Limits
J. Math. and Its Appl.
ISSN: 1829-605X
Vol. 4, No. 1, May 2007, 17–25

Konstruksi Matriks NonNegatif Simetri dengan Spektrum Bilangan Real

Bambang Sugandi[1] **dan Erna Apriliani**[2]
[1]Jurusan Matematika, FMIPA Unibraw, Malang
bamsugan@brawijaya.ac.id
[2]Jurusan Matematika, FMIPA ITS, Surabaya
april@matematika.its.ac.id

Abstrak

Diberikan suatu himpunan bilangan real $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$. Jika terdapat matriks nonnegatif simetri $A_{n\times n}$ dengan spektrum Λ, maka spektrum dapat direalisasikan oleh matriks A. Pada makalah ini ditunjukkan bahwa eksistensi matriks nonnegatif simetri A ditentukan dengan menggunakan kriteria realisasi. Selanjutnya, matriks nonnegatif simetri dapat dikonstruksi dengan menggunakan jumlah langsung. Disini diberikan sebuah contoh konstruksi matriks nonnegatif simetri.

Kata Kunci: *konstruksi, realisasi, spektrum, matriks nonnegatif simetri*

1. Pendahuluan

Konstruksi matriks nonnegatif simetri dengan spektrum bilangan real adalah tahapan pembentukan matriks nonnegatif simetri, jika diberikan spektrumnya berupa bilangan real. Konstruksi matriks dapat dilakukan jika kriteria realisasi matriks dipenuhi.

Dalam R.Soto [5], dikemukakan tentang realisasi matriks nonnegatif dengan spektrum bilangan real, yang isinya menyangkut syarat cukup untuk keberadaan matriks nonnegatif dengan spektrum bilangan real. Sedangkan dalam R.Soto [6], dikemukakan tentang realisasi matriks nonnegatif simetri, yang menjelaskan mengenai berlakunya syarat cukup [5] untuk matriks nonnegatif simetri dan konstruksinya.

Dalam tulisan ini akan dibahas mengenai kontruksi matriks nonnegatif simetri dengan spektrum bilangan real. Diberikan beberapa lemma dari M.Fiedler [2] yang sangat mendukung dalam penyelesaian konstruksi. Diberikan juga contoh konstruksi matriks nonnegatif dari spektrum bilangan real.

2. Beberapa Definisi dan Lemma

Pada bab ini diberikan beberapa definisi dan lemma yang berkaitan dengan konstruksi suatu matriks, antara lain spektrum matriks, realisasi matriks, jumlah langsung serta beberapa lemma

Definisi 2.1 Spektrum Matriks
Misalkan $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ *adalah nilai-nilai eigen matriks* A *dengan orde* n. *Maka spektrum dari* A *yang dinyatakan dengan* $\Lambda(A)$ *adalah himpunan semua nilai-nilai eigen dari* A, *atau* $\Lambda(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$. *Jika* A *merupakan matriks simetri dengan unsur real, maka nilai-nilai eigennya bilangan real, sehingga* $\Lambda(A)$ *merupakan sebuah himpunan bilangan real [1, 3].*

Definisi 2.2 Realisasi Matriks
Misalkan $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$ *suatu himpunan bilangan real dengan* $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_p \geq \lambda_{p+1} \geq \cdots \geq \lambda_n$, *akan ditentukan matriks nonnegatif* $A_{n\times n}$ *sedemikian sehingga* Λ *merupakan spektrum dari* A. *Jika terdapat matriks nonnegatif* $A_{n\times n}$ *dengan spektrum* Λ, *maka dikatakan bahwa* Λ *direalisasikan oleh* A*[6].*

Definisi 2.3 Jumlah Langsung Matriks
Suatu matriks $A_{n\times n}$ *blok diagonal adalah suatu partisi matriks* $A = (A_{ij})$, *dengan:*

i. *setiap* A_{ii} *merupakan matriks bujur sangkar*

ii. *Jika* $i \neq j$, A_{ij} *merupakan matriks yang semua elemen-elemennya* 0.

Jika $A = (A_{ij})$ *adalah blok diagonal, maka* A *merupakan jumlah langsung dari* $A_{11}, A_{22}, \cdots, A_{tt}$ *atau* $A = A_{11} \bigoplus A_{22} \bigoplus \cdots \bigoplus A_{tt}$*.[7]*

Di bawah ini akan diberikan beberapa lemma penting yang sangat mendukung untuk pembuktian teorema maupun konstruksi matriks nonnegatif simetri.

