Limits: Journal of Mathematics and Its Applications
E-ISSN: 2579-8936
P-ISSN: 1829-605X
Vol. 21, No. 1, Maret 2024, 1-12
DOI: http://dx.doi.org/10.12962/limits.v21i1.13502

Pelabelan Koprima Pada Amalgamasi Graf Lengkap dan Graf Berlian

Hafif Komarullah [1], Slamin [2], Kristiana Wijaya [1]*
[1] Graph and Algebra Research Group, Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jember
[2] Program Studi Sistem Informasi, Universitas Jember
e-mail: kristiana.fmipa@unej.ac.id

Diajukan: 2 Juli 2022, Diperbaiki: 22 Nopember 2023, Diterima: 15 Maret 2024

Abstrak

Pelabelan koprima pada graf berorder n adalah pemberian label berbeda pada setiap titik pada graf dengan bilangan $1, 2, \dots, k$, untuk suatu $k \geq n$, sedemikian sehingga setiap dua titik yang bertetangga mempunyai label yang relatif prima. Jika $k = n$, pelabelan koprima secara khusus dinamakan pelabelan prima. Setiap graf pasti memenuhi pelabelan koprima. Oleh karena itu, permasalahan pada pelabelan koprima adalah mendapatkan nilai k terkecil, yang disebut bilangan koprima terkecil, yaitu nilai terkecil dari kemungkinan label terbesar yang digunakan sehingga memenuhi aturan pelabelan koprima. Pada paper ini dibahas bilangan koprima terkecil dari graf hasil amalgamasi pada graf lengkap. Selanjutnya dibahas juga bilangan koprima terkecil dari graf berlian dan graf hasil amalgamasi pada graf berlian.
Kata Kunci: Pelabelan koprima, bilangan koprima terkecil

Abstract

A coprime labeling of a graph of order n is a labeling of the vertices in graph with distinct integer $1, 2, \dots, k$, *for some* $k \geq n$, *in such a way that the labels of any two adjacent vertices are relatively prime. A graph is prime if the labels used can be taken to be the first n positive integers, namely* $k = n$. *If a graph is not prime, the problem is finding the minimum of the largest label of each vertex such that the labels of two adjacent vertices are relatively prime, called a minimum coprime number. In this paper, we discuss a minimum coprime number of amalgamation of complete graphs. Furthermore, we discuss the minimum coprime number of a diamond graph and its amalgamation.*
***Keywords**: A coprime labeling, minimum coprime number*

1 Pendahuluan

Misalkan G adalah graf dengan n titik. Pelabelan koprima pada graf G didefinisikan sebagai pemetaan f dari himpunan titik G ke himpunan bilangan bulat positif $\{1, 2, \dots, k\}$ dengan $k \geq n$, sedemikian sehingga label dari setiap dua titik yang bertetangga bersifat relatif prima. Dua bilangan bulat positif a dan b dikatakan *relatif prima* jika faktor persekutuan terbesarnya satu, yaitu $\gcd(a, b) = 1$ [1]. Jika $k = n$ maka pelabelan koprima disebut pelabelan prima [2]. Graf yang dapat diberi label dengan aturan prima (koprima) disebut *graf prima* (*koprima*). Tentu saja setiap graf belum tentu prima, tetapi setiap graf pasti koprima, yaitu dengan menggunakan label 1 dan $(n-1)$ bilangan prima pertama. Dengan demikian permasalahan pada pelabelan koprima tidak hanya berfokus pada pola pelabelannya, tetapi mendapatkan nilai $k > n$ terkecil sedemikian sehingga syarat koprima terpenuhi. Nilai minimum dari label terbesar k pada pelabelan koprima ini disebut *bilangan koprima terkecil*, dinotasikan $\mathfrak{pr}(G)$.

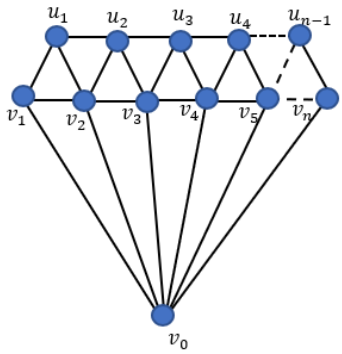
Konsep pelabelan prima bermula dari Entringer pada tahun 1980 yang menduga bahwa semua graf pohon adalah prima. Selanjutnya Tout, Dabboucy, dan Howalla pada tahun 1984 memperkenalkan pelabelan prima. Graf persahabatan, graf bunga, graf *bistar* merupakan graf prima [3]. Graf tripartit lengkap juga merupakan graf prima [4]. Dugaan bahwa graf tangga adalah prima ditunjukkan oleh Dean [5]. Hasil lainnya tentang graf prima dapat dilihat di [6], [7], [8].

Penelitian terkait pelabelan koprima pada beberapa kelas graf ataupun graf hasil operasi, antara lain: Asplund dan Fox [9] memberikan bilangan koprima terkecil dari graf roda W_n, graf lengkap K_n, dan gabungan dari graf lingkaran; Asplund dan Fox [10] memberikan bilangan koprima terkecil dari graf prisma dan graf Petersen. Lee [11] memperoleh bilangan koprima terkecil pada graf $K_n \odot \overline{K}_2$, dan graf hasil operasi *join* dari dua graf lintasan dan *join* dari dua graf lingkaran. Lee, Wui, dan Yeh [12] menunjukkan bahwa graf $\mathrm{Amal}(G, v_0, t)$ merupakan graf prima ketika G adalah graf lintasan, graf lingkaran, atau graf roda genap. Mereka juga menunjukkan bahwa graf amalgamasi pada graf roda ganjil merupakan graf koprima. Komarullah, Slamin, dan Wijaya [13] memberikan bilangan koprima terkecil dari amalgamasi pada graf roda ganjil. Hasil selengkapnya mengenai graf prima dan koprima dapat dilihat di Gallian [14].

