

Model Matematika COVID-19 dengan Vaksinasi Dua Tahap, Karantina, dan Pengobatan Mandiri

Muhammad Manaqib^{1*}, Mahmudi², Rahmawati Annisa Salsadilla³

^{1,2,3}UIN Syarif Hidayatullah Jakarta; Jalan Ir. H. Djuanda No. 95 Tangerang Selatan, Banten
^{1,2,3}Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Syarif Hidayatullah Jakarta
e-mail: muhammad.manaqib@uinjkt.ac.id

Diajukan: 3 September 2022, Diperbaiki: 22 September 2023, Diterima: 18 Oktober 2023

Abstrak

Penelitian ini mengembangkan model SEIR untuk memodelkan penyebaran COVID-19 dengan menambahkan vaksinasi dua tahap, isolasi mandiri, karantina di rumah sakit, dan pengobatan mandiri. Pembentukan model diawali dengan membuat asumsi dan diagram transfer penyebaran COVID-19 dengan populasi dibagi menjadi sembilan subpopulasi yaitu subpopulasi rentan, subpopulasi vaksinasi dosis 1, subpopulasi vaksinasi dosis 2, subpopulasi laten, subpopulasi terinfeksi, subpopulasi isolasi mandiri, subpopulasi karantina di rumah sakit, subpopulasi pengobatan mandiri, dan subpopulasi *removed*, kemudian dibentuk sistem persamaan diferensial nonlinear. Dari analisis model diperoleh titik ekuilibrium bebas penyakit, titik ekuilibrium endemik penyakit, dan bilangan reproduksi dasar (R_0). Titik ekuilibrium bebas penyakit stabil asimtotik lokal ketika $R_0 < 1$. Eksistensi titik ekuilibrium endemik terdapat satu atau tiga akar positif jika $R_0 > 1$ dan terdapat nol atau dua akar positif jika $R_0 < 1$. Bifurkasi mundur terjadi pada kondisi $R_0 < 1$ sehingga diperoleh persamaan bifurkasi mundur $R_0^c < R_0 < 1$. Simulasi numerik untuk model yang dibuat sesuai dengan analisis yang telah dilakukan. Analisis sensitivitas diperoleh parameter yang berpengaruh signifikan pada penyebaran COVID-19 adalah laju kontak dengan individu terinfeksi dan laju vaksinasi dosis satu.

Kata Kunci: Bilangan Reproduksi Dasar, COVID-19, Karantina, Vaksinasi, Kestabilan Titik Ekuilibrium

Abstract

This research was developed SEIR model for transmission of the COVID-19 disease with add two-stage vaccination, self-isolation, hospital quarantine, and self-medication. The model development begins with making assumptions and compartment diagrams for the spread of COVID-19 with Population was divided into nine part of sub-populations, there are the susceptible sub-population, the first dose vaccination sub-population, the second dose vaccination sub-population, the latent sub-population, the infected sub-population, the self-isolation sub-population, the hospital quarantine sub-population, the self-medication sub-population, and the removed sub-population afterwards a system of nonlinear differential equations is formed. From model analysis, it is the disease-free equilibrium point and the endemic equilibrium points and the basic reproduction number (R_0). The disease-free equilibrium point is locally asymptotically stable when $R_0 < 1$. The existence of an endemic equilibrium point there is one or three positive roots if $R_0 > 1$ and there is zero or two positive roots if $R_0 < 1$. Backward bifurcation occurs at conditions $R_0 < 1$ so that $R_0^c < R_0 < 1$. Numerical simulations for the model is made according to the analysis that has been done. Sensitivity analysis obtained that the parameters that have a significant effect on the spread of COVID-19 are the rate of contact with infected individuals, and the rate of first dose vaccination.

