

Kendali Optimal Model Pertumbuhan Mikroalga dalam Chemostat

Wahyuni Ningsih^{1*}, Henny Purwaningsih², Rofila El Maghfiroh³

^{1,2,3}Jurusan Teknik Sipil, Politeknik Negeri Malang, Malang, Indonesia
e-mail: wahyuni_04@polinema.ac.id

Diajukan: 29 Juli 2022, Diperbaiki: 12 September 2022, Diterima: 10 Nopember 2022

Abstrak

Mikroalga merupakan salah satu potensi alam Indonesia yang dapat dimanfaatkan dalam berbagai kebutuhan seperti menghasilkan produk energi (bioethanol, biodiesel), biopolymer penghasil plastik dan sebagai bahan campuran tanah untuk rekayasa konstruksi, bahkan sebagai pengolahan limbah dengan cara menyerap kandungan senyawa organik dan nutrisi yang masih tersisa ataupun menyerap beberapa senyawa berbahaya yang terdapat dalam limbah. Salah satu media kulturisasi mikroalga adalah chemostat. Chemostat merupakan jenis bioreaktor kontinu yang berfungsi untuk budidaya mikroalga dan mikroorganisme yang lain yang biasanya digunakan dalam skala laboratorium dan industri. Penelitian ini membahas tentang kendali optimal berupa pemberian tingkat pengenceran secara optimal pada model pertumbuhan mikroalga dalam chemostat. Metode yang digunakan untuk menyelesaikan masalah kendali optimal ini adalah Prinsip Minimum Pontryagin. Adapun fungsi tujuan yang digunakan berupa meminimumkan waktu yang dibutuhkan oleh *state* awal untuk menuju *state* akhir (kondisi setimbang). Kemudian dilanjutkan dengan simulasi numerik menggunakan toolbox ICLOCS2. Simulasi dilakukan untuk mengetahui perbandingan pertumbuhan mikroalga dalam chemostat dengan dan tanpa kendali optimal. Berdasarkan hasil pembahasan diperoleh bahwa jenis kendali yang dilakukan berupa kendali bang-bang. Hasil simulasi menunjukkan bahwa massa jenis mikroalga mampu mencapai kondisi setimbang 40.9% lebih cepat saat diberi kendali optimal daripada tanpa diberi kendali optimal.

Kata Kunci: Mikroalga, Model Chemostat, Prinsip Minimum Pontryagin, Kendali Bang-Bang, Toolbox ICLOCS2

Abstract

Microalgae is one of Indonesia's natural potentials that can be utilized in various needs such as producing energy products (bioethanol, biodiesel), biopolymers producing plastics and as a soil mixture for construction engineering, even as waste treatment by absorbing the remaining organic compounds and nutrients. or absorb some of the hazardous compounds contained in the waste. One of the microalgae culture media is chemostat. Chemostat is a type of continuous bioreactor that functions for the cultivation of microalgae and other microorganisms that are usually used in laboratory and industrial scales. This study discussed the optimal control in the form of providing optimal dilution rates in the microalgae growth model in the chemostat. The method used to solve this optimal control problem is Pontryagin's Minimum Principle. The objective function used is to minimize the time required by the initial state to reach the final state (equilibrium condition). Then proceed with numerical simulation using the ICLOCS2 toolbox. Simulations were carried out to determine the comparison of microalgae growth in the chemostat with and without optimal control. Based on the results of the discussion, it was found that the type of control carried out was in the form of bang-bang control. The simulation results showed that the density of microalgae was able to reach equilibrium conditions 40.9% faster when given optimal control than without optimal control.

Keywords: Microalga, Chemostat Model, Pontryagin's Minimum Principle, Bang-Bang control, ICLOCS2 toolbox

1 Pendahuluan

Wilayah Indonesia yang berada di daerah tropis dan memiliki luas perairan yang lebih besar daripada daratan, menjadikannya sebagai Negara yang memiliki diversitas spesies mikroalga yang tinggi. Kandungan utama yang dimiliki mikroalga seperti karbohidrat, lipid, dan protein, merupakan potensi yang dapat dikonversikan menjadi sumber pangan dan energi melalui biorefineri [1]. Biorefineri merupakan bentuk eksplorasi biomassa untuk diproduksi menjadi bahan bakar, energi, dan bahan-bahan kimia yang digunakan dalam kehidupan. Pemanfaatan akan biomassa dianggap sebagai sumber energi alternatif yang sangat potensial untuk dikembangkan jika dibanding dengan eksplorasi minyak bumi atau bahan-bahan tidak terbarukan lainnya. Serta mikroalga yang menghasilkan biopolimer dapat juga dimanfaatkan sebagai bahan alternatif terbarukan seperti bahan konstruksi biopolimerik baru. Bahan ini digunakan untuk pengolahan/perbaikan tanah dalam upaya mengembangkan pendekatan rekayasa konstruksi yang ramah lingkungan. Tentu saja untuk menggantikan penggunaan bahan konvensional yang memiliki dampak lingkungan yang tinggi[2], [3].