Misalkan ditetapkan titik v_0 dari graf G. Lee, Wui, dan Yeh [12] mendefinisikan amalgamasi t salinan graf G pada titik terminal v_0, dinotasikan $\mathrm{Amal}(G, v_0, t)$, adalah graf yang diperoleh dari t salinan G yang diidentifikasi pada titik amalgamasi v_0 (yaitu setiap titik v_0 di G dilekatkan atau dilebur menjadi satu titik). Dengan demikian graf hasil operasi amalgamasi bergantung pada pemilihan titik amalgamasinya. Untuk graf regular, tentu saja hal ini tidak berlaku. Jika G berorde n, maka $\mathrm{Amal}(G, v_0, t)$ berorde $(n-1)t+1$.

Pada paper ini dibahas bilangan koprima terkecil dari graf hasil amalgamasi pada graf lengkap K_n, yaitu $\mathrm{Amal}(K_n, v, t)$, untuk sebarang titik v di K_n dan bilangan bulat $n \geq 4$; bilangan koprima terkecil dari graf berlian Br_n untuk setiap bilangan bulat $n \geq 3$; dan bilangan koprima terkecil dari graf $\mathrm{Amal}(Br_n, v_0, t)$, dengan titik amalgamasi v_0 yaitu titik berderajat n di Br_n untuk setiap $3 \leq n \leq 10$ dan juga untuk setiap $n \geq 11$ ganjil. Graf lengkap dengan n titik, dinotasikan K_n, adalah graf yang setiap dua titiknya bertetangga. Hinding dkk. [15] mendefinisikan *graf berlian* dengan order $2n$, dinotasikan dengan Br_n, sebagai graf dengan himpunan titik $V(Br_n) = \{v_0\} \cup \{v_i | i \in [1, n]\} \cup \{u_i | i \in [1, n-1]\}$ dan himpunan sisi

$E(Br_n) = \{v_0v_i | i \in [1, n]\} \cup \{v_iv_{i+1}, u_iv_{i+1}, u_iv_i \mid i \in [1, n-1]\} \cup \{u_iu_{i+1} | i \in [1, n-2]\}$ sebagaimana diperlihatkan pada Gambar 1.



Gambar 1. Graf berlian Br_n dan notasi titiknya

2 Metode Penelitian

Berdasarkan definisi pelabelan koprima, langkah-langkah untuk mendapatkan bilangan koprima terkecil pada suatu graf G sebagai berikut.

1) Mengecek bahwa G bukan graf prima. Hal ini dapat dilakukan dengan studi literatur, dengan melihat hasil penelitian tentang graf prima. Jika belum ada penelitian terkait graf yang dimaksud, apakah prima atau bukan, maka harus dicek apakah label 1 sampai n dapat diberikan pada titik-titik di G sedemikian sehingga setiap dua titik yang bertetangga mempunyai label yang relatif prima.
2) Mengklaim $\mathfrak{pr}(G) = k$ dengan $k > n$. Tentu saja klaim ini dilakukan setelah dilakukan proses perhitungan dengan seksama. Selanjutnya dibuktikan bahwa $\mathfrak{pr}(G) \geq k$ dan $\mathfrak{pr}(G) \leq k$. Pembuktian bahwa $\mathfrak{pr}(G) \geq k$ adalah dengan memperhatikan struktur kelas graf yang dikaji dan sifat-sifat dua bilangan bulat yang relatif prima. Sedangkan pembuktian bahwa $\mathfrak{pr}(G) \leq k$ adalah dengan mendefinisikan pelabelan koprima pada graf G dengan label dari 1 sampai k. Pada penelitian ini, karena 1 relatif prima dengan sebarang bilangan bulat positif, maka titik berderajat terbesar dari graf G diberi label 1.

Berikut ini diberikan beberapa lema tentang dua bilangan bulat positif yang saling relatif prima.

Lema 1 Misalkan a dan b bilangan bulat positif.

a) Jika a dan b konsekutif, maka a dan b relatif prima [16].
b) Jika a dan b relatif prima, maka terdapat dua bilangan bulat x dan y sedemikian sehingga $ax + by = 1$ [16].
c) Jika $a = 1 \pmod 2$ maka terdapat bilangan bulat positif r yang tidak memiliki faktor ganjil selain satu sedemikian sehingga $\gcd(a, a + r) = 1$ [13].

3 Hasil dan Pembahasan

Pada bagian ini dibahas tentang bilangan koprima terkecil pada graf $\text{Amal}(G, v_0, t)$ dengan G merupakan graf lengkap dan graf berlian. Pada paper ini, titik berderajat n dari graf berlian dipilih sebagai titik amalgamasi. Pertama, dijelaskan tentang pelabelan koprima dari graf hasil operasi amalgamasi pada graf lengkap, $\text{Amal}(K_n, v, t)$, dengan $n > 3$. Graf $\text{Amal}(K_n, v, t)$ mempunyai $(n-1)t + 1$ titik. Misalkan himpunan titik dan sisi pada graf $\text{Amal}(K_n, v, t)$ secara berturut-turut adalah $V(\text{Amal}(K_n, v, t)) = \{v\} \cup \{v_{ij} \mid i \in [1, t] \text{ dan } j \in [1, n-1]\}$ dan $E(\text{Amal}(K_n, v, t)) = \{vv_{ij}, v_{ij}v_{ir} \mid i \in [1, t] \text{ dan } j, r \in [1, n-1] \text{ tetapi } j \neq r\}$.

Teorema 2 Untuk setiap bilangan bulat $n \geq 4$ dan $t \geq 2$ dan $v \in V(K_n)$, bilangan koprima terkecil dari graf $\text{Amal}(K_n, v, t)$ sebagai berikut:

$$\mathfrak{pr}(\text{Amal}(K_n, v, t)) = \begin{cases} 4t + 1, & \text{untuk } n = 4, \\ p_{((n-3)t+2)}, & \text{untuk } n \geq 5, \end{cases}$$

dengan $p_{((n-3)t+2)}$ adalah $((n-3)t + 2)$ bilangan prima pertama.