Keywords: Basic Reproduction Number, COVID-19, Quarantine, Vaccination, Stability of Equilibrium Points

1 Pendahuluan

COVID-19 berhasil diidentifikasi pada bulan Desember 2019 di Wuhan, China. COVID-19 ditemukan karena meningkatnya kasus pneumonia yang penyebabnya tidak diketahui. Dengan cepat virus ini menjadi pandemi yang menyebar ke seluruh dunia dan menimbulkan dampak serius bagi kelangsungan kehidupan manusia [1]. COVID-19 menyebar melalui tempat atau benda yang terkontaminasi cairan yang berasal dari hidung dan mulut seseorang yang telah terinfeksi atau dikenal dengan droplet. Hal ini mengakibatkan mudahnya seseorang terinfeksi virus tersebut [2].

Berbagai upaya pencegahan COVID-19 telah ditetapkan pemerintah dan organisasi kesehatan dunia (WHO), seperti penerapan protokol kesehatan 3M (memakai masker, mencuci tangan, dan menjaga jarak), penutupan akses wilayah (*lockdown*), karantina baik secara mandiri maupun di rumah sakit dan program vaksinasi [3]. Adapun upaya penanganan yang dilakukan untuk seseorang yang telah terpapar COVID-19 seperti pengobatan secara medis yang dapat dilakukan di rumah sakit maupun mandiri di rumah [4]. Upaya pencegahan dan penanganan yang telah disebutkan di atas dapat dijadikan variabel tambahan dalam suatu penelitian epidemi penyakit seperti penggunaan masker, vaksinasi, karantina, isolasi, dan pengobatan mandiri. Hal-hal tersebut digabungkan ke suatu kasus penelitian akan memberikan hasil yang lebih berkembang. Studi ini memperkenalkan beberapa metodologi yang menggunakan pemodelan matematika yang didukung oleh analisis untuk mendapatkan pengetahuan mengenai transmisi dinamika dan pengendalian COVID-19 pada populasi manusia [5].

Banyak penelitian mengenai pemodelan matematika COVID-19 yang mengembangkan model dasar SEIR (*Susceptible Exposed Infected Recovered/Removed*), seperti yang dikembangkan oleh D. Dwomoh et al. [6] menambahkan subpopulasi *Quarantine* dan *Hospitalized*, B.K Mishra et al. [7] menambahkan subpopulasi *Quarantine* yang dibagi karantina mandiri dan rumah sakit, Mohsin Ali et al. [8] menambahkan subpopulasi *Medication* (Pengobatan), M.Manaqib, et al. [9] menambahkan subpopulasi *Quarantine* dan Kesehatan. Pada penelitian ini akan dijelaskan gambaran umum mengenai analisis model epidemi COVID-19 SEIR dengan ditambahkan kompartemen vaksinasi yang dibagi menjadi dua yaitu vaksinasi dosis satu dan vaksinasi dosis dua, kompartemen karantina yang dibagi menjadi dua yaitu isolasi mandiri dan karantina di rumah sakit, dan pengobatan mandiri.

2 Metode Penelitian

Pada penelitian ini, model matematika yang digunakan untuk menggambarkan model penyebaran COVID-19 adalah model epidemi SEIR dengan menambahkan vaksinasi dua tahap,

isolasi mandiri, karantina di rumah sakit, dan pengobatan mandiri. Setelah diperoleh model matematika, dicari titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik yang eksistensinya bergantung terhadap R_0 . Kestabilan lokal kedua titik ekuilibrium ditentukan berdasarkan tanda akar-akar karakteristik dari hasil linearisasi yang berbentuk matriks Jacobi serta digunakan metode kriteria Routh-Hurwitz dan kriteria Lienard-Chipart. Analisis bifurkasi dilakukan untuk melihat eksistensi titik ekuilibrium endemik serta untuk menentukan terjadi atau tidak bifurkasi mundur. Terakhir dilakukan simulasi numerik untuk memverifikasi hasil analitik dan analisis sensitivitas untuk melihat nilai parameter yang berpengaruh secara signifikan terhadap penyebaran COVID-19.