Lemma 2.4 *[2]*
Misalkan A suatu matriks simetri $n \times n$ dengan nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$. Misalkan $\overline{v}$, $\|\overline{v}\| = 1$, merupakan vektor eigen satuan dari A yang berkaitan dengan λ_1. Misalkan B suatu matriks simetri $m \times m$ dengan nilai eigen $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$. Misalkan $\overline{u}$, $\|\overline{u}\| = 1$ merupakan vektor eigen satuan dari B yang berkaitan dengan β_1, maka untuk sembarang ρ, matriks

$$C = \begin{pmatrix} A & \rho\overline{u}\ \overline{v}^T \\ \rho\overline{u}\ \overline{v}^T & B \end{pmatrix}$$

mempunyai nilai eigen $\lambda_2, \cdots, \lambda_n, \beta_2, \cdots, \beta_m, \gamma_1, \gamma_2$ dimana γ_1 dan γ_2 merupakan nilai eigen dari matriks

$$\overline{C} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \rho \\ \rho & \beta_1 \end{pmatrix}$$

Lemma 2.5 *[2]*
Jika $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\} \in S_n$, $\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m\} \in S_m$ dan $\varepsilon \geq max\{0, \beta_1 - \alpha_1\}$ maka $\{\alpha_1 + \varepsilon, \beta_1 - \varepsilon, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \beta_2, \cdots, \beta_m\} \in S_{n+m}$.

Lemma 2.6 *[2]*
Jika $\Lambda = \{\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}\} \in S_n$, dan $\varepsilon > 0$, maka $\{\alpha_0 + \varepsilon, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}\} \in \overline{S}_n$.

3. Kriteria Realisasi Matriks Nonnegatif Simetri

Berikut ini akan ditunjukkan bahwa kriteria realisasi pada Teorema 3.1 merupakan syarat cukup untuk keberadaan matriks nonnegatif simetri dengan spektrum Λ.

Teorema 3.1 *[6]*
Misalkan $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$ merupakan himpunan bilangan real sedemikan sehingga $\lambda_1 \geq \lambda_1 \geq \cdots \lambda_p \geq 0 \geq \lambda_{p+1} \geq \cdots \geq \lambda_n$. Jika Λ memenuhi kriteria realisasi yang diberikan dalam [5], yaitu $\lambda_1 \geq -\lambda_n - \sum_{S_k<0} S_k$, dengan $S_k = \lambda_k + \lambda_{n-k+1}$, $k = 2, 3, \cdots, [\frac{n}{2}]$ dan $S_{\frac{n+1}{2}} = min\{\lambda_{\frac{n+1}{2}}, 0\}$ untuk n ganjil, maka Λ direalisasikan oleh matriks nonnegatif simetri A berorde $n \times n$.

Bukti:
Misalkan Λ memenuhi kriteria realisasi, yaitu $\lambda_1 \geq -\lambda_n - \sum_{S_k<0} S_k$ dengan $S_k = \lambda_k + \lambda_{n-k+1}$, $k = 2, 3, \cdots, [\frac{n}{2}]$ dan $S_{\frac{n+1}{2}} = min\{\lambda_{\frac{n+1}{2}}, 0\}$ untuk n ganjil. Cukup dibuktikan untuk $\lambda_1 = -\lambda_n - \sum_{S_k<0} S_k$, karena, jika $\lambda_1 = -\lambda_n - \sum_{S_k<0} S_k$ dengan $\mu_1 = -\lambda_n - \sum_{S_k<0} S_k$ maka dapat diambil $\overline{\Lambda} = \{\mu_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$. Jadi,

jika $\overline{\Lambda} \in S_n$ maka dengan menggunakan Lemma 2.6, $\varepsilon = \lambda_1 - \mu_1 > 0$ menunjukkan bahwa $\Lambda \in \widehat{S}_n$.

Misalkan $\Lambda_k = \{\lambda_k, \lambda_{n-k+1}\}$; $k = 1, 2, \cdots, [\frac{n}{2}]$ dan $\Lambda_{\frac{n+1}{2}} = \{\lambda_{\frac{n+1}{2}}\}$ untuk n ganjil. Dengan $[\frac{n}{2}]$ adalah bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan $\frac{n}{2}$.