Bukti. Pertama akan ditunjukkan $\mathfrak{pr}(\text{Amal}(K_4, v, t)) \geq 4t + 1$. Misalkan titik amalgamasi v diberi label 1. Dengan demikian label v relatif prima dengan setiap label titik v_{ij}. Titik v_{ij} membutuhkan $2t$ label ganjil dan t label genap. Jelas bahwa banyaknya label ganjil yang tersedia pada himpunan $\{1, 2, \ldots, 3t + 1\}$ kurang dari $2t + 1$. Karena terdapat $2t + 1$ label ganjil pada himpunan $\{1, 2, \ldots, 4t + 1\}$, maka $\mathfrak{pr}(\text{Amal}(K_4, v, t)) \geq 4t + 1$. Selanjutnya akan dibuktikan $\mathfrak{pr}(\text{Amal}(K_4, v, t)) \leq 4t + 1$, yaitu dengan membangun pelabelan koprima pada graf $\text{Amal}(K_4, v, t)$. Misalkan fungsi $f: V(\text{Amal}(K_4, v, t)) \to \{1, 2, \ldots, 4t + 1\}$ didefinisikan sebagai berikut. Untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, t$,

$$f(v) = 1 \text{ dan } f(v_{ij}) = \begin{cases} 2i, & \text{untuk } j = 1, \\ 4i - 1, & \text{untuk } j = 2, \\ 4i + 1, & \text{untuk } j = 3. \end{cases}$$

Berdasarkan definisi pelabelan koprima, setiap titik yang bertetangga harus relatif prima. Hal ini ditunjukkan sebagai berikut.

- Jelas bahwa $\gcd(v_{i1}, v_{i2}) = \gcd(2i, 4i - 1) = 1$, karena $2i$ bilangan genap, sedangkan $4i - 1$ bilangan ganjil untuk setiap $i \in [1, t]$. Demikian juga $\gcd(v_{i1}, v_{i3}) = \gcd(2i, 4i + 1) = 1$.
- Perhatikan label titik v_{i2} dan v_{i3} untuk setiap $i \in [1, t]$. Karena kedua label $4i - 1$ dan $4i + 1$ bernilai ganjil dan $|(4i - 1) - (4i + 1)| = 2$, berdasarkan Lema 1(iii) didapatkan $\gcd(f(v_{i2}), f(v_{i3})) = \gcd(4i - 1, 4i + 1) = 1$. Jadi titik v_{i2} dan v_{i3} mempunyai label yang relatif prima.

Dengan demikian terbukti bahwa fungsi f memenuhi kaidah pelabelan koprima, sehingga $\mathfrak{pr}(\mathrm{Amal}(K_4, v, t)) \leq 4t + 1$. Jadi, $\mathfrak{pr}(\mathrm{Amal}(K_4, v, t)) = 4t + 1$.

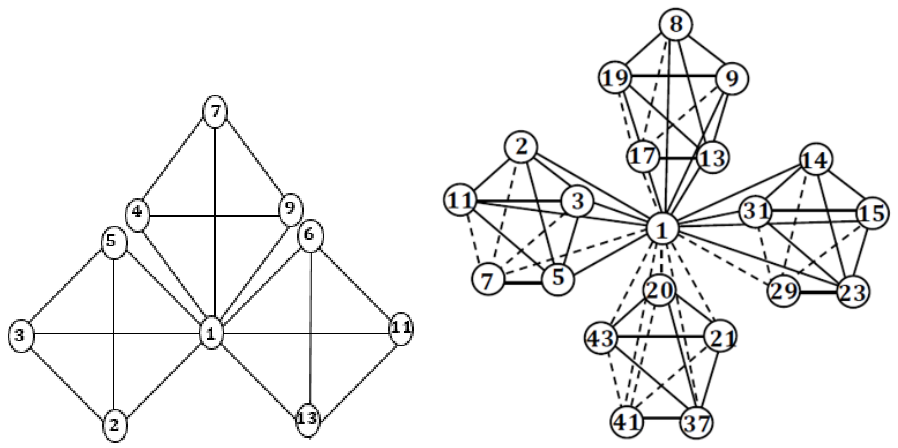
Untuk $n \geq 5$, akan ditunjukkan bahwa $\mathfrak{pr}\big(\mathrm{Amal}(K_n, v, t)\big) \geq p_{((n-3)t+2)}$, dengan $p_{((n-3)t+2)}$ adalah $\big((n-3)t + 2\big)$ bilangan prima pertama. Misalkan titik amalgamasi pada graf $\mathrm{Amal}(K_n, v, t)$ diberi label 1, maka tersisa $(n-1)t$ titik yang belum diberi label. Setiap titik v_{ij} yang berada pada sebuah graf K_n dapat dilabeli dengan sebuah label genap, sebuah label ganjil dan $(n-3)$ titik sisanya harus mendapatkan label bilangan prima selain 2 dan 3. Sehingga dibutuhkan $(n-3)t$ bilangan prima selain 2 dan 3 untuk melabeli keseluruhan titik v_{ij}. Maka $\mathfrak{pr}\big(\mathrm{Amal}(K_n, v, t)\big) \geq p_{((n-3)t+2)}$ untuk $n \geq 5$.

