Limits

J. Math. and Its Appl.
ISSN: 1829-605X
Vol. 6, No. 1, May 2009, 1–9

KAJIAN ANALISIS DALAM METODE ASIMILASI DATA

Erna Apriliani
Jurusan Matematika, FMIPA ITS Surabaya
april@matematika.its.ac.id

Abstrak

Asimilasi data adalah suatu metode estimasi yang diperoleh dari penggabungan antara model sistem dan data-data pengukuran. Salah satu metode asimilasi data adalah Kalman filter yang merupakan metode estimasi variabel keadaan dari sistem dinamik stokastik. Filter Kalman telah banyak diterapkan pada berbagai bidang ilmu antara lain hidrodinamika, meteorologi, navigasi pesawat dan masalah matematika finansial. Algoritma dasar dari Filter Kalman telah banyak mengalami perkembangan agar dapat diterapkan pada masalah real dan mempunyai waktu komputasi yang cepat. Pada makalah ini akan disajikan beberapa contoh pengembangan algoritma filter Kalman atau asimilasi data secara umum yang memerlukan kajian analisis. Aspek-aspek analisis yang sering diperlukan antara lain norm matriks, konvergensi dan kestabilan.

Katakunci: *reduksi rank, dekomposisi nilai singular, sistem persamaan linear*

1. Pendahuluan

Asimilasi data adalah suatu metode estimasi yang diperoleh dari penggabungan antara model sistem dan data-data pengukuran. Salah satu metode asimilasi data adalah Filter Kalman. Filter Kalman merupakan metode estimasi variabel keadaan dari sistem dinamik stokastik. Filter Kalman telah banyak diterapkan pada berbagai bidang ilmu antara lain hidrodinamika, meteorologi, navigasi pesawat, dan masalah matematika finansial. Algoritma dasar dari Filter Kalman telah banyak mengalami perkembangan agar dapat diterapkan pada masalah real dan mempunyai waktu komputasi yang cepat.

Tujuan dari pengembangan atau modifikasi dari algoritma adalah untuk memudahkan perhitungan, mengurangi waktu komputasi serta memperkecil kesalahan eatimasi. Algoritma pengembangan yang telah diperoleh harus dikaji konvergensinya artinya hasil estimasi yang diperoleh mendekati hasil estimasi filter Kalman dasar serta kestabilan algoritma harus terjamin. Oleh karena itu diperlukan kajian secara analisis apakah konvergensi dan kestab ilan algoritma tersebut terpenuhi, sebelum menerapkan algoritma tersebut pada suatu kasus tertentu.

Pada makalah ini akan disajikan beberapa kajian pengembangan algoritma filter Kalman yang telah dilakukan penulis dan peneliti lainnya yang memerlukan kemampuan analisis. Dari tulisan ini diharapkan memperkuat keyakinan bahwa kita tidak dapat mengembangkan suatu ilmu, algoritma ataupun metode tanpa kemampuan analisis yang cukup. Aspek-aspek analisis yang sering dipergunakan disini antara lain norm suatu matriks, konvergensi dan kestabilan.

2. Asimilasi Data

Asimilasi data adalah metode estimasi variabel dan parameter yang merupakan gabungan antara model dinamik sistem dan data-data pengukuran. Disini akan diberikan contoh bagaimana peranan analisis dalam asimilasi data. Le Dimet FX [3] dalam papernya yang berjudul *The problem of data assimilation for soil water movement*, memberikan model matematika dari gerakan air secara horisontal berupa persamaan parabolic quasilinear sebagai berikut:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(D(\theta)\frac{\partial \theta}{\partial z}\right) - \frac{\partial K(\theta)}{\partial z} \tag{1}$$

dengan koefisien nonlinear

$$
\begin{aligned}
D(\theta) &= \frac{-b\phi_s K_s}{\theta_s}\left(\frac{\theta}{\theta_s}\right)^{b+2} \\
K(\theta) &= K_s\left(\frac{\theta}{\theta_s}\right)^{2b+3}
\end{aligned}
$$

Dalam paper tersebut dikaji tentang keujudan dan ketunggalan penyelesaian persamaan parabolic quasilinear tersebut dengan syarat batas yang tak linear.

