J. Math. and Its Appl.
ISSN: 1829-605X
Vol. 3, No. 2, Nov 2006, 49–56

Batas Bilangan Ajaib Pada Graph Caterpillar

Chairul Imron
Jurusan Matematika
FMIPA ITS Surabaya
imron-its@matematika.its.ac.id

Abstrak

Jika suatu graph diberi label pada setiap simpul dan sisi dengan bilangan sebanyak simpul dan sisi, maka graph tersebut mempunyai sifat total sisi ajaib jika label pada setiap sisi dan simpul yang insiden dengan sisi tersebut dijumlahkan mempunyai jumlah yang sama. Bilangan tersebut dinamakan bilangan ajaib dari suatu graph. Untuk mendapatkan bilangan tersebut perlu dilakukan terlebih dahulu mencari batas minimum dan maksimum. Pada paper ini akan dicari batas minimum dan maksimum bilangan ajaib dari graph caterpillar.

Kata Kunci: *Graph Caterpillar, Total Sisi Ajaib*

1. Pendahuluan

Pemberian label pada graph G adalah pemetaan satu-satu yaitu memetakan semua simpul dan sisi dari graph tersebut ke suatu bilangan yang biasanya merupakan bilangan $1, 2, 3, \cdots$. Dengan kata lain, pelabelan graph adalah pemberian label pada simpul-simpul dan sisi-sisi dari graph, sehingga setiap simpul dan setiap sisi mempunyai label yang berbeda. Pelabelan yang domainnya berupa himpunan simpul, himpunan sisi, atau keduanya yang biasanya disebut dengan *pelabelan simpul, pelabelan sisi*, dan *pelabelan total*[3]. Pada paper ini, akan dibahas pelabelan total, khususnya pelabelan total sisi ajaib yakni pelabelan dimana jumlah label sisi dan label simpul-simpul yang menempel pada sisi tersebut selalu sama untuk setiap sisi. Jumlah tersebut disebut *angka ajaib*, yang biasa dilambangkan dengan huruf k. Ide pelabelan ini dikenalkan pertama kali oleh Sedl*áč*ek [5] pada 1960-an, selanjutnya diformulasikan oleh Kotzig dan Rosa [6] pada tahun 1970-an.

Pada paper ini akan dicari batas minimum dan maksimum himpunan kritis pada pelabelan suatu graph. Graph yang akan dikaji adalah graph caterpillar. Pelabelan pada sebuah graph diberi tanda dengan sejumlah label pada simpul dan sisi graph, sehingga setiap label sisi pada graph tersebut tergantung kepada label kedua simpul yang menempel pada sisi tersebut.

Pada paper ini, hanya membahas pelabelan total sisi ajaib yang didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 1.1 *[3, 7, 1, 2] Pelabelan total sisi ajaib pada graph G adalah pemetaan satu-satu λ dari $V \cup E$ kepada himpunan bilangan bulat $\{1, 2, 3, \ldots, v+e\}$ dengan $v = |V|$ dan $e = |E|$, sedemikian sehingga ada suatu bilangan konstan k dimana*

$$\lambda(x) + \lambda(xy) + \lambda(y) = k \tag{1}$$

untuk setiap sisi $xy \in E$

Untuk lebih mudah, sebut $\lambda(x) + \lambda(xy) + \lambda(y)$ sebagai *penjumlahan sisi xy*, dan k adalah angka ajaib dari graph G. Suatu graph disebut *ajaib* jika graph tersebut dapat dikenakan pelabelan total sisi ajaib.

Suatu graph mempunyai total sisi-ajaib, maka jumlah angka ajaib pada setiap sisinya adalah jumlahan yang memuat semua label pada simpul dan sisi ditambah dengan $d_i - 1$ kali simpul yang mempunyai derajat d_i atau

$$k|E| = 1 + 2 + 3 + \ldots + (v + e) + \Sigma(d_i - 1)x_i \tag{2}$$

Pada paper ini akan dikaji, bagaimana mencari batas minimal dan maksimal bilangan ajaib dari graph caterpillar $\mathcal{C}_n$.