Menyadari akan potensi yang dimiliki oleh mikroalga, maka tidak heran jika banyak penelitian tentang mikroalga terus dilakukan. Model matematika yang dibangun untuk mengetahui perilaku mikroalga telah diteliti oleh [4]–[8], dan masih banyak yang lainnya yang didasarkan pada asumsi yang dibangun oleh masing-masing peneliti. Termasuk penelitian yang telah dilakukan oleh Alzahrani dkk [9] yang menganalisis model pertumbuhan/budidaya mikroalga dalam chemostat. Chemostat merupakan jenis bioreaktor kontinu yang berfungsi untuk budidaya mikroalga dan mikroorganisme yang lain yang biasanya digunakan dalam skala laboratorium dan industri.

Untuk menghasilkan mikroalga yang optimum, upaya pengendalianpun dilakukan, diantaranya yaitu melalui mitigasi CO₂ [10], pengendalian intensitas cahaya [11], [12], pengendalian intensitas cahaya dan nutrisi [13], dan pengendalian aliran karbondioksida dan nutrisi [14]. Sementara itu, metode kendali optimal yang bisa digunakan adalah Prinsip Minimum Pontryagin [15]. Metode ini telah banyak digunakan dalam upaya pengendalian suatu sistem seperti yang dilakukan oleh [11], [16]–[19], dan masih banyak yang lain. Begitupun dengan pertumbuhan/budidaya mikroalga dalam chemostat, perlu dikaji lebih lanjut melalui model matematikanya. Alzahrani dkk [9] menganalisis model pertumbuhan/budidaya mikroalga dalam chemostat dengan melihat pengaruh dari tingkat pengenceran media berupa nutrisi segar yang mengalir kedalam chemostat tersebut terhadap pertumbuhan mikroalga. Tingkat pengenceran tersebut diasumsikan sebagai parameter yang bernilai konstan. Oleh karena itu, penelitian ini

bertujuan untuk melanjutkan penelitian dari Alzahrani dkk [9] dengan menjadikan tingkat pengenceran tersebut sebagai variabel kendali.

2 Metode Penelitian

Dalam penelitian ini, model matematika pertumbuhan mikroalga dalam chemostat yang dikaji adalah model yang dikembangkan oleh Alzahrani dkk [9]. Selanjutnya, dengan mengasumsikan parameter tingkat pengenceran sebagai variabel kendali, maka dilakukan pengecekan sifat keterkontrolan sistem dengan menentukan rank dari matriks keterkontrolan sistem tersebut[20]. Setelah itu baru dilakukan upaya pengendalian dengan merumuskan masalah kendali. Kemudian masalah kendali tersebut diselesaikan dengan menerapkan Prinsip Minimum Pontryagin [15]. Sistem lalu direpresentasikan dalam bentuk grafik melalui pemanfaatan *toolbox* ICLOCS2[21]. Hasil simulasi numerik tersebut kemudian digunakan untuk analisis lebih lanjut beserta interpretasinya.

3 Hasil dan Pembahasan

Model chemostat secara umum dari pertumbuhan mikroalga terbatas pada satu nutrisi dinyatakan dalam Persamaan (1) dan (2).

$$\frac{dX(t)}{dt} = X(t)(\mu - D) \quad (1)$$

$$\frac{dY(t)}{dt} = D(N - Y(t)) - uX(t) \quad (2)$$

Dengan X menyatakan massa jenis mikroalga yang terdistribusi secara homogen di dalam chemostat, Y menyatakan massa jenis nutrisi terbatas dalam chemostat, D menyatakan tingkat pengenceran, μ menyatakan tingkat pertumbuhan mikroalga, N menyatakan massa jenis nutrisi segar, dan u menyatakan tingkat penyerapan nutrisi ke dalam biomassa alga. Persamaan (1) menyatakan bahwa laju massa jenis mikroalga X terhadap waktu t dinyatakan sebagai selisih antara tingkat pertumbuhan mikroalga dengan tingkat pengenceran mikroalga di dalam chemostat. Sementara Persamaan (2) menyatakan laju massa jenis nutrisi Y terhadap waktu t dinyatakan sebagai selisih antara tingkat pengenceran massa jenis nutrisi segar yang masuk kedalam chemostat dengan pengenceran nutrisi terbatas dalam chemostat tersebut serta berkurang ketika terjadi penyerapan nutrisi oleh mikroalga.