Selanjutnya, bentuk partisi berikut, $\Lambda = \bigcup_{k=1}^{[n/2]} \Lambda_k$ untuk n genap, dan $\Lambda = \bigcup_{k=1}^{[n/2]} \Lambda_k \cup \Lambda_{\frac{n+1}{2}}$ untuk n ganjil. Maka ada subset Λ_k yang dapat direalisasikan oleh matriks nonnegatif simetri

$$B_k = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda_k + \lambda_{n-k+1} & \lambda_k - \lambda_{n-k+1} \\ \lambda_k - \lambda_{n-k+1} & \lambda_k + \lambda_{n-k+1} \end{pmatrix}$$

Sehingga subset-subset Λ_k di atas dapat dibagi dalam tiga kelompok yaitu:

a. Subset-subset Λ_k yang dapat direalisasikan oleh matriks nonnegatif simetri B_k, atau $S_k \geq 0$.

b. Subset $\Lambda_1 = \{\lambda_1, \lambda_n\}$ yang merupakan subset yang dapat direalisasikan oleh B_1.

c. Subset-subset $\Lambda_k$yang tidak dapat direalisasikan oleh matriks nonnegatif simetri B_k, atau $S_k < 0$

Masing-masing kelompok dapat dijelaskan sebagai berikut:

a. Susun subset-subset Λ_k dengan $S_k \geq 0$, yang dinyatakan dengan $\Lambda_{t+1}, \cdots, \Lambda_{[\frac{n}{2}]}$ adalah subset-subset yang dapat direalisasikan. Selanjutnya, jika terdapat suatu subset Λ_k yang dapat direalisasikan oleh matriks B_k maka jumlah langsungnya berlaku:

   i. untuk n genap, $B = \bigoplus_{k=t+1}^{[\frac{n}{2}]} B_k$ adalah matriks nonnegatif simetri yang merealisasi $\Lambda = \bigcup_{k=t+1}^{[\frac{n}{2}]} \Lambda_k$, atau

   ii. untuk n ganjil $B = \bigoplus_{k=t+1}^{[\frac{n}{2}]} B_k \bigoplus B_{\frac{n+1}{2}}$ dengan $B_{\frac{n+1}{2}} = (\lambda_{\frac{n+1}{2}})$, jika $\lambda_{\frac{n+1}{2}} \geq 0$ adalah matriks nonnegatif simetri yang merealisasi $\Lambda = \bigcup_{k=t+1}^{[\frac{n}{2}]} \Lambda_k \cup \Lambda_{\frac{n+1}{2}}$.

b. Subset $\Lambda_1 = \{\lambda_1, \lambda_n\}$ adalah subset yang dapat direalisasikan oleh B_1,

$$B_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_n & \lambda_1 - \lambda_n \\ \lambda_1 - \lambda_n & \lambda_1 + \lambda_n \end{pmatrix}$$

c. Susun subset-subset Λ_k dengan $S_k < 0$, yang dinyatakan dengan $\Lambda_2, \Lambda_3, \cdots, \Lambda_t, \quad t \leq [\frac{n}{2}]$ adalah subset-subset yang tak dapat direalisasikan. Jika terdapat suatu subset Λ_k, untuk $k = 2, 3, \cdots, t$ yang merupakan himpunan yang tak dapat direalisasikan; maka Λ_k digabungkan dengan himpunan yang dapat direalisasikan $\Lambda_1 = \{\lambda_1, \lambda_n\}$ dan susun kembali $2t$ anggota dalam $\bigcup_{k=1}^{t} \Lambda_k$ sebagai berikut $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_t \geq \lambda_{t+1} \geq \cdots \geq \lambda_{2t-1} \geq \lambda_{2t}$. Kemudian untuk setiap satu dari himpunan λ_k, $k = 1, 2, \cdots, t$ didefinisikan himpunan yang bersesuaian $\Gamma_k = \{-\lambda_{2t-k+1}, \lambda_{2t-k+1}\}$ yang dapat direalisasikan oleh matriks nonnegatif simetri,

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda_{2t-k+1} \\ -\lambda_{2t-k+1} & 0 \end{pmatrix}$$

dengan $\Gamma_{\frac{2t+1}{2}} = \{0\}$ jika $\lambda_{\frac{2T+1}{2}} < 0$ untuk n ganjil , yang dapat direalisasikan oleh matriks nonnegatif simetri $A_{\frac{2t+1}{2}} = (0)$.