2. Hasil

Pada bagian ini akan dibahas bagaimana mencari batas minimal dan maksimal bilangan ajaib dari graph caterpillar yang sesuai dengan Definisi 1.1 yang dinyataka dalam dua teorema, yaitu Teorema 2.1 dan Teorema 2.2. Sebelum lebih jauh, perhatikan beberapa pengertian simbul sederhana dibawah ini:

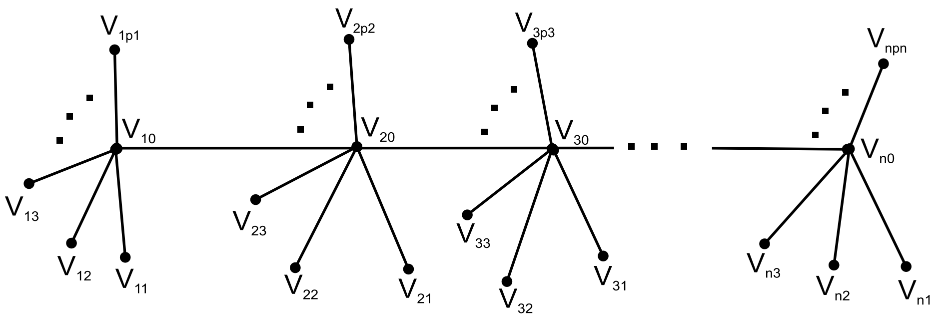
1. S_v menyatakan jumlah label pada semua simpul

2. S_e menyatakan jumlah label pada semua sisi

3. p_i jumlah simpul daun pada star ke i

4. d_i jumlah simpul pusat star ke i

5. $x_i = \lambda(v_{i0})$ label pada pusat star ke i



Gambar 1: Graph Caterpillar

Perhatikan Gambar 1 adalah gambar graph caterpilar yang terdiri dari n graph star yang terhubung pada pusat graph star, oleh karena itu

$$V = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$$

dimana

$$S_i = \{v_{i0}, v_{i1}, v_{i2}, \ldots, v_{ip_1}\}$$

dengan p_i adalah banyaknya daun pada S_i dan v_{i0} adalah simpul pusat star ke i, dengan $i = 1, 2, \cdots, n$, sehingga jumlah simpul pada graph caterpillar $\mathcal{C}_n$ adalah jumlah semua daun pada setiap star ditambah dengan jumlah simpul pusat star atau

$$v = |V| = \sum_{i=1}^{n} |S_i| = \sum_{i=1}^{n} (p_i + 1) = n + \sum_{i=1}^{n} p_i$$

karena graph caterpillar termasuk graph pohon, maka jumlah sisi pada graph caterpillar $\mathcal{C}_n$ adalah $e = |E| = v - 1$ sehingga jumlah bilangan integer yang dibutuhkan untuk melabeli caterpillar adalah

$$v + e = 2(n + \sum_{i=1}^{n} p_i) - 1$$

Teorema 2.1 *Setiap graph caterpillar $\mathcal{C}_n$ mempunyai batas minimum bilangan ajaib adalah*

$$k \geq \frac{2((n + \sum_{i=1}^{n} p_i) - 1)(n + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i) + \dfrac{n+1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i}{(n + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i) - 1}$$

Bukti:

Pandang graph caterpillar $\mathcal{C}_n$ diatas dan perhatikan definisi pelabelan total sisi ajaib, bahwa jumlah label pada setiap sisi dan simpul yang insiden dengan sisi tersebut harus mempunyai jumlah yang sama, sehingga setiap label pada simpul akan digunakan atau dijumlahkan pada sisi yang lain sesuai dengan derajat pada simpul tersebut.