Asumsi lain yang dibangun dalam mengembangkan model chemostat tersebut [9] yaitu

1. Dengan konservasi massa, laju perubahan kuota sel Q dalam sel alga terhadap waktu t dinyatakan sebagai selisih antara tingkat penyerapan nutrisi pada skala sel tunggal l dengan tingkat konsumsi nutrisi karena pertumbuhan. Dalam model matematika dinyatakan sbb

$$\frac{dQ}{dt} = lY(t) - \mu Q \quad (3)$$

2. Menggunakan model Droop[4] yang menyatakan tingkat pertumbuhan mikroba μ merupakan fungsi dari kuota sel Q

$$\mu(Q) = \mu_{max} \left(1 - \frac{q}{Q}\right) \quad (4)$$

3. Dinamika penyerapan nutrisi lebih cepat daripada dinamika pertumbuhan sel. Sehingga dengan mengasumsikan $\frac{dQ}{dt} = 0$, dan mensubstitusi Persamaan (4) ke Persamaan (3), maka diperoleh

$$Q = \frac{lY(t)}{\mu_{max}} + q \quad (5)$$

4. Tingkat pertumbuhan maksimum μ_{max} diasumsikan proporsional terhadap intensitas cahaya I dalam mencapai sel-sel alga, kapasitas penyerapan cahaya oleh molekul klorofil yang dinyatakan sebagai koefisien redaman cahaya k , dan konstanta proporsionalitas β .

$$\mu_{max} = \beta k I \quad (6)$$

5. Chemostat diasumsikan memiliki kedalaman z , dan sel alga terdistribusi secara homogen di seluruh volume chemostat karena pengadukan konstan, serta pemanfaatan hukum Lambert-Beer $I = I_0 e^{-(\sigma+kX(t))z}$, maka Persamaan (6) menjadi

$$\mu_{max} = \beta k I_0 e^{-(\sigma+kX(t))z} \quad (7)$$

Kemudian Persamaan (7) disubstitusi ke Persamaan (5), diperoleh

$$Q = \frac{lY(t)}{\beta k I_0 e^{-(\sigma+kX(t))z}} + q \quad (8)$$

Selanjutnya, Persamaan (7) dan (8) disubstitusi ke Persamaan (4), sehingga diperoleh formula mekanistik untuk model Droop yaitu

$$\mu = \frac{\beta k I_0 e^{-(\sigma+kX(t))z} lY(t)}{q \beta k I_0 e^{-(\sigma+kX(t))z} + lY(t)} \quad (9)$$

6. Karena sel mengambil nutrisi untuk menggantikan nutrisi yang hilang akibat pertumbuhan sel, maka tingkat penyerapan nutrisi u sebanding dengan tingkat pertumbuhan mikroba μ . Sehingga

$$u = \mu Q \quad (10)$$

Berdasarkan asumsi nomor 3 terhadap asumsi nomor 1, maka Persamaan (10) menjadi

$$u = lY(t)$$

Dari asumsi yang dibangun tersebut, maka model matematika yang ditunjukkan Persamaan (1) dan (2) berubah menjadi Persamaan (11) dan (12).

$$\frac{dX(t)}{dt} = X(t) \left(\frac{\beta k I_0 e^{-(\sigma+kX(t))z} lY(t)}{q \beta k I_0 e^{-(\sigma+kX(t))z} + lY(t)} - D \right) \quad (11)$$

$$\frac{dY(t)}{dt} = D(N - Y(t)) - lY(t)X(t) \quad (12)$$

Sifat kestabilan di sekitar titik setimbang dari Persamaan (11) dan (12) ini telah dianalisis dan bisa dilihat secara lengkap di artikel [9].

3.1. Keterkontrolan

Sebelum dilakukan pengecekan keterkontrolan sistem, terlebih dahulu Persamaan (11) dan (12) dibentuk menjadi matriks *state space* dengan mengasumsikan tingkat pengenceran D sebagai variabel kendali $c(t)$. Sehingga model pertumbuhan mikroalga dalam chemostat dengan kendali yaitu

$$\frac{dX(t)}{dt} = X(t) \left(\frac{\beta k I_0 e^{-(\sigma+kX(t))z} l Y(t)}{q \beta k I_0 e^{-(\sigma+kX(t))z} + l Y(t)} - c \right) \quad (13)$$

$$\frac{dY(t)}{dt} = c(N - Y(t)) - lY(t)X(t) \quad (14)$$

Kemudian dilakukan linearisasi sehingga diperoleh matriks *state space* dari Persamaan (13) dan (14) yaitu

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} + B(t)\mathbf{u}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{dX(t)}{dt} \\ \frac{dY(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix} c \quad (15)$$

dengan

$$a_{11} = \frac{\beta k I_0 l \tilde{Y}}{q \beta k I_0 + l \tilde{Y} e^{(\sigma+k\tilde{X})z}} - v - \frac{\tilde{X} \beta I_0 z k^2 l^2 \tilde{Y}^2 e^{(\sigma+k\tilde{X})z}}{(q \beta k I_0 + l \tilde{Y} e^{(\sigma+k\tilde{X})z})^2}; \quad a_{12} = \frac{q \beta^2 k^2 I_0^2 l \tilde{X}}{(q \beta k I_0 + l \tilde{Y} e^{(\sigma+k\tilde{X})z})^2}; \quad a_{21} = -l \tilde{Y};$$

$$a_{22} = -v - l \tilde{X}; \quad b_{11} = -\tilde{X}; \quad b_{21} = N - \tilde{Y}.$$

Dimana $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{X}, \tilde{Y})^T$ adalah pasangan solusi dari variabel *state* (X, Y) dan v adalah nilai solusi dari variabel kendali c .

