J. Math. and Its Appl.
ISSN: 1829-605X
Vol. 4, No. 2, November 2007, 45–51

KONSTRUKSI RUANG 2-NORM SEBAGAI LUASAN YANG DIRENTANG OLEH DUA VEKTOR

Sadjidon[1], **H. Gunawan**[2]
[1]Jurusan Matematika, [2]Departemen Matematika
[1]Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya
[2]Institut Teknologi Bandung, Bandung
[2]hgunawan@dns.math.itb.ac.id

Abstrak

Pada paper ini akan dikaji tentang pengkonstruksian ruang 2-norm yang didasari oleh sifat-sifat orthogonalitas dari dua vektor sehingga diperoleh pendefinisikan ruang 2-norm, khususnya untuk ruang ℓ^2.
Katakunci: *Ruang ℓ^2, orthogonalitas, ruang 2-norm.*

1. Pendahuluan

Ruang ℓ^2 yang dilengkapi dengan inner product $\langle x, y\rangle = \sum_j x_j y_j$, merupakan ruang inner product. Begitu juga ruang ℓ^2 yang dilengkapi dengan norma $\|x\| = \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\right\}^{\frac{1}{2}}$ merupakan ruang Banach. Selanjutnya dual dari ruang ℓ^2 yaitu himpunan dari semua fungsional linier kontinu pada ruang ℓ^2 yang dinotasikan dengan $\left(\ell^2\right)^*$ adalah ruang ℓ^2 juga. Jika $f \in \left(\ell^2\right)^*$, maka $f \in \ell^2$ dan dapat diinterpretasikan untuk $f(x) = \sum_j x_j\, z_j = \langle x, z\rangle$, dengan $x \in \ell^2, z \in \left(\ell^2\right)^* = \ell^2$.

Sekarang pandang S himpunan semua barisan bilangan real dan merupakan ruang vektor atas field R. Setiap subruang vektor S juga merupakan ruang barisan. Untuk X subruang S didefinisikan suatu fungsi bernilai real $\|\bullet, ..., \bullet\|$ pada X^n yang memenuhi sifat-sifat sebagai berikut :

1. $\|x_1, x_2, ..., x_n\| = 0$, jika dan hanya jika $x_1, x_2, ..., x_n$ dependen linier
2. $\|x_1, x_2, ..., x_n\|$ invarian terhadap permutasi
3. $\|x_1, x_2, ..., \alpha x_n\| = |\alpha|\, \|x_1, x_2, ..., x_n\|$ untuk setiap $\alpha \in R$
4. $\|x_1, x_2, ..., x_{n-1}, y+z\| \leq \|x_1, x_2, ..., x_{n-1}, y\| + \|x_1, x_2, ..., x_{n-1}, z\|$

disebut n-norma pada X dan pasangan $(X, \|\bullet, ..., \bullet\|)$ disebut ruang n-norma.

Pada [2], [3] telah dikonstruksi dan dijabarkan tentang 2-norma, yang disebut sebagai 2-norma standar, selanjutnya dengan memperhatikan sifat-sifat orthogonalitas dari [1], [4], maka dikonstruksi 2-norma sehingga diperoleh pendefinisian ruang 2-norm.

2. Ruang ℓ^2 dan n-norma Standarnya

Sebelum menjabarkan n-norma dijelaskan untuk 2-norma pada ruang ℓ^2 yang diberikan sebagai berikut :

$$\|x, y\| = Sup\left\{\begin{vmatrix} \langle x, z\rangle & \langle y, z\rangle \\ \langle x, w\rangle & \langle y, w\rangle \end{vmatrix} : z, w \in \ell^2, \|z\|, \|w\| \leq 1\right\}.$$