3 Hasil dan Pembahasan

3.1 Konstruksi Model

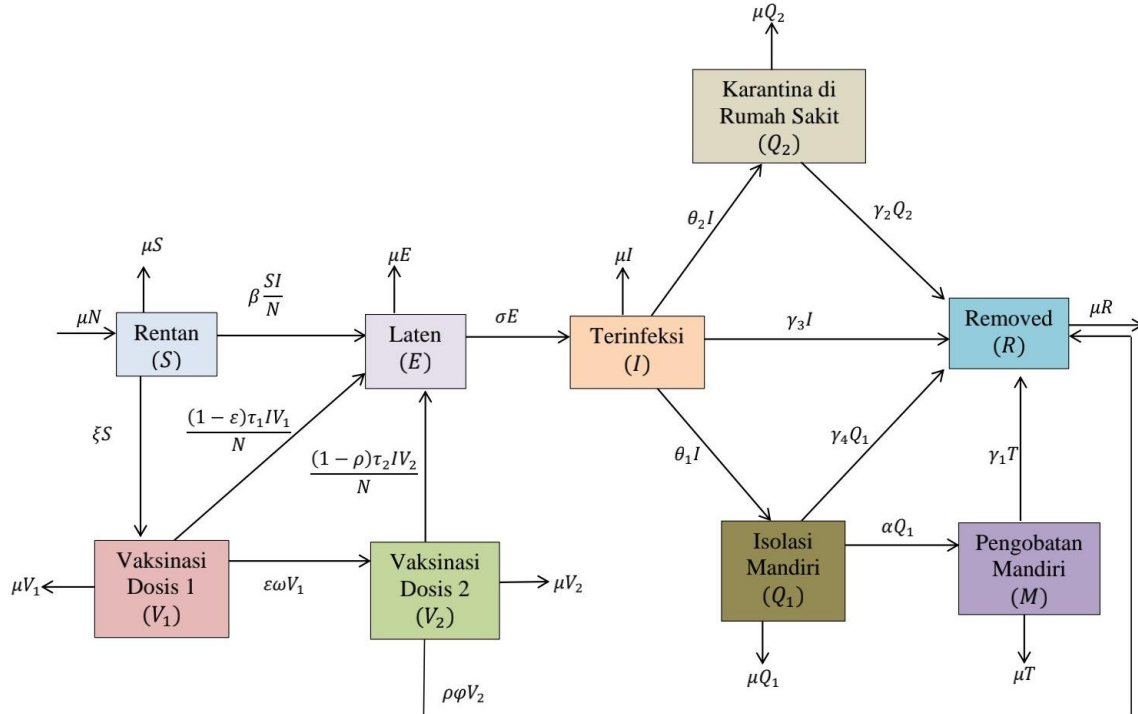
Pada penelitian ini populasi dibagi menjadi sembilan subpopulasi yaitu subpopulasi rentan (S), subpopulasi vaksinasi dosis satu (V_1), subpopulasi vaksinasi dosis dua (V_2), subpopulasi laten (E), subpopulasi terinfeksi (I), subpopulasi isolasi mandiri (Q_1), subpopulasi karantina di rumah sakit (Q_2), subpopulasi pengobatan mandiri (M), dan subpopulasi sembuh atau meninggal akibat penyakit *removed* (R). Selanjutnya diberikan asumsi-asumsi sebagai dasar pembentukan model. (1) Setiap individu yang lahir rentan tertular penyakit. (2) Vaksinasi dilakukan sebanyak dua tahap yang bertujuan untuk menurunkan resiko individu rentan tertular, tetapi individu yang divaksin dosis satu maupun dosis dua masih dapat terinfeksi. (3) Individu yang melakukan vaksinasi dosis satu dan tidak terinfeksi diasumsikan melakukan vaksinasi dosis dua. (4) Individu yang terinfeksi akan sembuh alami, meninggal akibat penyakit, melakukan isolasi mandiri, atau karantina di rumah sakit. (5) Individu yang sedang isolasi mandiri akan sembuh alami, meninggal akibat penyakit, atau melakukan pengobatan mandiri. (6) Individu yang sedang karantina di rumah sakit akan sembuh alami, atau meninggal akibat penyakit. (7) Individu yang melakukan pengobatan mandiri akan sembuh alami, atau meninggal akibat penyakit. Adapun parameter dari model ini didefinisikan sebagai berikut.