Setelah diperoleh bentuk *state space* dari Persamaan (13) dan (14) tersebut, selanjutnya adalah menentukan sifat keterkontrolannya. Keterkontrolan dilakukan melalui pembentukan suatu matriks M_c dari sistem. Sistem dikatakan dapat dikontrol oleh suatu inputan c (variabel kendali), jika $\text{rank}(M_c) = n$ dimana n menyatakan ordo dari matriks $A(t)$ [15]. Matriks M_c dari sistem ini ditunjukkan oleh Persamaan (16).

$$M_c = \begin{bmatrix} -\tilde{X} & m_1 \\ N - \tilde{Y} & m_2 \end{bmatrix} \quad (16)$$

dengan

$$m_1 = -\tilde{X} \left(\left(\frac{\beta k I_0 l \tilde{Y}}{q \beta k I_0 + l \tilde{Y} e^{(\sigma+k\tilde{X})z}} - v - \frac{\beta I_0 z k^2 l^2 \tilde{X} \tilde{Y}^2 e^{(\sigma+k\tilde{X})z}}{(q \beta k I_0 + l \tilde{Y} e^{(\sigma+k\tilde{X})z})^2} \right) - \frac{q \beta^2 k^2 I_0^2 l (N - \tilde{Y})}{(q \beta k I_0 + l \tilde{Y} e^{(\sigma+k\tilde{X})z})^2} \right);$$

$$m_2 = 2l\tilde{Y}\tilde{X} - vN + v\tilde{Y} - l\tilde{X}N.$$

Ordo matriks A adalah $n = 2$, dan rank matriks M_c dapat diperoleh dengan cara menentukan $\det(M_c)$.

$$\det(M_c) = \begin{vmatrix} -\tilde{X} & m_1 \\ N - \tilde{Y} & m_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Karena $\det(M_c) \neq 0$ maka $\text{rank}(M_c) = 2$, dengan kata lain $\text{rank}(M_c) = n$. Sehingga dapat dikatakan bahwa sistem terkontrol dengan inputan c .

3.2. Masalah Kendali Optimal

Setelah diketahui bahwa sistem terkontrol dengan inputan c , maka selanjutnya dapat dilakukan kendali optimal. Pada penelitian ini, diterapkan Prinsip Minimum Pontryagin untuk menentukan kendali optimal $c^*(t)$ yang memenuhi kondisi $c \in [0,1]$ dan membawa sistem (15) dari *state* awal menuju *state* akhir atau *state* target dalam waktu yang minimum. *State* akhir pada penelitian ini berupa kondisi setimbang dari Persamaan (11) dan (12) yang sudah dianalisis kestabilannya oleh Alzahrani dkk [9]. Adapun kondisi setimbang yang dimaksud adalah $(\bar{X} \neq 0, \bar{Y} = \frac{DN}{D+l\bar{X}})$. Berikut langkah-langkah dalam menyelesaikan masalah kendali optimal pada penelitian ini:

1. Menentukan persamaan fungsi tujuan

Fungsi tujuan pada permasalahan kendali optimal ini adalah meminimumkan waktu yang dibutuhkan *state* awal untuk menuju *state* akhir. Sehingga persamaan fungsi tujuannya yaitu

$$\min J = \int_{t_0}^{t_f} dt = t_f - t_0 \quad (17)$$

dengan $t_0 = 0$ adalah waktu awal dan t_f adalah waktu akhir yang nilainya tidak tetap (*free*).

2. Fungsi Hamiltonian

Fungsi Hamiltonian yang dapat dibentuk dari masalah kendali ini yaitu

$$H = 1 + \lambda^T f(X(t), Y(t), c(t), t)$$

dengan

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}, \text{ dan } f(X(t), Y(t), c(t), t) = \begin{bmatrix} \frac{dX}{dt} \\ \frac{dY}{dt} \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh

$$H = 1 + \lambda_1 X(t) \frac{\beta k l_0 e^{-(\sigma+kX(t))z} l Y(t)}{q \beta k l_0 e^{-(\sigma+kX(t))z} + l Y(t)} - \lambda_2 l Y(t) X(t) + c [-\lambda_1 X(t) + \lambda_2 (N - Y(t))]$$

3. Persamaan variabel *state* dan *costate*

Diasumsikan untuk nilai optimal dari $c(t), X(t), Y(t)$ dan $\lambda(t)$ masing-masing dilambangkan sebagai $c^*(t), X^*(t), Y^*(t), \lambda^*(t)$. Persamaan *state* dan *costatenya* yaitu

