Limits
J. Math. and Its Appl.
ISSN: 1829-605X
Vol. 4, No. 2, November 2007, 21–32

CATATAN TENTANG PERSAMAAN LYAPUNOV DAN PERSAMAAN ALJABAR RICCATI

Subiono
Jurusan Matematika
FMIPA Institut Teknologi Sepuluh Nopember
subiono2008@matematika.its.ac.id

Abstrak

Dalam paper ini dibahas dua bentuk persamaan yang hampir mirip yaitu persamaan Lyapunov dan persamaan aljabar Riccati. Selanjutnya diberikan beberapa catatan dari kedua persamaan tersebut yang masing-masing erat kaitannya dengan masalah kontrol optimal "Linier Quadratic Regulator" (LQR) sistem linier loop-buka dan sistem linier loop-tutup.
Katakunci: *LQR, sistem linier loop-buka, sistem linier loop-tutup.*

1. Pendahuluan

Sebagaimana telah diketahui bila sistem terkontrol dan teramati dalam pendisainan suatu kompensator untuk masukantunggal-keluarantunggal penempatkan pole loop-tutup dapat dilakukan dimana saja sesuai yang diinginkan [1]. Walaupun pole loop-tutup menentukan kecepatan (*bandwidth*) dan damping dari respon hal ini belum cukup untuk memberikan hasil yang terbaik dari pendesainan, dengan kata lain belum memberikan suatu hasil yang optimal [3].

Beberapa alasan mengapa kajian kontrol optimal diperlukan diberikan sebagai berikut (lihat [4]). Pertama untuk mencari kontrol optimal dalam suatu sistem banyakmasukan-banyakkeluaran, teknik penempatan pole yang telah dikenal tidak menguraikan secara lengkap dan khusus kontroler atau parameter kompensator (*gain*). Misalnya, diberikan plan dengan order-k dengan sebanyak m masukan dan keseluruhan vektor keadaan dapat diakses untuk umpan-balik. Dalam hal ini, suatu kontroler takdinamik sebanyak mk parameter harus ditentukan, tetapi hanya sebanyak k lokasi pole loop-tutup yang mungkin. Jadi harus diatur sebanyak m kali yaitu sesuai banyaknya parameter sebagai pole. Ada banyak takhingga cara supaya pole loop-tutup yang sama bisa dicapai. Timbul pertanyaan, cara apa yang terbaik? Algorithma apa yang bisa digunakan untuk menentukan gain umpan-balik? Tentu dalam pandangan praktis ketersediaan parameter yang digunakan sekecil mungkin dari yang dibutuhkan untuk mencapai lokasi pole loop-tutup yang diharapkan akan memberikan keuntungan yang besar. Tetapi ketiadaan algorithma yang difinitif untuk menentukan suatu hukum kontrol tunggal adalah suatu kerugian bagi pendisainer sistem yang tidak mengetahui bagaimana menangani kesulitan ini. Dengan pemilihan suatu hukum kontrol untuk mengoptimalkan perilaku sistem kesulitan ini bisa diatasi.

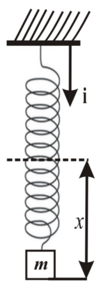
Suatu alasan yang lebih meyakinkan untuk mencari kontroler optimal adalah pendisainer menyadari tidak mengetahui lokasi pole loop-tutup yang diharapkan. Pemilihan lokasi pole jauh dari titik asal memberikan respon dinamik sangat cepat tetapi membutuhkan signal kontrol sangat besar untuk menghasilkan sumber daya yang dibutuhkan. Penggunaan gain yang dapat menghasilkan signal tsb. dengan tiadanya pembatas dari daya yang digunakan dapat mengakibatkan signal kontrol melebihi batas pisik, misalnya saja menimbulkan "saturasi" [3]. Dalam kasus yang demikian, perilaku dinamik sistem loop-tutup tidak bisa diprediksi dengan analisa linier dan bahkan mungkin tak-stabil. Untuk membatasi hal ini sering perlu untuk membatasi kecepatan respon sehingga tujuan pendisainan tercapai tanpa terjadi saturasi. Alasan lain untuk membatasi kecepatan respon adalah suatu harapan untuk menghindari "noise" yang secara khusus menyertai sistem gain-tinggi. Para insinyur yang mempunyai pengalaman luas yang diperolehnya dengan intuisi mengenai proses penempatan lokasi pole-tutup yang tepat. Tetapi ia berhadapan dengan suatu proses yang tak-dikenalnya untuk mengontrol dan tidak cukupnya waktu untuk memperoleh keperluan mendalam, para insinyur akan menyadari suatu metode disain dikembangkan yang bisa memberikan suatu pengetahuan disain awal. Teori optimisasi yang telah berkembang bisa menyelesaikan masalah ini [2].