Selanjutnya dengan ketaksamaan Cauchy-Schwarz diperoleh

$$\begin{vmatrix} \langle x, z\rangle & \langle y, z\rangle \\ \langle x, w\rangle & \langle y, w\rangle \end{vmatrix} \leq \begin{vmatrix} \langle x, x\rangle & \langle x, y\rangle \\ \langle y, x\rangle & \langle y, y\rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} \begin{vmatrix} \langle z, z\rangle & \langle z, w\rangle \\ \langle w, z\rangle & \langle w, w\rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} \leq \begin{vmatrix} \langle x, x\rangle & \langle x, y\rangle \\ \langle y, x\rangle & \langle y, y\rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}.$$

Hasil ini menunjukkan bahwa $\begin{vmatrix} \langle x,x\rangle & \langle x,y\rangle \\ \langle y,x\rangle & \langle y,y\rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}$ merupakan batas atas dari himpunan $\left\{\begin{vmatrix} \langle x,z\rangle & \langle y,z\rangle \\ \langle x,w\rangle & \langle y,w\rangle \end{vmatrix} : z,w \in \ell^2, \|z\|, \|w\| \le 1\right\}$ dan ini berarti bahwa :

$$Sup\left\{\begin{vmatrix} \langle x,z\rangle & \langle y,z\rangle \\ \langle x,w\rangle & \langle y,w\rangle \end{vmatrix} : z,w \in \ell^2, \|z\|, \|w\| \le 1\right\} \le \begin{vmatrix} \langle x,x\rangle & \langle x,y\rangle \\ \langle y,x\rangle & \langle y,y\rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} \qquad (1)$$

Selanjutnya untuk $z = \frac{x}{\|x\|}$; $w = \frac{y-\alpha x}{\|y-\alpha x\|} = \frac{y'}{\|y'\|}$ dengan z dan y' orthogonal, juga memenuhi $\|z\|, \|w\| \le 1$, maka diperoleh

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \langle x,z\rangle & \langle y,z\rangle \\ \langle x,w\rangle & \langle y,w\rangle \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \left\langle x, \frac{x}{\|x\|}\right\rangle & \left\langle y, \frac{x}{\|x\|}\right\rangle \\ \left\langle x, \frac{y'}{\|y'\|}\right\rangle & \left\langle y, \frac{y'}{\|y'\|}\right\rangle \end{vmatrix} \\ &= \frac{\begin{vmatrix} \langle x,x\rangle & \langle y,x\rangle \\ \langle x,y'\rangle & \langle y,y'\rangle \end{vmatrix}}{\|x\|\,\|y'\|} \\ &= \frac{\begin{vmatrix} \langle x,x\rangle & \langle y,x\rangle \\ \langle x,y\rangle & \langle y,y\rangle \end{vmatrix}}{\|x\|\,\|y'\|}. \end{aligned}$$

dengan menggunakan sifat-sifat determinan dan sifat-sifat inner product diperoleh juga bahwa

$$\begin{vmatrix} \langle x,x\rangle & \langle y,x\rangle \\ \langle x,y\rangle & \langle y,y\rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} = \begin{vmatrix} \langle x,x\rangle & \langle y,x\rangle \\ \langle x,y'\rangle & \langle y,y'\rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} = \begin{vmatrix} \langle x,x\rangle & \langle y',x\rangle \\ \langle x,y'\rangle & \langle y',y'\rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} = \|x\| \;\; \|y'\|$$

sehingga

$$\begin{vmatrix} \langle x,z\rangle & \langle y,z\rangle \\ \langle x,w\rangle & \langle y,w\rangle \end{vmatrix} = \frac{\|x\| \;\; \|y'\| \begin{vmatrix} \langle x,x\rangle & \langle y,x\rangle \\ \langle y,x\rangle & \langle y,y\rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}}{\|x\| \;\; \|y'\|} = \begin{vmatrix} \langle x,x\rangle & \langle y,x\rangle \\ \langle x,y\rangle & \langle y,y\rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}.$$

Hasil ini menunjukkan bahwa

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \langle x,x\rangle & \langle y,x\rangle \\ \langle x,y\rangle & \langle y,y\rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} &= \begin{vmatrix} \langle x,z\rangle & \langle y,z\rangle \\ \langle x,w\rangle & \langle y,w\rangle \end{vmatrix} \\ &\le Sup\left\{\begin{vmatrix} \langle x,z\rangle & \langle y,z\rangle \\ \langle x,w\rangle & \langle y,w\rangle \end{vmatrix} : z,w \in \ell^2, \|z\|, \|w\| \le 1\right\} \qquad (2) \end{aligned}$$