○ *State*

$$\dot{X}^*(t) = \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda_1} \right)_* = X(t) \left(\frac{\beta k I_0 e^{-(\sigma+kX^*(t))z} l Y^*(t)}{q \beta k I_0 e^{-(\sigma+kX^*(t))z} + l Y^*(t)} - c^* \right)$$

$$\dot{Y}^*(t) = \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda_2} \right)_* = c^*(N - Y^*(t)) - l Y^*(t) X^*(t).$$

○ *Costate*

$$\dot{\lambda}_1^*(t) = - \left(\frac{\partial H}{\partial X} \right)_*$$

$$= - \left[\lambda_1^* \left(\frac{\beta k I_0 e^{-(\sigma+kX^*(t))z} l Y^*(t)}{q \beta k I_0 e^{-(\sigma+kX^*(t))z} + l Y^*(t)} + \frac{-z \beta k^2 I_0 e^{-(\sigma+kX^*(t))z} (l Y^*(t))^2 X^*(t)}{(q \beta k I_0 e^{-(\sigma+kX^*(t))z} + l Y^*(t))^2} - c^* \right) - \lambda_2^* l Y^*(t) \right],$$

$$\dot{\lambda}_2^*(t) = - \left(\frac{\partial H}{\partial Y} \right)_*$$

$$= - \left[\lambda_1^* \frac{X^*(t) l q (\beta k I_0 e^{-(\sigma+kX^*(t))z})^2}{(q \beta k I_0 e^{-(\sigma+kX^*(t))z} + l Y^*(t))^2} - \lambda_2^* (l X^*(t) + c^*) \right].$$

Karena tipe dari sistem pada penelitian ini berupa *free-final time and fixed-final state system*, maka kondisi batasnya yaitu

$$X^*(t_0) = X(t_0); \quad Y^*(t_0) = Y(t_0); \quad X^*(t_f) = \bar{X}; \quad Y^*(t_f) = \bar{Y}.$$

Dan karena fungsi tujuannya hanya terdiri dari persamaan Lagrange, maka kondisi batasnya yang lain yaitu

$$[H^*]_{t_f} = 0$$

4. Kondisi optimal

Dengan menerapkan prinsip Pontryagin, kondisi optimal dapat diperoleh melalui berikut

$$H(X^*(t), Y^*(t), c^*(t), \lambda_1^*(t), \lambda_2^*(t), t) \leq H(X^*(t), Y^*(t), c(t), \lambda_1^*(t), \lambda_2^*(t), t)$$

yang dapat disederhanakan menjadi

$$\begin{aligned} c^* s^*(t) &\leq c s^*(t) \\ &= \min_{c(t) \in [0,1]} \{c s^*(t)\}. \end{aligned}$$

Dimana $s^*(t) = -\lambda_1^* X^*(t) + \lambda_2^* (N - Y^*(t))$ adalah fungsi *switching*.

5. Kendali bang-bang

Kendali bang-bang ini dilakukan sebagai akibat dari persamaan Hamiltonian yang linear terhadap variabel kendali $c(t)$ [22]. Atau dengan kata lain, tidak dapat ditentukan secara

eksplisit persamaan kendali optimal $c^*(t)$ dari $\frac{\partial H}{\partial c} = 0$. Sehingga, mengacu pada $s^*(t)$, variabel kendali optimal $c^*(t)$ berbentuk fungsi signum sebagai berikut:

$$c^*(t) = \begin{cases} 1 & \text{jika } s^*(t) < 0 \\ c(t) & \text{jika } s^*(t) = 0 \\ 0 & \text{jika } s^*(t) > 0 \end{cases}$$

atau dapat ditulis dalam bentuk *compact* sebagai

$$c^*(t) = -sgn\{s^*(t)\}$$

Ketika $s^*(t) = 0$, maka nilai $c^*(t)$ diperoleh dengan cara $\frac{ds^*(t)}{dt} = 0$, yaitu

$$c^*(t) = \frac{1}{\lambda_1^*} \left[\frac{\lambda_1^* \beta k I_0 e^{-(\sigma+kX^*(t))z} k l (X^*(t) l z (Y^*(t))^2 + (N-Y^*(t)) q \beta I_0 e^{-(\sigma+kX^*(t))z})}{(q \beta k I_0 e^{-(\sigma+kX^*(t))z} + l Y^*(t))^2} + \lambda_2^* (l Y^*(t) - l N) \right] \quad (18)$$

Masalah kendali bang-bang ini tidak dapat diselesaikan secara analitik. Sehingga penyelesaiannya menggunakan metode numerik dengan bantuan toolbox ICLOCS2[21].