Dalam suatu sistem kontrol industri biaya pembuatan suatu sistem kontrol di buat sekecil mungkin dengan tetap mencapai suatu tujuan keuntungan bagi sistem kontrol industri tersebut. Praktisnya faktor-faktor ekonomi mengkompromikan penyelesaian masalah pengontrolan agar dalam pembuatannya secara wajar, murah dengan tetap memenuhi suatu kriteria tertentu dari perilaku sistemnya.

2. Cara Hamiltonian

Pada bagian ini akan diberikan suatu penyelesaian kontrol optimal dengan menggunakan cara yang dinamakan **Hamiltonian**, pembahasan ini bisa didapat di [5]. Namum sebelum diuraikan cara tsb. terlebih dahulu diberikan suatu motifasi untuk memberikan gambaran mendatang yang lebih jelas tentang cara Hamiltonian tsb. Motifasi diberikan lewat suatu kajian yang berkenaan dengan energi kinetik dan energi potensial dari suatu massa yang bergerak karena suatu gaya.

Misalkan suatu massa m yang digantung dengan pegas secara vertikal (lihat Gambar 2). Massa pegas diabaikan sedangkan kostanta pegas adalah



Gambar 1: Sistem pegas

k. Bila $x(t)$ adalah posisi massa pada keadaan setimbang saat t, maka dengan menggunakan hukum Hooke, gaya diberikan oleh

$$\mathbf{F} = -kx(t)\mathbf{i}, \tag{1}$$

dimana $\mathbf{i}$ adalah vektor satuan dengan arah kebawah. Karena

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{i}, \tag{2}$$

dimana V menyatakan energi potensial, dari (1) dan (2) diperoleh

$$\frac{\partial V}{\partial x} = kx(t) \quad \text{atau} \quad V = \frac{1}{2}kx^2(t)$$

dalam hal ini konstanta sebarang diambil sama dengan nol. Energi kinetik dari massa adalah

$$T = \frac{1}{2}\left[\frac{dx}{dt}\right]^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2(t).$$

Bila $L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2(t) - \frac{1}{2}kx^2(t)$ dan integral

$$\int_{t_1}^{t_2} L dt$$

mempunyai nilai minimum, haruslah dipenuhi

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0$$

atau

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0.$$

Hasil ini tentunya sesuai dengan bila digunakan Hukum-hukum Newton.

Berikut ini diuraikan cara Hamiltonian untuk menyelesaikan masalah kontrol optimal sebagai berikut, cari kontrol optimal $u^*(t)$ yang memenuhi bentuk

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad u(t) \in \mathbb{R}^p \tag{3}$$

sepanjang lintasan $x^*(t)$ sehingga nilai integral

$$J = h(x(t_1), t_1) + \int_{t_0}^{t_1} g(x(t), u(t), t) dt \tag{4}$$

minimum. Tulis h dalam bentuk integral berikut

$$h(x(t_1), t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}\left[h(x(t), t)\right] dt + h(x(t_0), t_0).$$