Oleh karena itu

$$ke \geq S_v + S_e + \sum_{i=1}^{n} (d_i - 1)x_i$$

karena $d_i - 1 = p_i$, maka

$$ke \geq S_v + S_e + \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \tag{3}$$

Label pada setiap simpul akan digunakan atau dijumlah sesuai besarnya derajat dari simpul tersebut, maka bilangan ajaib akan minimum jika semua simpul mempunyai label bilangan terkecil, khususnya pada label simpul pada pusat star. Label yang mungkin dikenakan pada simpul yaitu

$$\lambda(simpul) = 1, 2, 3, \ldots, v$$

Karena tidak diketahui derajat terbesar simpul pada star, maka kemungkinan pelabelan pada pusat star yaitu

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} p_i x_i &= p_1 1 + p_2 2 + \cdots + p_n n, \quad \text{atau} \\
&= p_1 n + p_2 (n-1) + \cdots + p_n 1, \quad \text{atau} \\
&= p_1 2 + p_2 4 + \cdots + p_n 2n, \quad \text{atau yang lainya}
\end{aligned}$$

Jika dianggap derajat dari simpul pusat adalah sama, dan label pada simpul diambil rata-rata, yaitu

$$\frac{1 + 2 + 3 + \cdots + n}{n} = \frac{n(n+1)}{n} = \frac{n+1}{2}$$

maka

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = \frac{n+1}{2} \sum_{i=1}^{n} p_i \tag{4}$$

Sedangkan

$$\begin{aligned} S_v + S_e &= 1+2+3+\cdots+(v+e) \\ &= 1+2+3+\cdots+2(n+\sum_{i=1}^{n} p_i) - 1 \\ &= \frac{(2(n+\sum_{i=1}^{n} p_i) - 1)(2(n+\sum_{i=1}^{n} p_i))}{2} \\ &= 2((n+\sum_{i=1}^{n} p_i) - 1)(n+\sum_{i=1}^{n} p_i) \end{aligned} \tag{5}$$

Jika Persamaan (5) dan Persamaan (4) disubstitusikan ke Persamaan (3), menjadi

$$ke \geq 2((n+\sum_{i=1}^{n} p_i) - 1)(n+\sum_{i=1}^{n} p_i) + \frac{n+1}{2} \sum_{i=1}^{n} p_i$$

atau bilangan ajaibnya adalah

$$k \geq \frac{2((n+\sum_{i=1}^{n} p_i) - 1)(n+\sum_{i=1}^{n} p_i) + \frac{n+1}{2} \sum_{i=1}^{n} p_i}{(n+\sum_{i=1}^{n} p_i) - 1} \qquad \blacksquare \tag{6}$$

Teorema yang kedua adalah batas maksimum yang mungkin pada caterpillar, yaitu

Teorema 2.2 *Setiap graph caterpillar $\mathcal{C}_n$ mempunyai batas maksimum bilangan ajaib adalah*

$$k \leq \frac{2((n+\sum_{i=1}^{n} p_i) - 1)(n+\sum_{i=1}^{n} p_i) + \frac{1}{2}\left(3n - 1 + 4\sum_{i=1}^{n} p_i\right) \sum_{i=1}^{n} p_i}{(n+\sum_{i=1}^{n} p_i) - 1}$$

Bukti:

Dengan cara yang seperti teorema sebelumnya, maka

$$ke \leq S_v + S_e + \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \tag{7}$$

Label pada setiap simpul akan digunakan atau dijumlah sesuai besarnya derajat dari simpul tersebut, maka bilangan ajaib akan maksimum jika label pada sisi adalah label terkecil yaitu

$$\lambda(sisi) = 1, 2, 3, \ldots, (v-1)$$

atau

$$\lambda(sisi) = 1, 2, 3, \ldots, (n + \sum_{i=1}^{n} p_i - 1)$$

atau label pada simpul adalah label terbesar, yaitu

$$\lambda(simpul) = (n + \sum_{i=1}^{n} p_i), (n + \sum_{i=1}^{n} p_i + 1), \ldots, 2(n + \sum_{i=1}^{n} p_i) - 1$$

Karena tidak diketahui derajat terbesar simpul pada star, maka kemungkinan pelabelan pada pusat star yaitu

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i &= p_1(n + \sum_{i=1}^{n} p_i) + p_2(n + \sum_{i=1}^{n} p_i + 1) + \cdots + p_n(2(n + \sum_{i=1}^{n} p_i) - 1), \quad \text{atau} \\ &= p_1(2(n + \sum_{i=1}^{n} p_i) - 1) + p_2(2(n + \sum_{i=1}^{n} p_i) - 2) + \cdots + p_n(n + \sum_{i=1}^{n} p_i)\end{aligned}$$