Untuk menyelesesaikan masalah tersebut dilakukan transformasi Kirchoff

$$u = \int_0^\theta D(s)ds$$

diasumsikan $K(\theta)$ terdeferensial hampir dimana-mana dan $|\frac{\partial K}{\partial u}| \leq k_2$, k_2 konstan. Pada kasus ini juga diperlukan fungsi yang terintegral Lebesgue kuadrat, ruang Sobolev operator terbatas serta bagaimana keberadaan solusi lemah dan solusi kuat. Selain itu juga dibahas operator linear$A : Y \to Y$ dengan domain $D(A) = Y_1$ yang didefinisikan dengan

$$A\varphi = -\alpha\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}; \varphi \in Y_1$$

didefinisiskan norm di W_T sebagai berikut

$$||w||_{W_T} = || - \frac{dw}{dt} + A^*w||_Y$$

dengan operator $A^* : Y \to Y$ adalah adjoint A. Pada kondisi A^* identik dengan A berarti $L_2(0,T;X))^* \equiv L_2(0,T;X)$

Tampak dalam paper tersebut banyak kerterkaitan antara asimilasi data dengan analisis real maupun analisis fungsional antara lain: terdeferensial hampir dimana-mana, terintegral Lebesgue, ruang Sobolev, operator terbatas, norm, sifat identik suatu operator dan lain-lain.

Dalam bab-bab berikut merupakan perjalanan penelitian yang berkaitan dengan filter Kalman.

3. Filter Kalman dan Pengembangan Algoritmanya

Pada bab ini akan ditunjukkan pemakaian analisis dalam menganalisa keterbatasan matriks kovariansi, kestabilan filter Kalman dan konvergensi dari algoritma pengembangannya.

Misalkan diberikan sistem dinamik stokastik waktu diskrit

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k + G_k w_k \tag{2}$$

dengan pengukuran

$$z_{k+1} = H_{k+1} x_{k+1} + v_k \tag{3}$$

Dengan x_k variabel keadaan berdimensi n, u_k variabel input, w_k noise model, z_k data pengukuran atau output variabel, v_k noise pada pengukuran, sedangkan $A_k; B_k; G_k; H_k$ matriks matriks dengan ukuran bersesuaian.

Definisi 3.1 *Misalkan $\phi(k,i)$ merupakan matriks transisi dari sistem (2) maka sistem dikatakan terobsevasi lengkap seragam atau terobsevasi secara statistik jika untuk setiap N bulat terpenuhi*

$$\alpha_0 I \le \sum_{k=i}^{N-1} \phi^T(k,i) H_k^T R_k^{-1} H_k \phi_(k,i) \le \alpha_1 \tag{4}$$

untuk suatu $i < N; \alpha_0 > 0; \alpha_1 > 0$

Definisi 3.2 *Misalkan $\phi(k,i)$ merupakan matriks transisi dari sistem (2) maka sistem dikatakan tercapai lengkap seragam atau tercapai secara statistik jika untuk setiap N bulat terpenuhi*

$$\alpha_0 \le \sum_{k=i}^{N-1} \phi^T(N,k+1) G_k^T Q_k^{-1} G_k \phi(N,k+1) \le \alpha_1 \tag{5}$$

untuk suatu $i < N; \alpha_0 > 0, \alpha_1 > 0$

Keterobservasian dan ketercapaian stokastik dengan $A_k; Q_k; R_k$ terbatas menjamin perilaku matriks kovariansi

$$P_{k+1}^- = A_k P_k A_k^T + G_k Q_k G_k^T$$

dan

$$P_{k+1} = (I - K_k H_k)P^-_{k+1}$$

yang tidak tergantung pada pemilihan kovariansi awal P_0 untuk k cukup besar, serta sistem error Kalman Filter stabil asimptotik seragam [2].

Dengan $Q_k = 0$, hubungan antara P_k dan P_0 dapat dituliskan sebagai berikut :

$$P_k = \phi_{,0}[P_0^{-1} + \sum_{n=1}^{k} \phi^T_{k,0} H^T_n R^{-1}_n H_n \phi_{k,0}]^{-1} \phi^T_{k,0} \tag{6}$$

Variabel x_k dapat ditentukan secara tunggal berdasarkan data pengukuran z_k jika dan hanya jika matriks $\sum_{n=1}^{k} \phi^T_{k,0} H^T_n R^{-1}_n H_n \phi_{k,0}$ non singular.