Selanjutnya akan dibuktikan $\mathfrak{pr}\big(\mathrm{Amal}(K_n, v, t)\big) \leq p_{((n-3)t+2)}$ yaitu dengan membangun pelabelan koprima pada graf $\mathrm{Amal}(K_n, v, t)$. Definisikan fungsi $f: V\big(\mathrm{Amal}(K_n, v, t)\big) \rightarrow \{1, 2, \ldots, p_{((n-3)t+2))}\}$ sebagai berikut. Untuk setiap $i \in [1, t]$,

$$f(v) = 1 \ \text{ dan } \ f(v_{ij}) = \begin{cases} 6i - 4 & ; j = 1, \\ 6i - 3 & ; j = 2, \\ p_{((n-2)i+2-(n-j))} & ; j = 3, 4, \ldots, n-1. \end{cases}$$

Karena dalam setiap blok, dua titik berlabel konsekutif dan titik lainya berlabel prima, maka graf $\mathrm{Amal}(K_n, v, t)$ adalah graf koprima, sehingga $\mathfrak{pr}\big(\mathrm{Amal}(K_n, v, t)\big) \leq p_{((n-3)t+2)}$. Jadi, $\mathfrak{pr}\big(\mathrm{Amal}(K_n, v, t)\big) = p_{((n-3)t+2)}$ untuk $n \geq 5$. ■

Pada Gambar 2 diberikan contoh pelabelan koprima dari graf hasil operasi amalgamasi pada graf lengkap $\mathrm{Amal}(K_4, v, 4)$ dan $\mathrm{Amal}(K_6, v, 4)$ dengan $\mathfrak{pr}\big(\mathrm{Amal}(K_4, v, 3)\big) = 13$ dan $\mathfrak{pr}\big(\mathrm{Amal}(K_6, v, 4)\big) = p_{14} = 43$ menggunakan perumusan pelabelan yang diberikan pada pembuktian Teorema 2.



Gambar 2. Pelabelan koprima graf $\mathrm{Amal}(K_4, v, 4)$ dan $\mathrm{Amal}(K_6, v, 4)$

Selanjutnya dibahas bilangan koprima terkecil dari graf berlian dan graf hasil amalgamasinya. Penotasian titik graf berlian dapat dilihat pada Gambar 1.

Teorema 3 Untuk setiap bilangan bulat $n \geq 3$, bilangan koprima terkecil dari graf berlian adalah

$$\mathfrak{pr}(Br_n) = \begin{cases} 3n-2; \text{untuk } n \text{ ganjil,} \\ 3n-1; \text{untuk } n \text{ genap.} \end{cases}$$

Bukti. Misalkan titik amalgamasi v_0 diberi label 1. Jelas label titik v_0 relatif prima dengan setiap label titik v_i. Titik-titik v_i membutuhkan $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ label ganjil dan $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ label genap. Keseluruhan titik u_i memerlukan $n-1$ label ganjil. Sehingga graf berlian Br_n memerlukan $\left\lfloor \frac{3n}{2} \right\rfloor$ label ganjil. Karena terdapat $\frac{3n-1}{2}$ label ganjil pada himpunan $\{1,2,\ldots,3n-2\}$ untuk n ganjil, diperoleh $\mathfrak{pr}(Br_n) \geq 3n-2$. Di sisi lain, terdapat $\frac{3n}{2}$ label ganjil pada himpunan $\{1,2,\ldots,3n-1\}$ untuk n genap, sehingga $\mathfrak{pr}(Br_n) \geq 3n-1$.

Untuk n ganjil, pembuktian bahwa $\mathfrak{pr}(Br_n) \leq 3n-2$ dilakukan dengan dibangunnya pelabelan koprima pada graf berlian Br_n. Definisikan fungsi $f: V(Br_n) \rightarrow \{1, 2, \ldots, 3n-2\}$ untuk $i = 1, 2, \ldots, n$ sebagai berikut.

$$f(v_0) = 1,\ f(v_i) = \begin{cases} 3i-1; i \neq n, \\ 3n-3; i = n, \end{cases} \text{ dan } f(u_i) = \begin{cases} 3i \quad ; \text{untuk } i \text{ ganjil,} \\ 3i+1; \text{untuk } i \text{ genap.} \end{cases}$$

Berdasarkan pendefinisian ini diperolah bahwa setiap dua titik yang bertetangga mempunyai label yang relatif prima. Hal tersebut ditunjukkan sebagai berikut.

- Diketahui bahwa bilangan $3i-1$ ada dalam kelas 2 (mod 3). Dengan demikian jelas bahwa label titik v_i dan v_{i+1} relatif prima untuk setiap $i \in 1,2,\ldots,n-2$.
- Beberapa pasangan titik yang bertetangga labelnya konsekutif, sehingga relatif prima (menurut Lema 1(i)), yaitu pasangan titik (v_{n-1}, v_n), (u_{n-1}, v_n), dan (u_i, v_i) dengan i ganjil.
- Perhatikan label titik u_i dan u_{i+1} untuk i genap. Karena $3i+3$ bernilai ganjil dan $|(3i+1)-(3i+3)| = 2$, menurut Lema 1(iii) diperoleh $\gcd\big(f(u_i), f(u_{i+1})\big) = \gcd(3i+1, 3i+3) = 1$.
- Perhatikan label titik u_i dan u_{i+1} untuk i ganjil. Karena $3i$ bernilai ganjil dan $|(3i)-(3i+4)| = 4$, berdasarkan Lema 1(iii) diperoleh $\gcd(f(u_i), f(u_{i+1})) = \gcd(3i, 3i+4) = 1$.
- Perhatikan label titik u_i dan v_{i+1} untuk i ganjil. Karena $3i$ dan $3i+2$ bernilai ganjil dan $|3i-(3i+2)| = 2$, menurut Lema 1(iii) diperoleh $\gcd(f(u_i), f(u_{i+1})) = \gcd(3i, 3i+2) = 1$.
- Perhatikan label titik u_i dan v_i untuk i genap. Karena kedua $3i+1$ dan $3i-1$ bernilai ganjil serta $|(3i+1)-(3i-1)| = 2$, berdasarkan Lema 1(iii) diperoleh $\gcd(f(u_i), f(v_i)) = \gcd(3i+1, 3i-1) = 1$.