Dengan demikian dari Persamaan (1) dan Persamaan (2) diperoleh 2-norma pada ruang ℓ^2 adalah

$$\|x,y\| = Sup\left\{\begin{vmatrix} \langle x,z\rangle & \langle y,z\rangle \\ \langle x,w\rangle & \langle y,w\rangle \end{vmatrix} : z,w \in \ell^2, \|z\|, \|w\| \le 1\right\} = \begin{vmatrix} \langle x,x\rangle & \langle x,y\rangle \\ \langle y,x\rangle & \langle y,y\rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}$$

dan 2-Norma $\|x,y\|$ tidak lain adalah luasan yang direntang oleh vektor-vektor $x\ dan\ y$. Selanjutnya akan dijabarkan untuk n-normanya dalam ruang ℓ^2 yang dikenal sebagai ruang inner product dengan inner product $\langle x,y\rangle = \sum\limits_j x_j y_j$, dapat dilengkapi dengan n-normanya

$$\|x_1, x_2, ..., x_n\| = \begin{vmatrix} \langle x_1,x_1\rangle & ... & \langle x_1,x_n\rangle \\ .. & .. & .. \\ \langle x_n,x_1\rangle & ... & \langle x_n,x_n\rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}$$

merupakan ruang n-norma standar sehingga ruang ℓ^2 merupakan ruang n-norma. Khususnya jika $n = 2$, maka 2-norma standar untuk ruang ℓ^2 adalah :

$$\|x,y\| = \begin{vmatrix} \langle x,x\rangle & \langle x,y\rangle \\ \langle y,x\rangle & \langle y,y\rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}.$$

Untuk n-norma pada ruang ℓ^p khususnya ruang ℓ^2, penjabarannya dan pengembangannya dalam [2].

Sekarang akan dijabarkan n-norma pada ruang ℓ^2 menurut pendefinisian [1] dengan n-norma nya sebagai berikut :

$$\begin{aligned} &\|x_1, ..., x_n\| \\ &= Sup\left\{ \begin{vmatrix} f_1(x_1) & ... & f_1(x_n) \\ .. & ... & .. \\ f_n(x_1) & ... & f_n(x_n) \end{vmatrix} : f_1, ..., f_n \in \left(\ell^2\right)^* = \ell^2, \|f_1\|, ..., \|f_n\| \le 1 \right\} \end{aligned}$$

atau dapat dituliskan

$$\begin{aligned} &\|x_1, ..., x_n\| \\ &= Sup\left\{ \begin{vmatrix} \langle x_1,z_1\rangle & ... & \langle x_1,z_n\rangle \\ .. & ... & .. \\ \langle x_n,z_1\rangle & ... & \langle x_n,z_n\rangle \end{vmatrix} : z_1, ..., z_n \in \ell^2, \|z_1\|, ..., \|z_n\| \le 1 \right\}. \end{aligned}$$

Selanjutnya dengan ketaksamaan Cauchy-Schwarz didapatkan

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \langle x_1,z_1\rangle & ... & \langle x_1,z_n\rangle \\ .. & ... & .. \\ \langle x_n,z_1\rangle & ... & \langle x_n,z_n\rangle \end{vmatrix} &\le \begin{vmatrix} \langle x_1,x_1\rangle & ... & \langle x_1,x_n\rangle \\ .. & ... & .. \\ \langle x_n,x_1\rangle & ... & \langle x_n,x_n\rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} \begin{vmatrix} \langle z_1,z_1\rangle & ... & \langle z_1,z_n\rangle \\ .. & ... & .. \\ \langle z_n,z_1\rangle & ... & \langle z_n,z_n\rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}. \\ &\le \begin{vmatrix} \langle x_1,x_1\rangle & ... & \langle x_1,x_n\rangle \\ .. & ... & .. \\ \langle x_n,x_1\rangle & ... & \langle x_n,x_n\rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

