka Teorema (3) terbukti.

3.3 Bukti Teorema 2

Perhatikan kembali Persamaaan (11), maka diperoleh operator solusi di *half-space* $(\mathbf{R}_+^{\mathrm{N}})$ sebagai berikut,

$$\begin{aligned}\rho &= R+\hat{\rho}\\ &= \mathcal{A}^1(\lambda)\mathcal{F}_\lambda^0\boldsymbol{F}^{\mathbf{0}}+\mathcal{A}^2(\lambda)\mathcal{G}_\lambda\boldsymbol{G}\\ &= \mathcal{A}^0(\lambda)\mathcal{F}_\lambda^0\boldsymbol{F}^{\mathbf{1}}\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \boldsymbol{V}+\hat{\mathbf{v}}\\ &= \mathcal{B}^1(\lambda)\mathcal{F}_\lambda^0\boldsymbol{F}^{\mathbf{0}}+\mathcal{B}^2(\lambda)\mathcal{G}_\lambda\boldsymbol{G}\\ &= \mathcal{B}^0(\lambda)\,\mathcal{F}_\lambda^0\boldsymbol{F}^{\mathbf{1}}\end{aligned}$$

maka operator solusi $(\rho,\mathbf{u})$ sistem (3) dapat ditulis sebagai berikut

$$(\rho,\mathbf{u})=\big(\mathcal{A}^0(\lambda)\mathcal{F}_\lambda^0\mathbf{F}^{\mathbf{1}},\ \mathcal{B}^0(\lambda)\mathcal{F}_\lambda^0\mathbf{F}^{\mathbf{1}}\big)$$

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa Sistem Persamaan (3), untuk kasus koefisien $\left(\frac{\mu+\nu}{2\kappa}\right)^2 - \frac{1}{\kappa} > 0,\ \kappa = \mu\nu,$ memiliki operator solusi di *half-space* $(\mathbf{R}_+^N)$. Dengan demikian, Teorema (2) Terbukti.■

4 Ucapan Terima Kasih

Penelitian ini didanai oleh Pusat Penelitian dan Penerbitan (PUSLITPEN) UIN Syarif Hidayatullah Jakarta tahun fiskal 2022 nomor UN.01/KPA/223/2022.

5 Daftar Pustaka

[1] H. Freistühler and M. Kotschote, "Phase-Field and Korteweg-Type Models for the Time-Dependent Flow of Compressible Two-Phase Fluids," *Arch. Ration. Mech. Anal.*, vol. 224, no. 1, 2017, doi: 10.1007/s00205-016-1065-0.

[2] M. Kotschote, "Strong well-posedness for a korteweg-type model for the dynamics of a compressible non-isothermal fluid," *J. Math. Fluid Mech.*, vol. 12, no. 4, 2010, doi: 10.1007/s00021-009-0298-1.

[3] M. Kotschote, "Existence and time-asymptotics of global strong solutions to dynamic korteweg models," *Indiana Univ. Math. J.*, vol. 63, no. 1, 2014, doi: 10.1512/iumj.2014.63.5187.

[4] B. Haspot, "Existence of global weak solution for compressible fluid models of Korteweg type," *J. Math. Fluid Mech.*, vol. 13, no. 2, 2011, doi: 10.1007/s00021-009-0013-2.

[5] D. Bian, L. Yao, and C. Zhu, "Vanishing capillarity limit of the compressible fluid models of korteweg type to the navier-stokes equations," *SIAM J. Math. Anal.*, vol. 46, no. 2, 2014, doi: 10.1137/130942231.

[6] M. Kotschote, "Strong solutions for a compressible fluid model of Korteweg type," *Ann. l'I.H.P. Anal. non linéaire*, vol. 25, no. 4, pp. 679–696, 2008, doi: 10.1016/j.anihpc.2007.03.005.

[7] H. Saito, "Compressible Fluid Model of Korteweg Type with Free Boundary Condition: Model Problem," *Funkc. Ekvacioj*, vol. 62, no. 3, pp. 337–386, 2019, doi: 10.1619/fesi.62.337.

[8] H. Saito, "Existence of $\mathcal{R}$-bounded solution operator families for a compressible fluid model of Korteweg type on the half-space," *Math. Methods Appl. Sci.*, vol. 44, no. 2, pp. 1744–1787, Jan. 2021, doi: https://doi.org/10.1002/mma.6875.

[9] S. Inna, S. Maryani, and H. Saito, "Half-space model problem for a compressible fluid

model of Korteweg type with slip boundary condition," *J. Phys. Conf. Ser.*, vol. 1494, no. 1, p. 012014, 2020, doi: 10.1088/1742-6596/1494/1/012014.

[10] S. Inna and H. Saito, "Local Solvability for a Compressible Fluid Model of Korteweg Type on General Domains," *Mathematics*, vol. 11, no. 10, May 2023, doi: 10.3390/math11102368.