Dengan demikian, fungsi f memenuhi aturan pelabelan koprima, sehingga $\mathfrak{pr}(Br_n) \leq 3n-2$. Jadi, $\mathfrak{pr}(Br_n) = 3n-2$ untuk n ganjil.

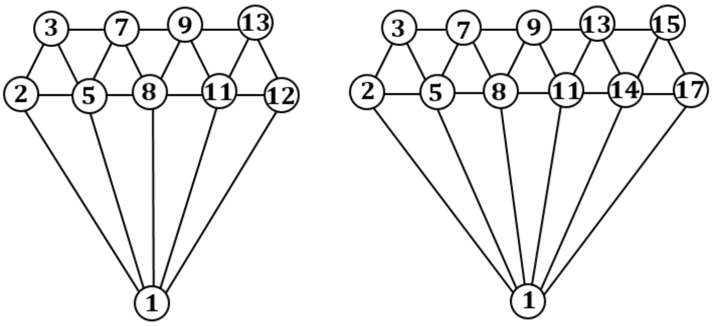
Untuk n genap, definisikan fungsi $f: V(Br_n) \rightarrow \{1, 2, \ldots, 3n-1\}$ sebagai berikut.

Untuk $i \in 1, 2, \ldots, n$,

$$f(v_0) = 1;\ \ f(v_i) = 3i - 1;\ \text{ dan }\ f(u_i) = \begin{cases} 3i & ;\text{untuk } i \text{ ganjil,} \\ 3i + 1; & \text{untuk } i \text{ genap.} \end{cases}$$

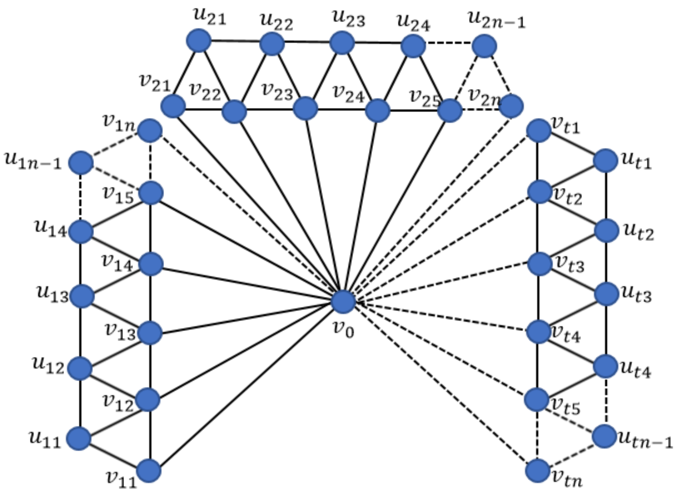
Dengan cara yang sama seperti pada n ganjil, dapat ditunjukkan bahwa label dari setiap dua titik yang bertetangga relatif prima. Oleh karena itu, fungsi f memenuhi kaidah pelabelan koprima, sehingga $\mathfrak{pr}(Br_n) \leq 3n - 1$. Jadi, $\mathfrak{pr}(Br_n) = 3n - 1$ untuk n genap. ■

Pada Gambar 3 diberikan contoh pelabelan koprima pada graf berlian Br_5 dan Br_6 dengan $\mathfrak{pr}(Br_5) = 13$ dan $\mathfrak{pr}(Br_6) = 17$.



Gambar 3. Pelabelan koprima pada graf Br_5 dan Br_6

Misalkan v_0 adalah titik berderajat n di Br_n. Graf $\text{Amal}(Br_n, v_0, t)$ mempunyai $(2n - 1)t + 1$ titik. Misalkan himpunan titik dan sisi dari graf $\text{Amal}(Br_n, v_0, t)$ untuk setiap $i \in [1, t]$ secara berturut-turut adalah $V\big(\text{Amal}(Br_n, v_0, t)\big) = \{v_0\} \cup \{v_{ij} | j \in [1, n]\} \cup \{u_{ij} | j \in [1, n - 1]\}$ dan $E\big(\text{Amal}(Br_n, v_0, t)\big) = \{v_0 v_{ij} \mid j \in [1, n]\} \cup \{v_{ij}v_{ij+1}, u_{ij}v_{ij}, u_{ij}v_{ij+1} \mid j \in [1, n - 1]\} \cup \{u_{ij}u_{ij+1} | j \in [1, n - 2]\}$. Gambar 4 merupakan ilustrasi penotasian titik dan sisi dari graf $\text{Amal}(Br_n, v_0, t)$.



Gambar 4. Penotasian titik dan sisi dari graf $\text{Amal}(Br_n, v_0, t)$

Teorema 4 Misalkan v_0 adalah titik berderajat n pada graf Br_n. Untuk setiap bilangan bulat $t \geq 2$ dan $n \geq 3$ ganjil, $\mathfrak{pr}(\text{Amal}(Br_n, v_0, t)) = (3n - 3)t + 1$.

Bukti. Pertama akan ditunjukkan $\mathrm{pr}(\mathrm{Amal}(Br_n, v_0, t)) \geq (3n-3)t+1$. Graf $\mathrm{Amal}(Br_n, v_0, t)$ membutuhkan $\frac{(3n-1)t+2}{2}$ label ganjil dan $\frac{(n-1)t}{2}$ label genap. Karena terdapat $\frac{(3n-1)t+2}{2}$ bilangan ganjil pada himpunan $\{1,2,\dots,(3n-3)t+1\}$, maka $\mathrm{pr}(\mathrm{Amal}(Br_n, v_0, t)) \geq (3n-3)t+1$.