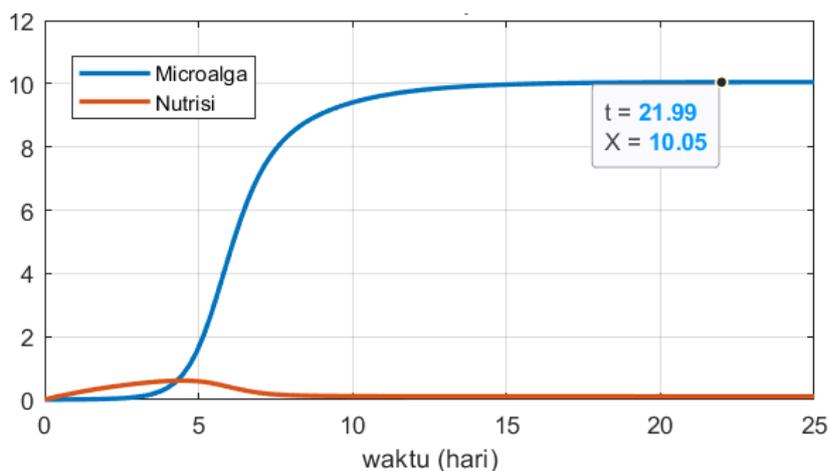
3.3. Simulasi Numerik

Simulasi ini dilakukan dengan tujuan untuk membandingkan perilaku sistem dengan dan tanpa kendali optimal. Adapun nilai parameter yang digunakan untuk simulasi numerik ditunjukkan oleh Tabel 1 dengan catatan bahwa $N, q, X(t)$, dan $Y(t)$ dinormalisasi oleh massa jenis air $(1 \frac{g}{cm^3})$ untuk mendapatkan massa jenis relatif (*non-dimensional*).

Tabel 1. Nilai Parameter [9]

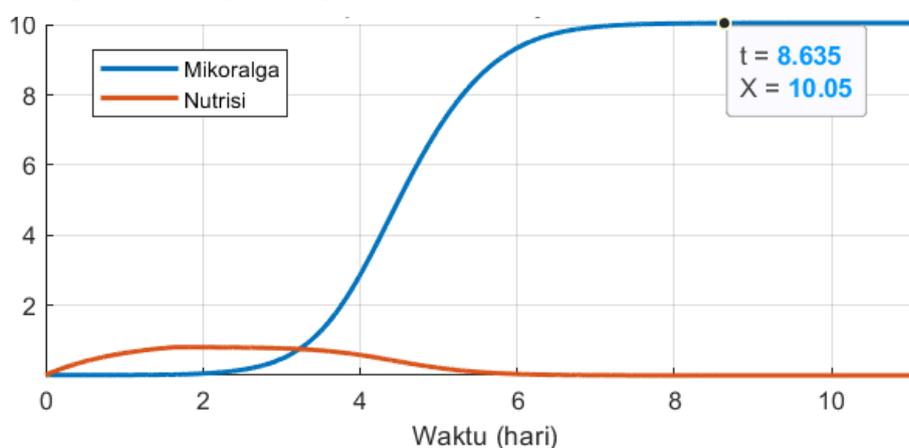
Parameter	Definisi	Nilai	Satuan
D	Tingkat Pengenceran	0.24	Per hari
k	Koefisien redaman cahaya	0.032	Per cm
β	Konstanta proporsionalitas	10	$J^{-1} cm^3$
σ	Kekeruhan	0.1	Per cm
z	Kedalaman chemostat	8	cm
l	Tingkat penyerapan nutrisi oleh sel alga secara individu	0.2	Per hari
I_0	Radiasi	50	$J. cm^{-2}$ per hari
N	Massa jenis nutrisi stok	1	<i>Non dimensional</i>
q	Kuota subsisten	0.05	<i>Non dimensional</i>

Dengan nilai kondisi awal $X(0) = 0.01$ dan $Y(0) = 0.01$, maka grafik model pertumbuhan mikroalga dalam chemostat tanpa kendali optimal ditunjukkan pada Gambar 1.



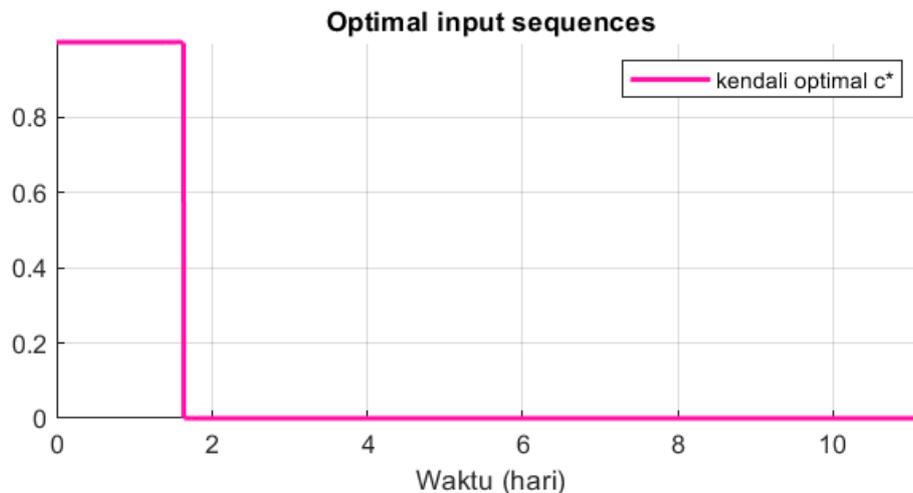
Gambar 1. Grafik model pertumbuhan mikroalga dalam chemostat tanpa kendali optimal