Didapat

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} \left(g(x(t), u(t), t) + \frac{d}{dt}[h(x(t), t)] \right) dt + h(x(t_0), t_0).$$

Karena $h(x(t_0), t_0)$ tetap (tidak mengandung $u(t)$), maka permasalahan akan ekivalen dengan meminimumkan integral

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} \left(g(x(t), u(t), t) + \frac{d}{dt}[h(x(t), t)] \right) dt. \tag{5}$$

Dengan menggunakan aturan rantai differensial diperoleh

$$\frac{d}{dt}[h(x(t), t)] = \left[\frac{\partial h(x, t)}{\partial x}\right]' \dot{x} + \frac{\partial h(x, t)}{\partial t},$$

dimana tanda $\prime$ menyatakan suatu transpose. Dalam hal ini diperoleh

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} \left(g(x(t), u(t), t) + \left[\frac{\partial h(x, t)}{\partial x}\right]' \dot{x} + \frac{\partial h(x, t)}{\partial t} \right) dt \tag{6}$$

Untuk mengakomodasi persamaan (3) dibentuk fungsional

$$g_a(x, \dot{x}, u, \lambda, t) = g(x(t), u(t), t) + \lambda\prime[f(x, u, t) - \dot{x}] + \left[\frac{\partial h(x, t)}{\partial x}\right]' \dot{x} + \frac{\partial h(x, t)}{\partial t} \tag{7}$$

dimana $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ adalah suatu pengali Langrange. Sekarang masalahnya menjadi meminimumkan

$$J_a(u) = \int_{t_0}^{t_1} g_a(x, \dot{x}, u, \lambda, t) dt$$

Persamaan Euler-Langrange dalam x^* diberikan oleh

$$\frac{\partial g_a}{\partial x^*} - \frac{d}{dt}\frac{\partial g_a}{\partial \dot{x}^*} = 0. \tag{8}$$

Dari aturan rantai untuk turunan didapat

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial h(x^*,t)}{\partial x^*}\right] = \left[\frac{\partial^2 h(x^*,t)}{\partial x^{*2}}\right]' \dot{x}^* + \frac{\partial^2 h(x^*,t)}{\partial t \partial x^*}. \tag{9}$$

Dari dua persamaan (8) dan (9) diperoleh persamaan

$$\dot{\lambda}^* = -\frac{\partial}{\partial x}\left[g(x^*,u^*,t) + \lambda^{*\prime} f(x^*,u^*,t)\right]. \tag{10}$$

Sedangkan persamaan Euler-Langrange dalam u^* diberikan oleh

$$\frac{\partial g_a}{\partial u^*} - \frac{d}{dt}\frac{\partial g_a}{\partial \dot{u}^*} = 0.$$

Dengan kenyataan $\frac{\partial g_a}{\partial \dot{u}^*} = 0$, maka diperoleh persamaan

$$\frac{\partial g_a}{\partial u^*} = 0$$

atau

$$\frac{\partial}{\partial u^*}\left[g(x^*,u^*,t) + \lambda^{*\prime} f(x^*,u^*,t)\right] = 0. \tag{11}$$

Bila didifinisikan suatu Hamiltonian sebagai berikut

$$\mathcal{H}(x,u,\lambda,t) = g(x,u,t) + \lambda\prime f(x,u,t), \tag{12}$$

maka dari persamaan (10), (11) dan (12) diperoleh

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial}{\partial x}[\mathcal{H}(x,u,\lambda,t)] \tag{13}$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial u}[\mathcal{H}(x,u,\lambda,t)] \tag{14}$$

dan persamaan (3) menjadi

$$\dot{x} = \frac{\partial}{\partial \lambda}[\mathcal{H}(x,u,\lambda,t)] \tag{15}$$