Keterbatasan suatu matriks diperlukan pada saat menentukan keterbatasan matriks kovariansi.

3.1. Keterbatasan Matriks P_k

Disini akan ditunjukkan bahwa jika sistem terobservasi m-langkah pada interval $[t_0, t_N]$ untuk $N \in \mathbb{N}$ dengan $A_k; H_k; G_k$ berhingga maka sistem tersebut terobservasi lengkap seragam, artinya ada $m \in \mathbb{N}, \alpha > 0$ dan $\beta > 0$ sedemikian sehingga

$$0 < \alpha I \leq \sum_{j=k-m}^{k} \phi^T_{j,k-m-1} H^T_j R^{-1}_j H_j \phi_{j,k-m-1} \leq \beta I \tag{7}$$

a. Misalkan $N \in \mathbb{N}$ yang cukup besar, $M_{k,k-m}$ definit positif berarti $\forall k \geq m$, ada $\alpha_k > 0$ sedemikian sehingga $0 < \alpha_k I \leq M_{k,k-m}$. Misalkan $\alpha = \min\{\alpha_k | m \leq k \leq N\}$, maka

$$0 < \alpha \leq \sum_{j=k-m}^{k} \phi^T_{j,k-m-1} H^T_j R^{-1}_j H_j \phi_{j,k-m-1} \tag{8}$$

untuk setiap $m \leq k \leq N$.

b. Jika matriks A_k, H_k, G_k berhingga, maka

$$M_{k,k-m} = \sum_{j=k-m}^{k} \sum \phi^T_{j,k-m-1} H^T_j R^{-1}_j H_j \phi_{j,k-m-1}$$

berhingga. Misalkan untuk setiap $k \geq m$ berlaku $M_{k,k-m} \geq \lambda_k I$ dengan λ_k adalah nilai eigen maksimum dari $M_{k,k-m}$, sehingga untuk $N \in \mathbb{N}$ cukup besar diperoleh barisan bilangan hingga $\lambda_m, \lambda_{m+1}, \lambda_{m+2}, ..., \lambda_N$. Untuk $j \geq N$ berlaku juga $M_{j,j-m} \leq \lambda_j$, dengan memilih $\beta = \max(\lambda, \lambda_j)$ untuk setiap $j \geq N$ maka diperoleh $M_{k,k-m} \leq \beta I$ untuk setiap $k \geq m$.

Dari kedua penurunan diatas dapat disimpulkan bahwa sistem terobservasi m-langkah dengan matriks-matriks A_k, H_k, G_k berhingga merupakan sistem terobservasi lengkap seragam pada interval $[t_0, t_N]$.

Selanjutnya, berdasarkan lemma invers matriks [5] dapat diturunkan batas atas dan batas bawah dari kovarian kesalahan estimasi P_k [1] untuk sistem terobservasi m-langkah :

Batas Bawah P_k yaitu

$$P_k \geq \phi_{k,k-m}[P_{k-m}^{-1} + \sum_{j=k-m+1}^{k} \phi_{j,k-m}^T H_j^T R_j^{-1} H_j \phi_{j,k-m}]^{-1} \phi_{k,k-m}^T$$

untuk $M_{k,k-m} = \sum_{j=k-m}^{k} \sum \phi_{j,k-m-1}^T H_j^T R_j^{-1} H_j \phi_{j,k-m-1}$ dan $M_{k,k-m} \geq \lambda_k I$, maka

$$P_k \geq \phi_{k,k-m}[P_{k-m}^{-1} + \beta I]^{-1} \phi_{k,k-m}^T$$

Karena $\phi_{k,k-m}$ matriks berhingga maka P_k terbatas dibawah jika P_{k-m} definit positif.