Dengan menggunakan nilai parameter pada Tabel 1, maka kondisi setimbang yang stabil dari Persamaan (11) dan (12) yaitu $\bar{X} \approx 10.05$, dan $\bar{Y} \approx 0.1067$. Kondisi setimbang dari massa jenis mikroalga ini dicapai pada waktu kurang lebih 22 hari. Dengan kata lain, sejak hari ke - 22, massa jenis mikroalga dalam chemostat mulai stabil dan tidak ada laju perubahan dari waktu ke waktu. Massa jenis mikroalga selama proses kulturisasi didalam chemostat akan bernilai konstan sejak hari ke-22. Selanjutnya dilakukan simulasi numerik untuk model pertumbuhan mikroalga dalam chemostat dengan kendali optimal. Grafik model pertumbuhan mikroalga dalam chemostat dengan kendali optimal ditunjukkan pada Gambar 2.



Gambar 2. Grafik model pertumbuhan mikroalga dalam chemostat dengan kendali optimal

Pada Gambar 2, terlihat bahwa kondisi setimbang dari massa jenis mikroalga dicapai pada waktu kurang lebih 9 hari. Hal ini menunjukkan bahwa massa jenis mikroalga dalam chemostat mencapai kondisi setimbang dalam waktu relatif lebih singkat saat diberi kendali optimal. Jika dibandingkan dengan sebelum diberi kendali optimal, massa jenis mikroalga dalam chemostat dapat mencapai kondisi setimbang 40.9% lebih cepat saat diberi kendali optimal. Sementara itu, profil kendali bang-bang untuk variabel $c(t)$ ditunjukkan pada Gambar 3.



Gambar 3. Profil nilai kendali optimal (kendali bang-bang)

Pada Gambar 3 tersebut terlihat bahwa perilaku kendali optimal berupa tingkat pengenceran ini mencapai nilai maksimum diawal yaitu 1. Namun, ketika mendekati hari ke-2, nilainya mengalami perubahan (*switching*) secara drastis menuju 0. Hasil ini menunjukkan bahwa upaya pemberian tingkat pengenceran harus dilakukan secara maksimal diawal, sehingga mengakibatkan laju massa jenis nutrisi meningkat tajam. Lalu kondisi ini dimanfaatkan untuk penyerapan nutrisi oleh mikroalga secara individu. Sehingga ketika tingkat pengenceran langsung berubah menuju 0, laju massa jenis mikroalga meningkat lebih cepat dan mencapai kondisi setimbang dalam waktu relatif lebih singkat. Jika sebelum diberi kendali optimal, massa jenis mikroalga membutuhkan waktu sekitar 22 hari untuk mencapai setimbang, maka ketika diberi kendali optimal, massa jenis mikroalga hanya membutuhkan waktu sekitar 9 hari untuk mencapai kondisi setimbang.

4 Simpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan, dapat disimpulkan bahwa penerapan Prinsip Minimum Pontryagin dalam menyelesaikan masalah kendali optimal model pertumbuhan mikroalga dalam chemostat berjalan dengan baik. Upaya pemberian kendali optimal berupa tingkat pengenceran dapat meminimumkan waktu yang dibutuhkan *state* awal untuk menuju *state* akhir secara optimal. Sehingga hal ini menjadikan kulturisasi mikroalga dalam chemostat mencapai kondisi setimbang dalam waktu relatif lebih cepat dibanding sebelum diberi kendali optimal. Meskipun penelitian ini hanya melalui analisis model matematikanya, tapi tidak menutup kemungkinan untuk dapat dijadikan acuan dalam masalah kendali optimal kulturisasi mikroalga dalam chemostat.

5 Ucapan Terima Kasih

Ucapan terimakasih kami sampaikan kepada Politeknik Negeri Malang melalui UPT P2M yang telah memberikan dukungan melalui pendanaan untuk penelitian yang kami lakukan.