Selanjutnya untuk setiap $i = 1, 2, \dots, t$ definisikan fungsi $f: V(\mathrm{Amal}(Br_n, v_0, t)) \to \{1, 2, \dots, (3n-3)t+1\}$ sebagai berikut.

$$f(v_0) = 1,$$

$$f(v_{ij}) = \begin{cases} 3n(i-1) + 3(j-i) + 2; \text{untuk } j = 1, 2, \dots, n-1, \\ 3i(n-1) \qquad ; \text{untuk } j = n, \end{cases}$$

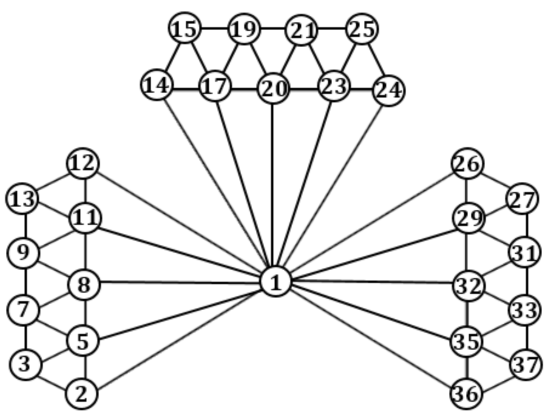
$$f(u_{ij}) = \begin{cases} 3n(i-1) + 3(j-i) + 3; \text{untuk } j \text{ ganjil}, \\ 3n(i-1) + 3(j-i) + 4; \text{untuk } j \text{ genap}. \end{cases}$$

Akan ditunjukkan pada pendefinisian label di atas, setiap dua titik yang bertetangga mendapat label yang relatif prima, sebagai berikut.

- Jelas bahwa label titik v_{ij} dan v_{ij+1} untuk $j = 1,2,\dots,n-2$ relatif prima.
- Perhatikan bahwa label titik u_{ij} bernilai ganjil untuk setiap i dan j. Untuk j ganjil, diperoleh $f(v_{ij+1}) = f(u_{ij}) + 4$ dan $f(v_{ij+1}) = f(u_{ij}) + 2$. Sedangkan untuk j genap, $f(u_{ij+1}) = f(u_{ij}) + 2$ dan $f(u_{ij}) = f(v_{ij}) + 2$. Berdasarkan Lema 1(iii), label dari pasangan titik-titik tersebut relatif prima.
- Tiga pasangan titik (v_{in-1}, v_{in}), (u_{i1}, v_{i1}), dan (u_{in-1}, v_{in}) mempunyai label konsekutif. Oleh karena itu, label pasangan titik-titik tersebut relatif prima.

Jadi fungsi f memenuhi aturan pelabelan koprima, sehingga $\mathrm{pr}(\mathrm{Amal}(Br_n, v_0, t)) \leq (3n-3)t+1$. Dengan demikian $\mathrm{pr}(\mathrm{Amal}(Br_n, v_0, t)) = (3n-3)t+1$. ■

Pada Gambar 5 diberikan contoh pelabelan koprima pada graf $\mathrm{Amal}(Br_5, v_0, 3)$ dengan $\mathrm{pr}(\mathrm{Amal}(Br_n, v_0, t)) = 37$.



Gambar 5. Pelabelan koprima pada graf $\mathrm{Amal}(Br_5, v_0, 3)$

Misalkan v_0 adalah titik berderajat n pada graf berlian Br_n. Bilangan koprima terkecil pada graf Amal(Br_n, v_0, t) untuk n genap memiliki batas bawah sebagai berikut.

Lema 5 Untuk setiap bilangan bulat $t \geq 1$ dan n genap, jika v_0 adalah titik berderajat n pada graf berlian Br_n maka $\mathfrak{pr}(\text{Amal}(Br_n, v_0, t)) \geq (3n-2)t+1$.

Bukti. Dengan cara yang sama seperti Teorema 4, graf Amal(Br_n, v_0, t) membutuhkan $\frac{(3n-2)t+2}{2}$ label ganjil dan $\frac{nt-4t}{2}$ label genap. Karena terdapat $\frac{(3n-2)t+2}{2}$ bilangan ganjil pada himpunan $\{1,2,\dots,(3n-2)t+1\}$, maka $\mathfrak{pr}(\text{Amal}(Br_n, v_0, t)) \geq (3n-2)t+1$. ■

Pada paper ini, pelabelan dari graf Amal(Br_n, v_0, t) untuk n genap, belum dapat didefinisikan secara umum. Hal ini karena terjadi inkonsistensi pertukaran label sedemikian sehingga setiap dua titik yang bertetangga mempunyai label relatif prima. Pada lema berikut, dibuktikan bahwa untuk $n = 4, 6, 8, 10$, graf Amal(Br_n, v_0, t) mempunyai bilangan koprima terkecil sama dengan batas bawahnya.

Lema 6 Untuk setiap bilangan bulat $t > 1$ dan $n \in \{4, 6, 8, 10\}$, jika v_0 adalah titik berderajat n pada graf berlian Br_n maka bilangan koprima terkecil dari graf Amal(Br_n, v_0, t) adalah sama dengan batas bawahnya, yaitu $\mathfrak{pr}\big(\text{Amal}(Br_n, v_0, t)\big) = (3n-2)t+1$.

Bukti. Berdasarkan Lema 5 didapatkan $\mathfrak{pr}\big(\text{Amal}(Br_n, v_0, t)\big) \geq (3n-2)t+1$. Selanjutnya untuk $n = 4, 6, 8, 10$ akan ditunjukkan $\mathfrak{pr}\big(\text{Amal}(Br_n, v_0, t)\big) \leq (3n-2)t+1$. Definisikan fungsi $f: V\big(\text{Amal}(Br_n, v_0, t)\big) \to \{1, 2, \dots, 10t+1\}$ sebagai berikut.

$$f(v_0) = 1 \text{ dan } f(u_{ij}) = \begin{cases} (3n-2)i + 3j - (3n-2); & \text{untuk } j \text{ ganjil,} \\ (3n-2)i + 3j - (3n-3); & \text{untuk } j \text{ genap.} \end{cases}$$

Untuk label titik v_{ij} akan dibedakan menjadi dua kasus sebagai berikut.