ini menunjukkan $\begin{vmatrix} \langle x_1, x_1\rangle & ... & \langle x_1, x_n\rangle \\ .. & ... & .. \\ \langle x_n, x_1\rangle & ... & \langle x_n, x_n\rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}$ batas atas dari himpunan

$$\left\{ \begin{vmatrix} \langle x_1, z_1\rangle & ... & \langle x_1, z_n\rangle \\ .. & ... & .. \\ \langle x_n, z_1\rangle & ... & \langle x_n, z_n\rangle \end{vmatrix} : z_1, ..., z_n \in \ell^2, \|z_1\|, ..., \|z_n\| \leq 1 \right\}$$

berarti bahwa

$$\begin{aligned} &\|x_1, ..., x_n\| \\ &= Sup \left\{ \begin{vmatrix} f_1(x_1) & ... & f_1(x_n) \\ .. & ... & .. \\ f_n(x_1) & ... & f_n(x_n) \end{vmatrix} : f_1, ..., f_n \in \left(\ell^2\right)^* = \ell^2, \|f_1\|, ..., \|f_n\| \leq 1 \right\} \\ &\leq \begin{vmatrix} \langle x_1, x_1\rangle & ... & \langle x_1, x_n\rangle \\ .. & ... & .. \\ \langle x_n, x_1\rangle & ... & \langle x_n, x_n\rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Selanjutnya untuk $\{z_1, z_2, ..., z_n\}$ yang merupakan hasil proses orthonormalisasi Gram-Schmidt terhadap $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, juga memenuhi $\|z_1\|, \|z_2\|, ..., \|z_n\| = 1$, maka diperoleh

$$\begin{vmatrix} \langle x_1, z_1\rangle & ... & \langle x_1, z_n\rangle \\ .. & ... & .. \\ \langle x_n, z_1\rangle & ... & \langle x_n, z_n\rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \langle x_1, x_1\rangle & ... & \langle x_1, x_n\rangle \\ .. & ... & .. \\ \langle x_n, x_1\rangle & ... & \langle x_n, x_n\rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}$$

Hasil ini menunjukkan bahwa

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \langle x_1, x_1\rangle & ... & \langle x_1, x_n\rangle \\ .. & ... & .. \\ \langle x_n, x_1\rangle & ... & \langle x_n, x_n\rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} &= \begin{vmatrix} \langle x_1, z_1\rangle & ... & \langle x_1, z_n\rangle \\ .. & ... & .. \\ \langle x_n, z_1\rangle & ... & \langle z_n, z_n\rangle \end{vmatrix} \\ &\leq Sup \left\{ \begin{vmatrix} \langle x_1, z_1\rangle & ... & \langle x_1, z_n\rangle \\ .. & ... & .. \\ \langle x_n, z_1\rangle & ... & \langle x_n, z_n\rangle \end{vmatrix} : z_1, ..., z_n \in \ell^2, \|z_1\|, ..., \|z_n\| \leq 1 \right\} \end{aligned}$$

Dengan demikian dapat diperoleh

$$\begin{aligned} \|x_1, ..., x_n\| \quad = \quad & Sup \left\{ \begin{vmatrix} \langle x_1, z_1\rangle & ... & \langle x_1, z_n\rangle \\ .. & ... & .. \\ \langle x_n, z_1\rangle & ... & \langle x_n, z_n\rangle \end{vmatrix} : z_1, ..., z_n \in \ell^2, \right. \\ & \left. \|z_1\|, ..., \|z_n\| \leq 1 \right\} = \begin{vmatrix} \langle x_1, x_1\rangle & ... & \langle x_1, x_n\rangle \\ .. & ... & .. \\ \langle x_n, x_1\rangle & ... & \langle x_n, x_n\rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Sekarang diberikan fungsional linier pada $\ell^2 \times \ell^2$ yang diberikan

$$f(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(x_k^1 + x_k^2\right) w_k = \langle x_1, w\rangle + \langle x_2, w\rangle$$