6 Daftar Pustaka

- [1] H. Hadiyanto and N. P. Adetya, *Biorefinery Mikroalga*, 1st ed. Semarang: EF Press Digimedia, 2019. [Online]. Available: http://eprints.undip.ac.id/72170/1/buku_Refenery_DONE.pdf
- [2] I. Chang, A. K. Prasadhi, J. Im, and G. C. Cho, "Soil strengthening using thermo-gelation biopolymers," *Constr. Build. Mater.*, vol. 77, 2015, doi: 10.1016/j.conbuildmat.2014.12.116.
- [3] D. Amalia, B. Guritno, and G. Firuliadhim, "Pengaruh Biopolimer Pada Stabilitas Lereng Swelling soil," *Borneo Eng. J. Tek. Sipil*, vol. 5, no. 3, 2021, doi: 10.35334/be.v5i3.2099.
- [4] M. R. Droop, "SOME THOUGHTS ON NUTRIENT LIMITATION IN ALGAE," *J. Phycol.*, vol. 9, no. 3, 1973, doi: 10.1111/j.1529-8817.1973.tb04092.x.
- [5] J. Monod, "Technique, Theory and Applications of Continuous Culture.," *Ann. Inst. Pasteur*, vol. 79, no. 4, 1950.
- [6] A. Thornton *et al.*, "Modeling, optimization of algae growth," 2010.
- [7] H. Sovová and R. P. Stateva, "New developments in the modelling of carotenoids extraction from microalgae with supercritical CO₂," *J. Supercrit. Fluids*, vol. 148, 2019, doi: 10.1016/j.supflu.2019.03.002.
- [8] H. F. L. García and N. L. Mejía, "Mathematical Model of a Bubble Column for the Increased Growth of *Arthrospira platensis* and the Formation of Phycocyanin," *Int. J. Technol.*, vol. 12, no. 2, 2021, doi: 10.14716/ijtech.v12i2.4256.
- [9] E. O. Alzahrani, M. M. El-Dessoky, and P. Dogra, "Global dynamics of a cell quota-based model of light-dependent algae growth in a chemostat," *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, vol. 90, 2020, doi: 10.1016/j.cnsns.2020.105295.
- [10] O. Bernard, "Hurdles and challenges for modelling and control of microalgae for CO₂ mitigation and biofuel production," *IFAC Proc. Vol.*, vol. 43, no. 5, 2010, doi: 10.3182/20100705-3-be-2011.00111.
- [11] N. Izzati, "ANALISIS KESTABILAN DAN KENDALI OPTIMAL PADA MODEL DINAMIKA MODULASI ENERGI CAHAYA DALAM FOTOSINTESIS ALGA," *Reaktom Rekayasa Keteknikan dan Optimasi*, vol. 2, no. 1, 2017, doi:

- 10.33752/reaktom.v2i1.152.
- [12] Mardlijah, A. Fadhillah, and L. Hanafi, "Performance Analysis of Linear Quadratic Regulator Method in Microalga Growth with Control of Light Intensity," in *Journal of Physics: Conference Series*, 2020, vol. 1463, no. 1. doi: 10.1088/1742-6596/1463/1/012004.
- [13] Azim, R. Ratianingsih, and N. Nacong, "Model Matematika Kendali Optimal Intensitas Cahaya Dan Nutrisi Pada Pertumbuhan Mikroalga Dengan Menggunakan Metode Pontryagin," *J. Ilm. Mat. DAN Terap.*, vol. 17, no. 1, 2020, doi: 10.22487/2540766x.2020.v17.i1.15173.
- [14] Mardlijah, A. Jamil, L. Hanafi, and S. Sanjaya, "Optimal control of algae growth by controlling CO₂ and nutrition flow using Pontryagin Maximum Principle," in *Journal of Physics: Conference Series*, 2017, vol. 890, no. 1. doi: 10.1088/1742-6596/890/1/012042.
- [15] D. Subbaram Naidu, *Optimal control systems*. CRC Press, 2002. doi: 10.1515/9783110306637-005.
- [16] W. Ningsih, S. Sumardi, and ..., "Kendali Optimal Model Matematika Penyebaran Rumor pada Jaringan Sosial Daring dengan Pemberian Pernyataan Balasan," ... dan Nilai-Nilai ..., 2020.
- [17] W. Ningsih, "Pengendalian Optimal Model Epidemi Flu Burung pada Unggas-Manusia dengan Pengobatan pada Manusia dan Depopulasi pada Unggas," *Sq. J. Math. Math. Educ.*, vol. 3, no. 1, 2021, doi: 10.21580/square.2021.3.1.7871.
- [18] D. Idayani and S. Subchan, "Optimal Control of Multi-Supplier Inventory Management with Lead Time," *Int. J. Comput. Sci. Appl. Math.*, vol. 6, no. 1, 2020, doi: 10.12962/j24775401.v6i1.5040.
- [19] R. W. Dewanti and S. Subchan, "Kendali Optimal Model Diversifikasi Beras dan Non-beras dengan Target Akhir Konsumsi," *SPECTA J. Technol.*, vol. 1, no. 3, 2019, doi: 10.35718/specta.v1i3.88.
- [20] Subiono, "Sistem Linear dan Kontrol Optimal," p. 255, 2013.
- [21] Y. Nie, O. Faqir, and E. C. Kerrigan, "ICLOCS2: Try this Optimal Control Problem Solver before you Try the Rest," 2018. doi: 10.1109/CONTROL.2018.8516795.
- [22] S. Subchan and R. Zbikowski, *Computational Optimal Control: Tools and Practice*. 2009. doi: 10.1002/9780470747674.