Tabel 1. Parameter Model

Parameter	Definisi	Syarat	Satuan
β	Laju perpindahan individu rentan sebelum vaksinasi menjadi individu laten	$0 < \beta \leq 1$	$\frac{1}{\text{hari}}$
ξ	Laju perpindahan individu rentan sebelum vaksinasi menjadi individu rentan sudah vaksinasi dosis satu	$0 \leq \xi \leq 1$	$\frac{1}{\text{hari}}$

Parameter	Definisi	Syarat	Satuan
ε	Efikasi vaksinasi dosis satu	$0 \leq \varepsilon < 1$	
ω	Laju perpindahan individu vaksinasi dosis satu menjadi individu vaksinasi dosis dua	$0 \leq \omega \leq 1$	$\frac{1}{\text{hari}}$
τ_1	Laju perpindahan individu vaksinasi dosis satu menjadi individu laten	$0 < \tau_1 \leq 1$	$\frac{1}{\text{hari}}$
τ_2	Laju perpindahan individu vaksinasi dosis dua menjadi individu laten	$0 < \tau_2 \leq 1$	$\frac{1}{\text{hari}}$
ρ	Efikasi vaksinasi dosis dua	$0 \leq \rho < 1$	
φ	Laju perpindahan individu vaksinasi dosis dua menjadi individu sembuh	$0 \leq \varphi \leq 1$	$\frac{1}{\text{hari}}$
σ	Laju perpindahan individu laten menjadi individu terinfeksi	$0 \leq \sigma \leq 1$	$\frac{1}{\text{hari}}$
θ_1	Laju perpindahan individu terinfeksi menjadi individu dalam isolasi mandiri	$0 \leq \theta_1 \leq 1$	$\frac{1}{\text{hari}}$
θ_2	Laju perpindahan individu terinfeksi menjadi individu dalam karantina di rumah sakit	$0 \leq \theta_2 \leq 1$	$\frac{1}{\text{hari}}$
α	Laju perpindahan individu dalam isolasi mandiri menjadi individu dalam pengobatan mandiri	$0 \leq \alpha \leq 1$	$\frac{1}{\text{hari}}$
γ_1	Laju perpindahan individu dalam pengobatan mandiri menjadi individu sembuh atau meninggal akibat penyakit	$0 \leq \gamma_1 \leq 1$	$\frac{1}{\text{hari}}$
γ_2	Laju perpindahan individu dalam karantina di rumah sakit menjadi individu sembuh atau meninggal akibat penyakit	$0 \leq \gamma_2 \leq 1$	$\frac{1}{\text{hari}}$
γ_3	Laju perpindahan individu terinfeksi menjadi individu sembuh atau meninggal akibat penyakit	$0 \leq \gamma_3 \leq 1$	$\frac{1}{\text{hari}}$
γ_4	Laju perpindahan individu isolasi mandiri menjadi individu sembuh atau meninggal akibat penyakit	$0 \leq \gamma_4 \leq 1$	$\frac{1}{\text{hari}}$
μ	Laju kelahiran dan kematian alami	$0 < \mu \leq 1$	$\frac{1}{\text{hari}}$

Berikut ini adalah diagram transfer yang menggambarkan model matematika COVID-19 dengan vaksinasi dua tahap, karantina, dan pengobatan mandiri sesuai dengan asumsi model, variabel, dan parameter yang digunakan.