Untuk menyelesaikan kontrol optimal menggunakan cara Hamiltonian, harus diselesaikan persamaan (13) - (15) secara serentak. Cara yang mudah, pertama diselesaikan persamaan (14) sehingga diperoleh kontrol optimal u^*

$$u^* = u^*(x,\lambda,t)$$

selanjutnya substitusikan ke persamaan (12) diperoleh

$$\mathcal{H}^*(x,\lambda,t) = \mathcal{H}(x, u^*(x,\lambda,t), \lambda, t).$$

Dari persamaan yang paling akhir ini, selesaikan persamaan

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial}{\partial \lambda}\mathcal{H}^*(x,\lambda,t) \\ \dot{\lambda} = -\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{H}^*(x,\lambda,t) \end{cases}$$

Berikut ini diberikan beberapa ringkasan apa yang telah dibahas mengenai cara menyelesaikan masalah kontrol optimal dengan menggunakan cara Hamiltonian sebagai berikut:
Cari $u^*(t)$ yang memenuhi persamaan $\dot{x}(t) = f(x,u,t)$ dengan meminimumkan indeks perilaku

$$J = h(x(t_1), t_1) + \int_{t_0}^{t_1} g(x,u,t)dt.$$

Langkah penyelesaian adalah

1. Bentuk Hamiltonian, yaitu $\mathcal{H}(x,u,\lambda,t) = g(x,u,t) + \lambda\prime f(x,u,t)$.

2. Selesaikan persamaan kontrol

$$\frac{\partial}{\partial u}\mathcal{H}(x,u,\lambda,t) = 0$$

untuk memperoleh $u^* = u^*(x,\lambda,t)$.

3. Dapatkan Hamiltonian $\mathcal{H}^*(x,\lambda,t) = \mathcal{H}(x,u^*,\lambda,t)$.

4. Selesaikan $2n$ persamaan

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{\partial}{\partial \lambda}\mathcal{H}^*(x,\lambda,t) & \text{(persamaan keadaan)} \\ \dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{H}^*(x,\lambda,t) & \text{(persamaan "ko} - \text{keadaan")} \end{cases}$$

dengan kondisi batas diberikan oleh keadaan awal dan keadaan akhir.

5. Substisusikan hasil-hasil langka 4 kedalam u^* untuk memperoleh kontrol optimal yang dicari.

Berikut ini diformulasikan masalah yang berkenaan dengan LQR yang dibedakan dalam dua kasus yaitu kontrol loop-buka dan kontrol loop-tutup.

3. Kontrol Loop Buka

Diberikan suatu sistem berbentuk

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^p, A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times p}, \qquad (16)$$

dengan keadaan awal dan keadaan akhir masing-masing diberikan oleh $x(t_0) = x_0$ dan $x(t_1) = x_1$. Dapatkan u yang memenuhi (16) dengan syarat bentuk integral berikut

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} u'(t)Ru(t)dt \qquad (17)$$

mempunyai nilai minimum, dimana R matriks simetri definit positip berukuran $p \times p$ yang dipilih oleh pendisainer berdasarkan pada tujuan pengontrolan. Selanjutnya untuk menyelesaikan masalah LQR ini, dibentuk Hamiltonian yang diberikan sebagai berikut

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}u'(t)Ru(t) + \lambda'(t)\left[Ax(t) + Bu(t)\right].$$

Dari Hamiltonian ini diperoleh

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda}(t) &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = -A'\lambda(t) \Rightarrow \lambda(t) = e^{A'(t_1-t)}\lambda(t_1) \\
0 &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = Ru(t) + B'\lambda(t) \ \Rightarrow\ u(t) = -R^{-1}B'e^{A'(t_1-t)}\lambda(t_1).
\end{aligned}$$

Persamaan (16) menjadi

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - BR^{-1}B'e^{A'(t_1-t)}\lambda(t_1)$$

dan penyelesaiannya adalah:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 - \int_{t_0}^{t}\left[e^{A(t-\tau)}BR^{-1}B'e^{A'(t_1-\tau)}\lambda(t_1)\right]d\tau$$