Selanjutnya dilakukan langkah-langkah sebagai berikut:
Pertama, gabungkan himpunan-himpunan $\Gamma_1 = \{-\lambda_{2t}, \lambda_{2t}\} \in S_2$ dan $\Gamma_2 = \{-\lambda_{2t-1}, \lambda_{2t-1}\} \in S_2$ untuk mendapatkan himpunan baru $\Delta_2 \in S_4$, menurut Lemma 2.5 dengan mengambil $\varepsilon = -S_2 = -(\lambda_2 + \lambda_{2t-1}) > 0$, maka diperoleh

$$-\lambda_{2t} + \varepsilon_2 = -\lambda_{2t} - S_2 = -\lambda_2 - (\lambda_2 + \lambda_{2t-1})$$

$$-\lambda_{2t-1} - \varepsilon_2 = -\lambda_{2t-1} + S_2 = -\lambda_{2t-1} + (\lambda_2 + \lambda_{2t-1}) = \lambda_2$$

dan

$$\Delta_2 = \{-\lambda_{2t} - S_2, \lambda_2, \lambda_{2t-1}, \lambda_{2t}\} \in S_4$$

Selanjutnya, gabungkan Δ_2 dengan $\Gamma_3 = \{-\lambda_{2t-2}, \lambda_{2t-2}\}$. Ambil $\varepsilon_3 = -S_3 = -(\lambda_3 + \lambda_{2t-2}) > 0$, sehingga diperoleh $-\lambda_{2t} - S_3 + \varepsilon_3 = -\lambda_{2t} - S_2 - S_3$ maka $-\lambda_{2t-2} - \varepsilon_3 = -\lambda_{2t-2} + S_3 = -\lambda_{2t-2} + (\lambda_3 + \lambda_{2t-2}) = \lambda_3$ dan menurut Lemma 2.5 didapat $\Delta_3 = \{-\lambda_{2t} - S_2 - S_3, \lambda_3, *, \cdots, *\} \in S_6$. Dalam langkah ke-$j$ dari prosedur ($j \geq 2$), gabungkan himpunan-himpunan $\Delta_j = \{-\lambda_{2t} - S_2 - S_3, \cdots, S_j, \lambda_j, *, \cdots, *\}$ dan $\Gamma_{j+1} = \{\lambda_{2t-j}, \lambda_{2t-j}\}$ dengan mengambil $\varepsilon_{j+1} = -S_{j+1} = -(\lambda_{j+1} + \lambda_{2t-j})$ maka diperoleh $-\lambda_{2t} - \sum_{k=2}^{j} S_k + \varepsilon_{j+1} = -\lambda_{2t} - \sum_{k=2}^{j} S_k$, $-\lambda_{2t-j} - \varepsilon_{j+1} = -\lambda_{j+1}$, sehingga $\Delta_{j+1} = \{-\lambda_{2t} - \sum_{k=2}^{j+1} S_k, \lambda_{j+1}, *, \cdots, *\} \in S_{2j+2}$ dengan $*, \cdots, *$ adalah $\lambda_j, \lambda_{j-1}, \cdots, \lambda_2, \lambda_{2t-j}, \lambda_{2t-j+1}, \cdots, \lambda_{2t}$.

Dalam langkah terakhir yaitu langkah $(t-1)$ gabungkan himpunan $\Delta_{t-1} = \{-\lambda_{2t} - \sum_{k=2}^{t-1} S_k, \lambda_{t-1}, *, \cdots, *\} \in S_{2t-2}$ dan $\Gamma_t = \{-\lambda_{t+1}, \lambda_{t+1}\}$. Ambil $\varepsilon_t = -S_t = -(\lambda_t + \lambda_{t+1})$ Menurut Lemma 2.5 diperoleh,

$$\begin{aligned} \Delta_t &= \{-\lambda_{2t} - \sum_{k=2}^{t} S_k, \lambda_t, *, \cdots, *\} \\ &= \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_t, \lambda_{t+1}, \cdots, \lambda_{2t-1}, \lambda_{2t}\} \in S_{2t} \end{aligned}$$