Gambar 1. Diagram Transfer Model

Berdasarkan diagram transfer model pada Gambar 1, dapat dibentuk persamaan model matematika berupa sistem persamaan diferensial biasa nonlinear berikut.

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dt} &= \mu N - \left(\frac{\beta I}{N} + \xi + \mu \right) S \\
 \frac{dV_1}{dt} &= \xi S - \left(\frac{(1-\varepsilon)\tau_1 I}{N} + \varepsilon \omega + \mu \right) V_1 \\
 \frac{dV_2}{dt} &= \varepsilon \omega V_1 - \left(\frac{(1-\rho)\tau_2 I}{N} + \rho \phi + \mu \right) V_2 \\
 \frac{dE}{dt} &= \left(\frac{\beta S}{N} + \frac{(1-\varepsilon)\tau_1 V_1}{N} + \frac{(1-\rho)\tau_2 V_2}{N} \right) I - (\sigma + \mu) E \\
 \frac{dI}{dt} &= \sigma E - (\theta_1 + \theta_2 + \gamma_3 + \mu) I \\
 \frac{dQ_1}{dt} &= \theta_1 I - (\alpha + \gamma_4 + \mu) Q_1 \\
 \frac{dQ_2}{dt} &= \theta_2 I - (\gamma_2 + \mu) Q_2 \\
 \frac{dM}{dt} &= \alpha Q_1 - (\gamma_1 + \mu) M \\
 \frac{dR}{dt} &= \rho \phi V_2 + \gamma_1 M + \gamma_2 Q_2 + \gamma_3 I + \gamma_4 Q_1 - \mu R
 \end{aligned} \tag{1}$$

dengan $N = S + V_1 + V_2 + E + I + Q_1 + Q_2 + M + R$ maka diperoleh $\frac{dN}{dt} = 0$. Dengan demikian, $N(t) = c$ dengan c adalah bilangan bulat positif, maka $N(t)$ konstan.

Sistem (1) dapat dibentuk ke dalam model *non-dimensional*, yaitu dengan mengubah satuan setiap kompartemen menjadi proporsi berikut.

$$s = \frac{S}{N}, v_1 = \frac{V_1}{N}, v_2 = \frac{V_2}{N}, e = \frac{E}{N}, i = \frac{I}{N}, q_1 = \frac{Q_1}{N}, q_2 = \frac{Q_2}{N}, m = \frac{M}{N}, r = \frac{R}{N}. \quad (2)$$

Karena variabel R tidak muncul pada persamaan lain maka persamaan R untuk sementara dapat diabaikan dari sistem. Sehingga sistem *non-dimensional* delapan variabel berikut.

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= \mu - (\beta i + \xi + \mu)s \\ \frac{dv_1}{dt} &= \xi s - ((1 - \varepsilon)\tau_1 i + \varepsilon\omega + \mu)v_1 \\ \frac{dv_2}{dt} &= \varepsilon\omega v_1 - ((1 - \rho)\tau_2 i + \rho\varphi + \mu)v_2 \\ \frac{de}{dt} &= (\beta s + (1 - \varepsilon)\tau_1 v_1 + (1 - \rho)\tau_2 v_2)i - (\sigma + \mu)e \\ \frac{di}{dt} &= \sigma e - (\theta_1 + \theta_2 + \gamma_3 + \mu)i \\ \frac{dq_1}{dt} &= \theta_1 i - (\alpha + \gamma_4 + \mu)q_1 \\ \frac{dq_2}{dt} &= \theta_2 i - (\gamma_2 + \mu)q_2 \\ \frac{dm}{dt} &= \alpha q_1 - (\gamma_1 + \mu)m. \end{aligned} \quad (3)$$

Dikarenakan sistem (3) menggambarkan interaksi subpopulasi manusia, maka solusi dari sistem harus non-negatif dan terbatas [10][11]. Teorema berikut telah menjamin solusi sistem (3) adalah non-negatif dan terbatas.