1) Untuk $i \neq 2 \pmod 3$,

$$f(v_{ij}) = (3n-2)i + 3j - (3n-1).$$

2) Untuk $i = 2 \pmod 3$, dibedakan dalam dua kasus berikut.

   a) Untuk $n = 4$,

   $$f(v_{ij}) = \begin{cases} 10i + j - 7; & \text{untuk } j = 1,2,3, \\ 10i + 1 & ; \text{untuk } j = 4. \end{cases}$$

   b) Untuk $n = 6, 8, 10$, label titik v_{ij} dibagi dua kasus, yaitu jika j genap dan j ganjil.

   Jika j genap,

   $$f(v_{ij}) = (3n-2)i + 3j - (3n-1),$$

   sedangkan jika j ganjil, ada beberapa kasus untuk n, sebagai berikut.

      i) Untuk $n = 6$,

$$f(v_{ij}) = \begin{cases} 16i + 3j - 19, & \text{untuk } i = 0 \text{ (mod 5) dan } j = 5, \\ 16i + 3j - 19, & \text{untuk } i = 1 \text{ (mod 5) dan } j = 3, \\ 16i + 3j - 15, & \text{untuk } i \text{ dan } j \text{ yang lain.} \end{cases}$$

ii) Untuk $n = 8$,

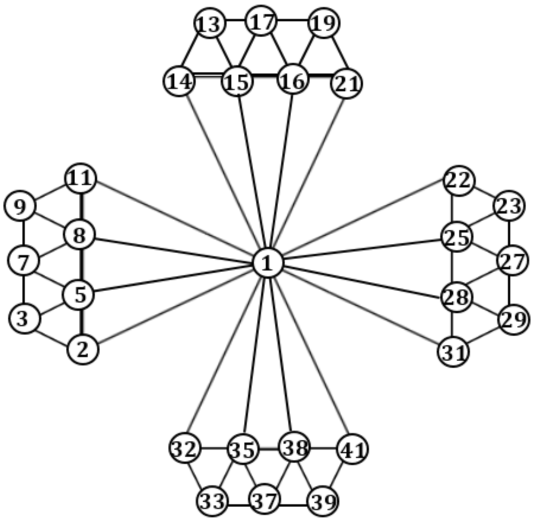
$$f(v_{ij}) = \begin{cases} 22i + 3j - 25, & \text{untuk } i = 0 \text{ (mod 5) dan } j = 3,7, \\ 22i + 3j - 25, & \text{untuk } i = 3 \text{ (mod 5) dan } j = 5, \\ 22i + 3j - 25, & \text{untuk } i \neq 0,3 \text{ (mod 5) dan } j = 3, \\ 22i + 3j - 21, & \text{untuk } i \text{ dan } j \text{ yang lain.} \end{cases}$$

iii) Untuk $n = 10$,

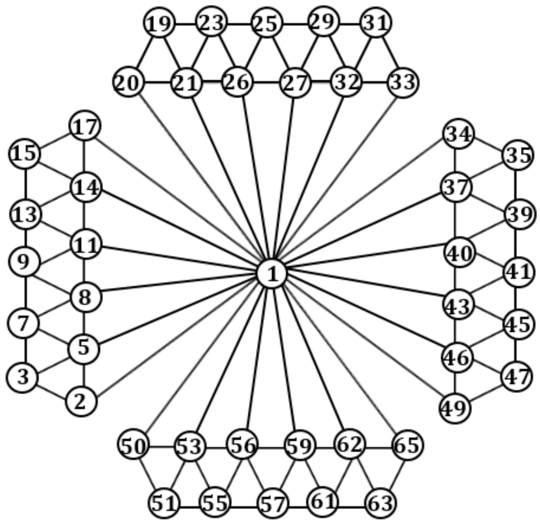
$$f(v_{ij}) = \begin{cases} 28i + 3j - 31, & \text{untuk } i = 0 \text{ (mod 5) dan } j = 3,9, \\ 22i + 3j - 31, & \text{untuk } i = 4 \text{ (mod 5) dan } j = 5,9, \\ 22i + 3j - 31, & \text{untuk } i \neq 0,4 \text{ (mod 5) dan } j = 3,7, \\ 22i + 3j - 27, & \text{untuk } i \text{ dan } j \text{ yang lain.} \end{cases}$$

Dengan cara yang sama seperti pada $\boldsymbol{n}$ ganjil, dapat dibuktikan bahwa setiap dua titik yang bertetangga mempunyai label yang relatif prima. ■

Sebagai contoh pelabelan koprima pada graf $\mathbf{Amal}(\boldsymbol{Br_4}, \boldsymbol{v_0}, \mathbf{4})$ dan $\mathbf{Amal}(\boldsymbol{Br_6}, \boldsymbol{v_0}, \mathbf{4})$ menggunakan rumus pelabelan pada pembuktian Lema 6 diberikan pada Gambar 6.



a. $Amal(Br_4, v_0, 4)$



b. $Amal(Br_6, v_0, 4)$

Gambar 6. Pelabelan koprima pada graf Amal$(Br_4, v_0, 4)$ dan Amal$(Br_6, v_0, 4)$

4 Simpulan

Pada paper ini dihasilkan bilangan koprima terkecil dari graf-graf yang dibahas sebagai berikut. Pertama, bilangan koprima terkecil dari graf Amal(K_n, v, t) bergantung dari nilai n, untuk $n = 4$ diperoleh $\mathrm{pr}(\mathrm{Amal}(K_4, v, t)) = 4t + 1$, sedangkan untuk $n > 4$, bilangan koprima terkecilnya adalah $((n-3)t + 2)$ bilangan prima pertama. Kedua, bilangan koprima terkecil dari graf berlian

Br_n bergantung dari ganjil dan genapnya nilai n, untuk n ganjil, $\mathfrak{pr}(Br_n) = 3n - 2$, sedangkan untuk n genap, $\mathfrak{pr}(Br_n) = 3n - 1$. Terakhir, bilangan koprima terkecil dari graf $\mathrm{Amal}(Br_n, v_0, t)$ juga bergantung dari ganjil dan genapnya nilai n, untuk n ganjil, $\mathfrak{pr}(\mathrm{Amal}(Br_n, v_0, t)) = (3n - 3)t + 1$, sedangkan untuk $4 \leq n \leq 10$ genap, $\mathfrak{pr}(\mathrm{Amal}(Br_n, v_0, t)) = (3n - 2)t + 1$.