Sedangkan batas atas P_k adalah

$$P_k \leq \phi_{k,k-m}[P_{k-m} + \sum_{j=k-m+1}^{k} \phi_{j,k-m}^{-1} G_{j-1} Q_{j-1} G_{j-1}^T \phi_{j,k-m}^{-T}] \phi_{k,k-m}^T$$

atau

$$P_k \leq \phi_{k,k-m} P_{k-m} \phi_{k,k-m}^T + \sum_{j=k-m}^{k} \phi_{k,k-j} G_{k-j+1} Q_{k-j+1} G_{k-j+1}^T \phi_{k,k-j}^{-T}$$

Karena matriks-matriks A_k, G_k berhingga mengakibatkan

$$\sum_{j=k-m}^{k} \phi_{k,k-j} G_{k-j+1} Q_{k-j+1} G_{k-j+1}^T \phi_{k,k-j}^{-T}$$

berhingga. Jadi P_k terbatas diatas.

Dari pembahasan tersebut tampak bahwa matriks kovarian kesalahan estimasi P_k terbatas pada interval waktu $[t_0, t_N]$ dengan N cukup besar.

Pada masalah ini diperlukan pengertian tentang keterbatasan matriks, deret yang berhingga, dan norm. Konvergensi suatu matriks dipergunakan untuk mengetahui konvergensi matriks kovariansi.

3.2. Konvergensi P_k

Untuk menyelidiki konvergensi dari matriks kovariansi P_k diturunkan suatu teorema sebagai berikut :

Teorema 3.3 *Misalkan P_k matriks kovarians kesalahan estimasi pada tahap koreksi. Pl_k batas bawah dari P_k . Jika Pl_k konvergen ke nol dan P_k terbatas maka P_k juga konvergen ke nol.*

Bukti :

$$P_k^{-1} = [A_{k-1}P_{k-1}A_{k-1}^t + G_{k-1}Q_{k-1}G_{k-1}^t]^{-1} + H_k^t R_k H_k$$
$$Pl_k^{-1} = [A_{k-1}P_{k-1}A_{k-1}^t]^{-1} + H_k^t R_k H_k$$

maka

$$||P_k^{-1} - Pl_k^{-1}|| = ||[A_{k-1}P_{k-1}A_{k-1}^t + G_{k-1}Q_{k-1}G_{k-1}^t]^{-1} - [A_{k-1}P_{k-1}A_{k-1}^t]^{-1}|| \tag{9}$$

Misalkan $\sigma_T(i), \sigma_l(i)$ dan $\sigma_Q(i)$ masing-masing adalah nilai-nilai singular $A_{k-1}P_{k-1}A_{k-1}^t + G_{k-1}Q_{k-1}G_{k-1}^t$, $A_{k-1}P_{k-1}A_{k-1}^t$ dan $G_{k-1}Q_{k-1}G_{k-1}^t$ maka

$$\begin{aligned}|\frac{1}{\sigma_T(i)} - \frac{1}{\sigma_l(i)}| &= \frac{|\sigma_l(i) - \sigma_T(i)|}{\sigma_T(i)\sigma_l(i)} \leq \frac{\sigma_Q(i)}{\sigma_T(i)\sigma_l(i)} \\ &= ||G_{k-1}Q_{k-1}G_{k-1}^t||\end{aligned}$$

sedangkan

$$\begin{aligned}||Pl_k - P_k|| &= ||P_k(P_k^{-1} - Pl_k^{-1}Pl_k|| && (10)\\ &\leq ||P_k||||P_k^{-1} - Pl_k^{-1}||||Pl_k|| && (11)\end{aligned}$$

karena $||Pl_k|| \to 0$ untuk $k \to \infty$, $||P_k||$ terbatas dan $||P_k^{-1} - Pl_k^{-1}||$ juga terbatas maka $||Pl_k - P_k|| \to 0$ untuk $k \to \infty$.

Disini nilai singular suatu matriks, keterbatasan matriks, pertidaksamaan dalam norm juga ikut berperan.

3.3. Filter Modifikasi RRSQRT

Filter RRSQRT diajukan oleh Verlaan[6] untuk mengurangi waktu komputasi dari Filter Kovariansi Akar Kuadrat. Pada papernya telah ditunjukkan konvergensi dari algoritma tersebut. Filter modifikasi dari RRSQRT ini penulis ajukan untuk mengatasi noise sistem yang berupa vektor, bukan matriks seperti pada filter RRSQRT.