Teorema 1 Semua solusi dari sistem (3) yang bergantung pada nilai awal $s_0, v_{10}, v_{20}, e_0, i_0, q_{10}, q_{20}, m_0$ adalah non-negatif dan terbatas.

Bukti. Pertama akan dibuktikan bahwa semua persamaan dari sistem (3) tidak negatif. Diperhatikan persamaan pertama dari sistem (3)

$$\begin{aligned} \frac{ds(t)}{dt} &= \mu - (\beta i(t) + \xi + \mu)s(t) \\ \Leftrightarrow \frac{ds(t)}{dt} &> -(\beta i(t) + \xi + \mu)s(t) \\ \Leftrightarrow \frac{ds(t)}{s(t)} &> -(\beta i(t) + \xi + \mu)dt. \end{aligned}$$

Selanjutnya dengan mengintegrasikan kedua sisi diperoleh

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \ln|s(t)| &> -(\xi + \mu)t - \int \beta i(t) dt + c \\ \Leftrightarrow s(t) &> e^{-(\xi + \mu)t - \int \beta i(t) dt + c}, \text{ misal } c_1 = e^c \text{ dan } g_1(t) = \int \beta i(t) dt \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow s(t) > c_1 e^{-(\xi+\mu)t} e^{-g_1(t)},$$

dengan nilai awal $s(0) = s_0 \geq 0$

$$\Leftrightarrow s(t) > s_0 e^{g_1(0)-g_1(t)} e^{-(\xi+\mu)t} \geq 0.$$

terbukti $s(t)$ tidak negatif. Persamaan yang lainnya dapat tunjukan dengan cara yang sama. Selanjutnya akan dibuktikan solusi dari sistem (3) terbatas. Diketahui pada model *non-dimensional* (3) $s(t) + v_1(t) + v_2(t) + e(t) + i(t) + q_1(t) + q_2(t) + m(t) + r(t) = 1$. Sehingga dapat didefinisikan himpunan invarian positif domain dari sistem (3)

$$\Omega_1 = \{(s, v_1, v_2, e, i, q_1, q_2, m) \in \mathbb{R}_+^8 | s + v_1 + v_2 + e + i + q_1 + q_2 + m \leq 1\}. \quad (4)$$

Terbukti Teorema 1 benar. ■

3.2 Titik ekuilibrium dan Bilangan Reproduksi Dasar

Dari sistem (4) akan dicari titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik penyakit. Dengan menetapkan ruas kanan persamaan pada Model (3) menjadi nol, kita mendapatkan solusi sebagai titik ekuilibrium [12]. Titik ekuilibrium bebas penyakit didapat ketika tidak ada penyakit dalam populasi. Diperoleh titik ekuilibrium bebas penyakit

$$E_0(s, v_1, v_2, e, i, q_1, q_2, m) = \left(\frac{\mu}{(\xi+\mu)}, \frac{\xi\mu}{(\xi+\mu)(\varepsilon\omega+\mu)}, \frac{\varepsilon\omega\xi\mu}{(\xi+\mu)(\varepsilon\omega+\mu)(\rho\varphi+\mu)}, 0, 0, 0, 0, 0 \right). \quad (5)$$

Selanjutnya akan dicari bilangan reproduksi dasar (R_0) dengan metode Matriks Generasi Selanjutnya yaitu dengan melakukan pelinearan terhadap subsistem terinfeksi yang direpresentasikan dengan matriks Jacobi (J) kemudian didekomposisi menjadi $J = F - V$ dengan F adalah matriks transmisi dan V adalah matriks transisi sebagai berikut

$$F = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\beta\mu(\varepsilon\omega+\mu)(\rho\varphi+\mu)+(1-\varepsilon)\tau_1\xi\mu(\rho\varphi+\mu)+(1-\rho)\tau_2\varepsilon\omega\xi\mu}{(\xi+\mu)(\varepsilon\omega+\mu)(\rho\varphi+\mu)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} (\sigma + \mu) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sigma & (\theta_1 + \theta_2 + \gamma_3 + \mu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\theta_1 & (\alpha + \gamma_4 + \mu) & 0 & 0 \\ 0 & -\theta_2 & 0 & (\gamma_2 + \mu) & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha & 0 & (\gamma_1 + \mu) \end{bmatrix}.$$