Selanjutnya, jika n ganjil dengan $\lambda_{\frac{2t+1}{2}} < 0$ maka gabungkan Δ_t dengan $\Gamma_{\frac{2t+1}{2}} = \{0\}$ didapatkan

$$\Delta_t^{'} = \{-\lambda_{2t} - \sum_{k=2}^{t-1} S_k - S_{\frac{2t+1}{2}}, \lambda_{\frac{2t+1}{2}}, \lambda_t, *, \cdots, *\} \in S_{2t+1}$$

$$\Delta_t^{'} = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_t, \lambda_{\frac{2t+1}{2}}, \lambda_{t+1}, \cdots, \lambda_{2t-1}, \lambda_{2t}\} \in S_{2t+1}$$

Jadi, jika A merupakan matriks nonnegatif simetri yang merealisasi $\Delta_t = \bigcup_{k=1}^{t} \Lambda_k$ untuk n genap, dan $\Delta_t^{'} = \bigcup_{k=1}^{t} \Lambda_k \Lambda_{\frac{n+1}{2}}$ untuk n ganjil maka $A \bigoplus B$ merupakan realisasi dari $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\} \in S_n$. ■

4. Konstruksi Matriks Nonnegatif Simetri

Untuk konstruksi matriks nonnegatif simetri dilakukan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Misalkan $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\} \in S_n$ merupakan himpunan bilangan real sedemikan sehingga $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_p \geq 0 > \lambda_{p+1} \geq \cdots \geq \lambda_n$ dengan $\lambda_1 = -\lambda_n - \sum_{S_k<0} S_k$.

2. Selanjutnya, bentuk partisi berikut, $\Lambda = \bigcup_{k=1}^{[\frac{n}{2}]} \Lambda_k$, untuk n genap, atau $\Lambda = \bigcup_{k=1}^{[\frac{n}{2}]} \Lambda_k \cup \Lambda_{\frac{n+1}{2}}$ untuk n ganjil. Dengan $\Lambda_k = \{\lambda_k, \lambda_{n-k+1}; k = 1, 2, \cdots, [\frac{n}{2}]$ dan $\Lambda_{\frac{n+1}{2}} = \{\lambda_{\frac{n+1}{2}}\}$ untuk n ganjil.

3. Untuk $k = 2, 3, \cdots, [\frac{n}{2}]$ diambil $A = \{\Lambda_k : S_k = \lambda_k + \lambda_{n-k+1} < 0, k = 2, 3, \cdots, t\}$, $B = \{\Lambda_k : S_k = \lambda_k + \lambda_{n-k+1} \geq 0, k = t+1, t+2, \cdots, [\frac{n}{2}]\}$. Dan $P = \{\Lambda_1 = \{\lambda_1, \lambda_n\}\}$. Dengan A atau B dapat merupakan himpunan kosong untuk $n \geq 3$.

4. Setiap himpunan $\Lambda_k \in B$ dapat direalisasikan oleh matriks nonnegatif simetri B_k. Maka jumlah langsungnya adalah

   i. untuk n genap, $B = \bigoplus_{k=t+1}^{[\frac{n}{2}]} B_k$ adalah matriks nonnegatif simetri yang merealisasi $\Lambda = \bigcup_{k=t+1}^{[\frac{n}{2}]} \Lambda_k$ atau

   ii. untuk n ganjil, $B = \bigoplus_{k=t+1}^{[\frac{n}{2}]} B_k \bigoplus B_{\frac{n+1}{2}}$, dengan $B_{\frac{n+1}{2}} = (\lambda_{\frac{n+1}{2}})$, jika $\lambda_{\frac{n+1}{2}} \geq 0$, adalah matriks nonnegatif simetri yang merealisasi $\Lambda = \bigcup_{k=t+1}^{[\frac{n}{2}]} \Lambda_k \cup \Lambda_{\frac{n+1}{2}}$.