Pada RRSQRT filter, matriks kovariansi P_k dinyatakan dalam $P_k = L_k^t L_k$ dengan $L_k = chol(P_k)$, dilakukan dekomposisi nilai singular $[U, D, V] = svd(L_k^t L_k)$ dan selanjutnya melakukan reduksi rang dari $L_k^* = [L_k U]_{1:n;1:q}$. Pada Modifikasi dari RRSQRT dilakukan dekomposisi nilai singular $[U_1, D_1, V_1] = svd(L_{k+1}^-)$ dan $L_r = [L_{k+1}^- V_1]_{1:n,1:q}$ untuk menggantikan reduksi rank. Oleh karena itu perlu ditunjukkan bahwa hasil estimasi yang diperoleh adalah sama didasarkan pada teorema berikut:

Teorema 3.4 *Jika* $[U_1, D_1, V_1] = svd(L_k^-)$ *maka* $L_r L_r^t = L^*(L^*)^t$ *dengan* $L_r = [L_k^- V_1]_{1:n,1:q}$ *dan* $L^* = [L_k^- U]_{1:n,1:q}$ *untuk* $[U, D, V] = svd((L_k^-)^t L_k^-)$.

Bukti:

Misalkan $[U_1, D_1, V_1] = svd(L_k^-)$, atau $D_1 = U_1^t L_k^- V_1$ dengan U_1, V_1 masing-masing adalah matriks -matriks ortonormal dengan kolom-kolom berupa vektor singular kiri dan kanan dari L_k^- dan D_1 adalah matriks diagonal dengan elemen diagonal nilai singular λ dari L_k^- , maka dapat dituliskan

$$\begin{aligned} D_1^t D_1 &= (U_1^t L_k^- V_1)^t (U_1^t L_k^- V_1) \\ &= V_1^t (L_k^-)^t U_1 U_1^t L_k^- V_1 \\ &= V_1^t (L_k^-)^t L_k^- V_1 \end{aligned}$$

dengan $D_1^t D_1$ adalah matriks diagonal dengan elemen diagonal kuadrat nilai singular L_k^-, λ^2, sedangkan V_1 adalah matriks ortonormal dengan kolom-kolom berupa vektor singular dari L_k^-. Golub [4] menyatakan bahwa vektor singular kanan, V_1 dari L_k^- dan vektor singular kiri, U dari $(L_k^-)^t L_k^-$ adalah sama.

Dengan mendefinisikan $L_r = [L_k^- V_1]_{1:n,1:q}$ dan $L^* = [L_k^- U]_{1:n,1:q}$ akan diperoleh $L_r L_r^t = (L^*)(L^*)^t$.

Tampak bahwa pada pembentukan modifikasi filter RRSQRT harus dipahami tentang vektor singular, nilai singular yang berkaitan dengan teori spektral, serta sifat ortogonal dan ortonormal dari vektor singular

4. Penutup

Dari uraian diatas tampak bahwa kemampuan analisis bagi seorang matematikawan sangat diperlukan agar dapat mengembangkan suatu algoritma maupun metode-metode bidang terapan. Tanpa kemampuan analisis kita akan menjadi pemakai algoritma, software ataupun metode-metode tanpa dapat mengembangkan, mengurangi waktu komputasi dan memperbaiki hasil estimasi.

Pustaka

[1] Apriliani, E. *Reduksi Rang pada Filter Informasi Akar Kuadrat dan Modifikasi Filter Kovariansi Akar Kuadrat Rang Tereduksi untuk Sistem Berderau Vektor*, Disertasi, 2002.

[2] Lewis, F.L., *Optimal Estimation*, John Wiley and Sons, 1986

[3] Le Dimet FX, Shutyaev,VP., Wang J and Mu MU, *The Problem of data Assimilation for Soil Water Movement*, ESAIM: Control Optimisation and Calculus Variation, Vol. 10, pp. 331-345, 2004

[4] Golub, G.H. and Van Loan,C.F., *Matrix Computations*, The Johns Hopkins University Press, London, 1989.

[5] Sorenson, *Controllability and Observability of Linear Stochastic Time-Discrete Control System*, Advances in Control System, Vol. 6. , 1968.

[6] Verlaan, M. *Ecient Kalman Filtering Algorithms for Hydrodynamic Models*, PhD Thesis, TU Delft,1998