Untuk menghitung $\lambda(t_1)$ didifinisikan:

$$P(t) \overset{dif.}{=} \int_{t_0}^{t}\left[e^{A(t-\tau)}BR^{-1}B'e^{A'(t-\tau)}\right]d\tau$$

Dengan menggunakan aturan Leibnitz untuk integral diperoleh:

$$\begin{aligned}
\dot{P}(t) &= \int_{t_0}^{t} \frac{d}{dt}\left[e^{A(t-\tau)}BR^{-1}B'e^{A'(t-\tau)}\right]d\tau + e^{A(t-t)}BR^{-1}B'e^{A'(t-t)}\frac{dt}{dt} \\
&\quad -e^{A(t-t_0)}BR^{-1}B'e^{A'(t-t_0)}\frac{dt_0}{dt} \\
&= AP(t) + P(t)A' + BR^{-1}B'.
\end{aligned}$$

Diperoleh persamaan differensial:

$$\dot{P}(t) = AP(t) + P(t)A' + BR^{-1}B' \tag{18}$$

yang memenuhi syarat awal $P(t_0) = 0$. Persamaan (18) dinamakan *persamaan Lyapunov* dan $P(t)$ adalah matriks simetri. Dilain pihak dari syarat $x(t_1) = x_1$, diperoleh:

$$\begin{aligned}
x_1 &= e^{A(t_1-t_0)}x_0 - \int_{t_0}^{t_1}\left[e^{A(t_1-\tau)}BR^{-1}B'e^{A'(t_1-\tau)}\right]d\tau\lambda(t_1) \\
&= e^{A(t_1-t_0)}x_0 - P(t_1)\lambda(t_1).
\end{aligned}$$

Dari persamaan ini diperoleh:

$$\lambda(t_1) = P^{-1}(t_1)\left[e^{A(t_1-t_0)}x_0 - x_1\right].$$

Jadi kontrol optimal $u(t)$ diberikan oleh:

$$u(t) = R^{-1}B'e^{A'(t_1-t)}P^{-1}(t_1)\left[x_1 - e^{A(t_1-t_0)}x_0\right]$$

dengan menggunakan kesimetrian $J_{\min}$ diberikan oleh:

$$J_{\min} = \frac{1}{2}\left[x_1 - e^{A(t_1-t_0)}x_0\right]' P^{-1}(t_1)\left[x_1 - e^{A(t_1-t_0)}x_0\right].$$

4. Kontrol Loop-Tutup

Hasil-hasil kajian pada bagian ini akan sering digunakan pada kajian yang berikutnya dikarenakan bermanfaat untuk menyelesaikan masalah sistem linier yang berkaitan dengan kontrol umpan-balik. Hal ini beda dengan kontrol loop-tutup yang dibahas pada bagian sebelumnya. Keuntungan dari umpan balik diantaranya adalah mereduksi sensitifitas, meregulasi sendiri, tegar terhadap gangguan dll.

Tinjau lagi sistem linier berbentuk

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^p, A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times p}, \tag{19}$$

dengan keadaan awal dan keadaan akhir masing-masing diberikan oleh $x(t_0) = x_0$ dan $x(t_1) = x_1$. Dapatkan $u(t)$ yang memenuhi (19) dengan syarat bentuk integral berikut

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} \left[x'(t)Qx(t) + u'(t)Ru(t)\right] dt \tag{20}$$

mempunyai nilai minimum, dimana Q matriks semi-definit positip berukuran $n \times n$ dan R matriks definit positip berukuran $p \times p$. Selanjutnya untuk mempermudah hitungan, diasumsikan masing-masing matriks Q dan R adalah simetri. Hasil yang diperoleh akan tetap sama bila kedua matriks tsb. tidak simetri. Untuk menyelesaikan masalah LQR, dibentuk Hamiltonian yang diberikan sebagai berikut

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}x'(t)Qx(t) + \frac{1}{2}u'(t)Ru(t) + \lambda'(t)\left[Ax(t) + Bu(t)\right].$$