5. Berikut tinjau himpunan yang tak dapat direalisasikan $\Lambda_k \in A$ dengan urutannya adalah $\Lambda_2, \Lambda_3, \cdots, \Lambda_t, t \leq [\frac{n}{2}]$ dengan $\Lambda_{\frac{2t+1}{2}} = \{\lambda_{\frac{2t+1}{2}}\}$, jika $\lambda_{\frac{2t+1}{2}} < 0$, untuk n ganjil, gabungkan dengan $\Lambda_1 \in P$. Untuk setiap $\Lambda_k \in A$ didefinisikan himpunan yang bersesuaian $\Gamma_k = \{-\lambda_{2t-k+1}, \lambda_{2t-k+1}\}$ untuk $k = 2, 3, \cdots, t$, adalah himpunan yang dapat direalisasikan oleh matriks nonnegatif simetri A_k, yaitu

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda_{2t-k+1} \\ -\lambda_{2t-k+1} & 0 \end{pmatrix}$$

dan $\Gamma_1 = \{-\lambda_{2t}, \lambda_{2t}\}$ merupakan himpunan yang dapat direalisasikan oleh matriks nonnegatif simetri A_1, yaitu,

$$A1 = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda_{2t} \\ -\lambda_{2t} & 0 \end{pmatrix}$$

6. Selanjutnya gabungkan Γ_1 dan Γ_2 untuk mendapatkan $\Delta_2 = \{-\lambda_{2t}, -S_2, \lambda_2, \lambda_{2t-1}, \lambda_{2t}\} \in S_4$, maka matriks nonnegatif simetri yang merealisasi Δ_2 adalah $M_4 = \begin{pmatrix} A_1 & \rho_2 v_2 u_2^T \\ \rho_2 v_2 u_2^T & A_2 \end{pmatrix}$ dengan $v_2^T = u_2^T = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ dan $\rho_2 = \sqrt{(\lambda_2 + \lambda_{2t})(\lambda_2 + \lambda_{2t-1})}$. Kemudian gabungkan $Delta_2$ dengan Γ_3 untuk mendapatkan: $\Delta_3 = \{-\lambda_{2t} - S_2 - S_3, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_{2t-2}, \lambda_{2t-1}, \lambda_{2t}\}$ dan menurut Lemma 2.4, Δ_3 direalisasikan oleh matriks nonnegatif simetri $M_6 = \begin{pmatrix} M_4 & \rho_3 v_3 u_3^T \\ \rho_3 v_3 u_3^T & A_3 \end{pmatrix}$, dengan $M_4 v_3 = (-\lambda_{2t} - S_2) v_3$, $\|v_3\| = 1$ dan $A_4 u_3 = (-\lambda_{2t-2}) u_3$, $\|v_u\| = 1$ dan ρ_3 harus sedemikian sehingga $C_3 = \begin{pmatrix} \lambda_{2t} - S_2 & \rho_3 \\ \rho_3 & \lambda_{2t} \end{pmatrix}$ mempunyai nilai eigen $\lambda_{2t} - S_2 - S_3$ dan λ_3.

Tahap selanjutnya ditunjukkan bahwa, dalam langkah ke $(k-1)$, dapat dihitung matriks $M_{2k} = \begin{pmatrix} M_{2k-2} & \rho_k v_k u_k^T \\ \rho_k v_k u_k^T & A_k \end{pmatrix}$, $k = 2, 3, \cdots, t$, dengan M_{2k-2} merupakan matriks nonnegatif simetri dengan spektrum Δ_{k-1}, vektor v_k dan u_k berturut-turut adalah vektor eigen satuan dari M_{2k-2} dan A_k, masing-masing berkaitan dengan nilai eigen dengan $-\lambda_{2t} - \sum_{j=2}^{k-1} S_j$ dan λ_{2t-k+1} dan ρ_k harus sedemikian sehingga bahwa matriks $C_k = \begin{pmatrix} -\lambda_{2t} - \sum_{j=2}^{k-1} S_j & \rho_k \\ \rho_k & \lambda_{2t-k+1} \end{pmatrix}$ mempunyai nilai eigen $-\lambda_{2t} - \sum_{j=2}^{k-1} S_j$ dan λ_k.

Akibat 4.1 *Jika $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$ direalisasikan oleh matriks nonnegatif simetri A, maka $\Lambda' = \{-\lambda_1, -\lambda_2, \cdots, -\lambda_n\}$ direalisasikan oleh matriks $-A$.*

5. Contoh

Berikut ini akan diberikan satu contoh dalam menentukan matriks realisasi. Tentukan Matriks Nonnegatif Simetris (MNS) dengan spektrum $\Lambda = \{7, 5, 1, -3, -4, -5\}$.