dengan $u = (x_1, x_2) \in \ell^2 \times \ell^2$ dan $w \in \left(\ell^2\right)^* = \ell^2$ dan $\|u\| = \|x_1\| + \|x_2\|$ Maka 2-Norma pada ruang $\ell^2 \times \ell^2$ didefinisikan menurut [1] dapat disajikan dengan

$$\|u, v\| = Sup\left\{\left|\begin{array}{cc} f(u) & f(v) \\ f(v) & g(v) \end{array}\right|, f, g \in \left(\ell^2\right)^* = \ell^2, \|f\|, \|g\| \leq 1\right\}$$

dengan $u = (x_1, x_2)$, $v = (y_1, y_2)$. Sehingga dapat dituliskan dengan

$$\|u, v\| = Sup\left\{\left|\begin{array}{cc} \langle x_1 + x_2, w\rangle & \langle y_1 + y_2, w\rangle \\ \langle x_1 + x_2, z\rangle & \langle y_1 + y_2, z\rangle \end{array}\right|, w, z \in \left(\ell^2\right)^* = \ell^2, \|w\|, \|z\| \leq 1\right\}.$$

Selanjutnya dengan ketaksamaan Cauchy-Schwarz diperoleh

$$\left|\begin{array}{cc} \langle x_1 + x_2, w\rangle & \langle y_1 + y_2, w\rangle \\ \langle x_1 + x_2, z\rangle & \langle y_1 + y_2, z\rangle \end{array}\right| \leq \|x_1, y_1\| + \|x_1, y_2\| + \|x_2, y_1\| + \|x_2, y_2\| = \|u\| \ \|v\|$$

Hasil ini menunjukkan bahwa $\|u\| \ \|v\|$ batas atas dari himpunan

$$\left\{\left|\begin{array}{cc} \langle x_1 + x_2, w\rangle & \langle y_1 + y_2, w\rangle \\ \langle x_1 + x_2, z\rangle & \langle y_1 + y_2, z\rangle \end{array}\right|, w, z \in \left(\ell^2\right)^* = \ell^2, \|w\|, \|z\| \leq 1\right\}$$

dengan demikian

$$\begin{aligned} &\|u, v\| \\ &= Sup\left\{\left|\begin{array}{cc} \langle x_1 + x_2, w\rangle & \langle y_1 + y_2, w\rangle \\ \langle x_1 + x_2, z\rangle & \langle y_1 + y_2, z\rangle \end{array}\right|, w, z \in \left(\ell^2\right)^* = \ell^2, \|w\|, \|z\| \leq 1\right\} \\ &\leq \|u\| \ \|v\| \end{aligned}$$

Dari hasil yang dijabarkan diatas tentang 2-norma pada $\ell^2 \times \ell^2$ dapat dilanjutkan 2-norma untuk ruang $\left(\ell^2\right)^n = \ell^2 \times ..... \times \ell^2$. Untuk itu dalam $\ell^2 \times \ell^2$ apakah suatu luasan yang dibentang dari jumlahan vektor yaitu $(x_1 + x_2)$ dan $(y_1 + y_2)$, begitu juga dalam $\left(\ell^2\right)^n = \ell^2 \times ..... \times \ell^2$.apakah luasan yang dibentang oleh jumlahan dari vektor.

Pustaka

[1] C.R. Diminnie, *A New Orthogonality Relation for Normed Linear Spaces*, Math.Nachr.114 (197-203), 1983.

[2] H. Gunawan dan M. Mashadi, *On n-normed spaces, Int.J.Math.Sci*, (to appear).

[3] H. Gunawan, *The space of p-Summable sequences and its natural n-Norm*, Bull.Austral.Math.Soc, Vol.64(137-147), 2001.

[4] J.R Partington, *Orthogonality in Normed Spaces*, Bull.Austral.Math.Soc.33 (449-455), 1986.

[5] Kreyszig, *Introductory Fuctional Analysis with Applications*, John Wiley and Son. Inc, 1978.