Penelitian ini masih menyisakan beberapa masalah terbuka terkait bilangan koprima terkecil pada graf hasil amalgamasi pada graf berlian, antara lain:

1. Tentukan bilangan koprima terkecil dari graf $\mathrm{Amal}(Br_n, v_0, t)$ untuk $n \geq 12$ genap.
2. Tentukan bilangan koprima terkecil pada graf $\mathrm{Amal}(Br_n, v_1, 2)$ dan $\mathrm{Amal}(Br_n, u_1, 2)$.

5 Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Kelompok Riset "Graph and Algebra," Jurusan Matematika, FMIPA Universitas Jember yang memberikan dukungan kepada kami dalam melakukan penelitian ini.

6 Daftar Pustaka

[1] D. M. Burton, *Elementary Number Theory*, 5th ed. New York: McGraw-Hill, 2002.

[2] A. H. Berliner, J. Hook, A. Mbirika, N. Dean, A. Marr, and C. D. Mcbee, "Coprime and prime labelings of graphs," *Journal of Integer Sequences*, vol. 19, 2016. [Online]. Available: https://cs.uwaterloo.ca/journals/JIS/VOL19/Mbirika/mbi3.pdf

[3] S. Ashokkumar and S. Maragathavalli, "Prime labelling of some special graphs," *IOSR Journal of Mathematics*, vol. 11, no. 1, pp. 1–5, 2015, doi: 10.9790/5728-11110105. [Online]. Available: https://iosrjournals.org/iosr-jm/papers/Vol11-issue1/Version-1/A011110105.pdf

[4] D. M. T. B. Dissanayake, R. A. S. T. Abeysekara, K. D. E. Dhananjaya, A. A. I. Perera, and P. G. R. S. Ranasinghe, "Prime labeling of complete tripartite graphs of the form $K_{1,m,n}$," vol. 130, pp. 53092–53094, 2019. [Online]. Available: https://www.researchgate.net/publication/333357422_Prime_labeling_of_complete_tripartite_graphs_of_the_form_K_1mn

[5] N. Dean, "Proof of the prime ladder conjecture," *Integers*, vol. 17, p. #A40, 2017. [Online]. Available: http://math.colgate.edu/~integers/r40/r40.pdf

[6] N. Ramya, K. Rangarajan, and R. Sattanathan, "On prime labeling of some classes of graphs," *International Journal of Computer Applications*, vol. 44, no. 4, pp. 975–8887, 2012. [Online]. Available: https://research.ijcaonline.org/volume44/number4/pxc3878320.pdf

[7] S. Meena and K. Vaithilingam, “Prime labeling of friendship graphs,” *International Journal of Engineering Research & Technology (IJERT)*, vol. 1, 2012, [Online]. Available: https://www.ijert.org/research/prime-labeling-of-friendship-graphs-IJERTV1IS10257.pdf

[8] S. K. Vaidya and U. M. Prajapati, “Some new results on prime graphs,” *Open Journal of Discrete Mathematics*, vol. 02, no. 03, pp. 99–104, 2012, doi: 10.4236/ojdm.2012.23019. [Online]. Available: https://www.scirp.org/pdf/OJDM20120300007_69764759.pdf

[9] J. Asplund and N. B. Fox, “Minimum coprime labelings for operations on graphs,” Jul. 2017. [Online]. Available: http://arxiv.org/abs/1707.04471

[10] J. Asplund and N. B. Fox, “Minimum coprime labelings of generalized Petersen and prism graphs,” *Journal of Integer Sequences*, vol. 24, no. 3, pp. 1–21, 2019. [Online]. Available: https://cs.uwaterloo.ca/journals/JIS/VOL24/Fox/fox11.pdf

[11] C. Lee, “Minimum coprime graph labelings,” *Journal of Integer Sequences*, vol. 23, no. 11, pp. 1–15, 2020. [Online]. Available: https://cs.uwaterloo.ca/journals/JIS/VOL23/Lee/lee7.pdf

[12] S-M. Lee, I. Wui, and J. Yeh, “On the amalgamation of prime graphs,” *Bull. Malaysian Math. Soc*, vol. 11, pp. 59–67, 1988.

[13] H. Komarullah, Slamin, and K. Wijaya, “A minimum coprime number for amalgamation of wheel,” in *Advances in Computer Science Research, volume 96, Proceedings of the International Conference on Mathematics, Geometry, Statistics, and Computation*, 2022, pp. 53–57. https://doi.org/10.2991/acsr.k.220202.012

[14] J. A. Gallian, “A dynamic survey of graph labeling,” *The Electronic Journal of Combinatorics*, p. 6, 2017. [Online]. Available: https://www.combinatorics.org/files/Surveys/ds6/ds6v20-2017.pdf

[15] N. Hinding, D. Firmayasari, H. Basir, M. Bača, and A. Semaničová-Feňovčíková, “On irregularity strength of diamond network,” *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*, vol. 15, no. 3, pp. 291–297, Dec. 2018. https://doi.org/10.1016/j.akcej.2017.10.003

[16] Sukirman, *Teori Bilangan*, 1st ed. Tangerang Selatan: Universitas Terbuka, 2016.