Terakhir R_0 diperoleh dari radius spectral dari FV^{-1} . Diperoleh

$$R_0 = \frac{\mu\sigma[\beta(\varepsilon\omega+\mu)(\rho\varphi+\mu)+(1-\varepsilon)\tau_1\xi(\rho\varphi+\mu)+(1-\rho)\tau_2\varepsilon\omega\xi]}{(\xi+\mu)(\varepsilon\omega+\mu)(\rho\varphi+\mu)(\sigma+\mu)(\theta_1+\theta_2+\gamma_3+\mu)}. \quad (6)$$

Titik ekuilibrium endemik adalah kondisi dimana terdapat individu terinfeksi dalam populasi sehingga kompartemen i pada titik ekuilibrium endemik yaitu $i^* > 0$. Untuk menyederhanakan

penulisan dimisalkan $A = (\varepsilon\omega + \mu)$, $B = (\rho\varphi + \mu)$, $C = (1 - \varepsilon)\tau_1$, $W = (1 - \rho)\tau_2$, $X = (\xi + \mu)$, $Y = (\sigma + \mu)$, $Z = (\theta_1 + \theta_2 + \gamma_3 + \mu)$.

Teorema 2 Misalkan $E_1 = (s^*, v_1^*, v_2^*, e^*, i^*, q_1^*, q_2^*, m^*)$ adalah titik ekuilibrium endemik penyakit dari sistem (4). Jika $R_0 > 1$, maka titik ekuilibrium E_1 ada yaitu

$$s^* = \frac{\mu}{\beta i^* + X}; v_1^* = \frac{\xi\mu}{(\beta i^* + X)(Ci^* + A)}; v_2^* = \frac{\xi\varepsilon\omega\mu}{(\beta i^* + X)(Ci^* + A)(Wi^* + B)}$$

$$e^* = \frac{\beta\mu i^*(Ci^* + A)(Wi^* + B) + C\xi\mu i^*(Wi^* + B) + W\xi\varepsilon\omega\mu i^*}{(\beta i^* + X)(Ci^* + A)(Wi^* + B)Y}$$

$$q_1^* = \frac{\theta_1 i^*}{\alpha + \gamma_4 + \mu}; q_2^* = \frac{\theta_2 i^*}{\gamma_2 + \mu}; m^* = \frac{\alpha\theta_1 i^*}{(\alpha + \gamma_4 + \mu)(\gamma_1 + \mu)}$$

$$a_0 i^{*3} + a_1 i^{*2} + a_2 i^* + a_3 = 0,$$

dengan $a_0 = C\beta WYZ$, $a_1 = \beta AWYZ + CXWYZ + C\beta BYZ - \sigma\beta\mu CW$, $a_2 = XAWYZ + \beta ABYZ + CXBYZ - \sigma\beta\mu CB - \sigma\beta\mu AW - \sigma C\xi\mu W$, $a_3 = XABYZ(1 - R_0)$.