***P*enyelesaian:**
$\Lambda = \{7, 5, 1, -3, -4, -5\}$ memenuhi kriteria realisasi dari Teorema 3.1.

Partisi $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \Lambda_3$ dengan $\Lambda_1 = \{7, -5\}$, $\Lambda_2 = \{5, -4\}$, $\Lambda_3 = \{1, -3\}$ dengan $S_2 = \lambda_2 + \lambda_5 = 1$, $S_3 = \lambda_3 + \lambda_4 = -2$. Susun kembali $\Lambda_1 = \{7, -5\}$, $\Lambda_3 = \{1, -3\}$ sebagai berikut: $7 > 1 > -3 > -5$.

Kemudian definisikan $\Gamma_1 = \{5, -5\}$, $\Gamma_2 = \{3, -3\}$ yang masing-masing dapat direalisasi oleh matriks-matriks:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya gabung $\Gamma_1 = \{5, -5\}$, $\Gamma_2 = \{3, -3\}$ untuk mendapatkan Δ_2 dengan mengambil $\varepsilon_2 = -S_2 = 2$. Maka $\Delta_2 = \{7, 1, -3, -5\}$ yang dapat direalisasikan oleh matriks nonnegatif simetri

$$M_4 = \begin{pmatrix} A_1 & \rho_2 v_2 u_2^T \\ \rho_2 v_2 u_2^T & A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 5 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 3 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

dengan $\rho_2 = \sqrt{(5-\gamma_i)(3-\gamma_i)} = 2\sqrt{2}$ untuk $\gamma_i = 7, 1$; $v_2 = (\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2})$, $u_2 = (\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2})$, Sedangkan matriks yang merealisasi $\Delta_2 = \{5, -4\}$ adalah $A_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \end{pmatrix}$. Maka matriks nonnegatif simetri yang merealisasi $\Lambda = \{7, 5, 1, -3, -4, -5\}$ adalah

$$M_6 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 5 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 3 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

Sedangkan untuk menentukan matriks yang merealisasikan $\Lambda' = \{-7, -5, -1, 3, 4, 5\}$ dapat digunakan Akibat 4.1, yaitu diperoleh matriks $-M_6$.

6. Kesimpulan

Beberapa hal yang dapat disampaikan dalam kesimpulan ini adalah:

a. Misalkan $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$ merupakan sebuah himpunan bilangan real sedemikian sehingga $\lambda_1 \geq \lambda_2 \cdots \geq \lambda_p \geq 0 > \lambda_{p+1} \geq \cdots \geq \lambda_n$. Supaya konstruksi matriks nonnegatif simetri dapat dilakukan, maka haruslah Λ memenuhi kriteria realisasi.

b. Untuk konstruksi matriks nonnegatif simetri dapat dilakukan dengan menggunakan jumlah langsung $B = \bigoplus B_k$ atau dan jumlah matriks C .

c. Jika $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$ dapat direalisasikan oleh matriks nonnegatif simetri A, maka $\Lambda^{'} = \{-\lambda_1, -\lambda_2, \cdots, -\lambda_n\}$ dapat direalisasikan oleh matriks $-A$.

Pustaka

[1] Anton H, and Rorres C, 1991, Elementary Linear Algebra Applications Version, Sixth Edition, John Wiley & Sons. Inc.,New York.

[2] Fiedler.M, 1974, Eigenvalues Of Nonnegative Symmetric Matrices, Linear Algebra Appl. 9, pp. 119-142.

[3] Lancaster P., and Tismenetsky M., 1985, The Theory Of Matrices, Akademi Press, New York.

[4] Noble B.,and Daniel J.W.,1988,Applied Linear Algebra,Prentice-Hall/Englewood Cliffs, New Jersey.

[5] Soto R., 2003, Existence And Construction Of Nonnegative Matrices With Real Prescribed Spectrum, Linear Algebra Appl. 369, pp.169-184

[6] Soto R., 2005, Realizability By Symmetric Nonnegative Matrices, Proyecciones, Vol.24, No 1, pp 65-78.

[7] Yacob B., 1990, Linear Algebra, W.H. Freeman And Company, New York

.