Jika dianggap derajat dari simpul pusat adalah sama, dan label pada simpul diambil rata-rata, yaitu

$$\frac{(2(n + \sum_{i=1}^{n} p_i) - n) + \cdots + (2(n + \sum_{i=1}^{n} p_i) - 2) + \cdots + (2(n + \sum_{i=1}^{n} p_i) - 1)}{n}$$

atau

$$\frac{(2n(n + \sum_{i=1}^{n} p_i) - (\frac{n(n+1)}{2})}{n} = 2(n + \sum_{i=1}^{n} p_i) - \frac{n+1}{2}$$

atau

$$2\sum_{i=1}^{n} p_i + \frac{3n-1}{2} = \frac{3n - 1 + 4\sum_{i=1}^{n} p_i}{2}$$

maka

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = \frac{1}{2}\left(3n - 1 + 4\sum_{i=1}^{n} p_i\right)\sum_{i=1}^{n} p_i \tag{8}$$

Sedangkan $S_v + S_e$ sama seperti Persamaan 5, yaitu

$$S_v + S_e \quad = \quad 2((n + \sum_{i=1}^{n} p_i) - 1)(n + \sum_{i=1}^{n} p_i) \tag{9}$$

Jika Persamaan (9) dan Persamaan (8) disubstitusikan ke Persamaan (7), menjadi

$$ke \leq 2((n + \sum_{i=1}^{n} p_i) - 1)(n + \sum_{i=1}^{n} p_i) + \frac{1}{2}\left(3n - 1 + 4\sum_{i=1}^{n} p_i\right)\sum_{i=1}^{n} p_i$$

atau bilangan ajaibnya adalah

$$k \leq \frac{2((n + \sum_{i=1}^{n} p_i) - 1)(n + \sum_{i=1}^{n} p_i) + \frac{1}{2}\left(3n - 1 + 4\sum_{i=1}^{n} p_i\right)\sum_{i=1}^{n} p_i}{(n + \sum_{i=1}^{n} p_i) - 1} \quad \blacksquare \tag{10}$$

3. Penutup

Dari uraian diatas dapat ditarik kesimpulan, bahwa batas minimal bilangan ajaib dari pelabelan total edge-magic dari graph caterpillar adalah

$$k \geq \frac{2((n + \sum_{i=1}^{n} p_i) - 1)(n + \sum_{i=1}^{n} p_i) + \frac{n+1}{2}\sum_{i=1}^{n} p_i}{(n + \sum_{i=1}^{n} p_i) - 1}$$

dan batas maksimal bilangan ajaib dari pelabelan total edge-magic dari graph caterpillar adalah

$$k \leq \frac{2((n + \sum_{i=1}^{n} p_i) - 1)(n + \sum_{i=1}^{n} p_i) + \frac{1}{2}\left(3n - 1 + 4\sum_{i=1}^{n} p_i\right)\sum_{i=1}^{n} p_i}{(n + \sum_{i=1}^{n} p_i) - 1}$$

Pustaka

[1] Chairul Imron, Variasi Pelabelan Graph Lintasan dan Star, Seminar Nasional Matematika ITS, 4 Desember 2004.

[2] Chairul Imron, Several Ways to Obtain Edge-Magic Total Labelings of Caterpillars, International Workshop on Graph Labeling, Batu, Malang, 6-9 Desember 2004.

[3] E.T. Baskoro, Pelabelan Total Sisi Ajaib *Prosiding Konferensi Nasional Matematika XI* Bagian I (2002) 281-285.

[4] E.T. Baskoro, Critical Sets in Edge-Magic Total Labelings. 2005.

[5] J. Sedlacek, problem 27, *Theory of Graphs and it's Applications* (Smolenice, 1963), 163-164, Publ. House Czechoslovak Acad. Sci.,Prague, 1964).

[6] A. Kotzig and A. Rosa, Magic Valuations of Finite Graph, *Canad. Math. Bull.* 13 (1970), 451-461.

[7] W.D. Wallis, *Magic Graphs*, Birkhauser Boston, 2001.