Dari Hamiltonian ini diperoleh

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}(t) &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = -Qx(t) - A'\lambda(t) \\ 0 &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = Ru(t) + B'\lambda \ \Rightarrow\ u(t) = -R^{-1}B'\lambda(t). \end{aligned}$$

Diperoleh persamaan differensial

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) - BR^{-1}B'\lambda(t) \\ \dot{\lambda}(t) &= -Qx(t) - A'\lambda(t) \end{aligned}$$

dengan kondisi awal $x(t_0) = x_0$ dan $\lambda(t_0) = 0$. Misalkan $\lambda(t) = Px(t)$, maka diperoleh

$$u(t) = -R^{-1}B'Px(t)$$

Matriks P adalah suatu matriks yang masih harus ditentukan, matriks ini memenuhi suatu persamaan sebagai mana ditunjukkan sebagai berikut

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}(t) &= P\dot{x}(t) \\ -Qx(t) - A'Px(t) &= PAx(t) - PBR^{-1}B'Px(t) \\ \left[-Q - A'P\right]x(t) &= \left[PA - PBR^{-1}B'P\right]x(t). \end{aligned}$$

Dari persamaan yang paling akhir berlaku untuk setiap $x(t)$, oleh karena itu diperoleh

$$A'P + Q + PA - PBR^{-1}B'P = 0. \tag{21}$$

Persamaan (21) dinamakan persamaan **Riccati**. Dari persamaan (21) ini, P bisa ditentukan.

Berikut ini diturunkan suatu persamaan yang erat kaitannya dengan nilai J minimum, yaitu:

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt}\left[x'(t)Px(t)\right] &= -\dot{x}'(t)Px - x'(t)P\dot{x}(t) \\ &= -[Ax(t) + Bu(t)]'Px(t) - x'(t)P[Ax(t) + Bu(t)] \\ &= -x'(t)A'Px(t) - u'(t)B'Px(t) - x'(t)PAx(t) - x'(t)PBu(t) \\ &= -x'(t)[A'P + PA]x(t) - u'(t)B'Px(t) - x'(t)PBu(t) \\ &= -x'(t)[PBR^{-1}B'P - Q]x(t) - u'(t)B'Px(t) - x'(t)PBu(t) \\ &= -x'(t)PBR^{-1}B'Px + x'(t)Qx(t) - u'(t)B'Px(t) - x'(t)PBu(t) \\ &= x'PBu + x'Qx - u'B'Px - x'PBu \\ &= x'Qx - u'B'Px \\ &= x'Qx + u'Ru. \end{aligned}$$

Dengan kenyataan persamaan terakhir diatas, persamaan (21) menjadi

$$\begin{aligned} J &= -\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}\left[x'(t)Px(t)\right]dt \\ &= -\frac{1}{2}\,x'(t)Px(t)\Big|_{t_0}^{t_1} \\ &= -\frac{1}{2}x'(t_1)Px(t_1) + \frac{1}{2}x'(t_0)Px(t_0) \end{aligned}$$

Bila $t_1 \to \infty$ dan sistem (20) stabil, maka nilai J minimum diberikan oleh

$$J_{\min} = \frac{1}{2}x'(t_0)Px(t_0).$$

Pustaka

[1] M. Gopal, "Modern Control System Theory", *Wiley Eastern Limited*, (1984).

[2] Leslie M. Hocking, "Optimal Control An Introduction to the Theory with Applications", *Clarendon Press-Oxford*, (1991).

[3] Frank L. Lewis, "Applied Optimal Control and Estimation", *Prentice-Hall International, Inc.*, (1992).

[4] Bernard Friedland, "Control System Design An Introduction to State-Space Methods", *McGraw-Hill International Editions*, (1987).

[5] M.R. Spiegel, "Theory and Problems of Advanced Mathematics for Engineer and Scientists", *Schaumm's Outline Series, McGraw-Hill International Book Company, Singapore*, (1983).