Bukti. Pada titik ekuilibrium endemik penyakit akan menetap pada populasi, maka akan selalu ada individu terinfeksi jika masih terdapat penyakit $i^* > 0$. Maka akan dibuktikan persamaan polinomial i^* paling tidak memiliki satu akar positif menggunakan *Descartes Rules of Sign*. Berdasarkan *Descartes Rules of Sign*, sebuah polinomial akan memiliki akar positif sebanyak perubahan tanda yang terjadi pada koefisien persamaan tersebut [10]. Dengan $R_0 > 1$ didapat nilai $a_3 < 0$ maka terdapat setidaknya satu akar positif pada persamaan tersebut [13]. Dengan demikian didapat nilai $i^* > 0$ jika dan hanya jika $R_0 > 1$. Terbukti Teorema 2 benar. ■

3.3 Analisis Kestabilan Lokal Titik Ekuilibrium

Analisis kestabilan ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks Jacobian yang diperoleh melalui metode linearisasi sistem di sekitar titik ekuilibrium dari sistem (3), yaitu

$$J_{(E)} = \begin{bmatrix} -(\beta i + X) & 0 & 0 & 0 & -\beta s & 0 & 0 & 0 \\ \xi & -(Ci + A) & 0 & 0 & -Cv_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon\omega & -(Wi + B) & 0 & -Wv_2 & 0 & 0 & 0 \\ \beta i & Ci & Wi & -Y & (\beta s + Cv_1 + Wv_2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma & -Z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \theta_1 & -(\alpha + \gamma_4 + \mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \theta_2 & 0 & -(\gamma_2 + \mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & -(\gamma_1 + \mu) \end{bmatrix} \quad (7)$$

Teorema 3 Jika $R_0 < 1$ maka titik ekuilibrium bebas penyakit E_0 pada sistem (4) stabil asimtotik lokal.

Bukti. Dengan mengevaluasi $\det(\lambda I - J_{(E_0)}) = 0$, kita punya persamaan karakteristik

$$(\lambda + (\gamma_1 + \mu))(\lambda + (\gamma_2 + \mu))(\lambda + (\alpha + \gamma_4 + \mu))(\lambda + \rho\varphi + \mu)(\lambda + \varepsilon\omega + \mu)(\lambda + \xi + \mu)P = 0 \quad (8)$$

dengan $P = (\lambda + Y)(\lambda + Z) - \sigma\left(\frac{\beta\mu}{X} + \frac{C\xi\mu}{XA} + \frac{W\varepsilon\omega\xi\mu}{XAB}\right)$. Diperoleh $\lambda_1 = -(\gamma_1 + \mu)$, $\lambda_2 = -(\gamma_2 + \mu)$, $\lambda_3 = -(\alpha + \gamma_4 + \mu)$, $\lambda_4 = -(\rho\varphi + \mu)$, $\lambda_5 = -(\varepsilon\omega + \mu)$, $\lambda_6 = -(\xi + \mu)$. Karena $\mu > 0$ dan $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_4, \alpha, \rho, \varphi, \varepsilon, \omega, \xi \geq 0$ maka keenam nilai eigen tersebut bernilai negatif. Dari

Persamaan (8) dapat dilihat bahwa persamaan karakteristik untuk kedua nilai eigen lainnya sebagai berikut. Polinomial P dapat diubah dalam bentuk

$$P = a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0 \quad (9)$$

dengan $a_0 = 1$, $a_1 = (Z + Y)$, $a_2 = YZ[1 - R_0]$. Karena P merupakan polinomial berderajat dua, berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz akan dibuktikan bahwa $a_1 > 0$ dan $a_1a_2 > 0$, atau kondisi ini ekuivalen dengan $a_1 > 0$ dan $a_2 > 0$ agar polinomial P mempunyai akar-akar negatif [14]. Jelas bahwa $a_1 > 0$ dan $a_2 > 0$ jika $R_0 < 1$. Dengan demikian Persamaan (9) mempunyai akar-akar yang bagian realnya negatif. Sehingga berdasarkan [15], terbukti Teorema 3 benar. ■

Teorema 4 Jika $R_0 > 1$ koefisien a_3 , a_5 positif dan determinan matriks Δ_2 , Δ_4 positif dari kriteria Routh-Hurwitz maka titik ekuilibrium E_1 stabil asimtotik lokal.

Bukti: Dengan mengevaluasi $\det(\lambda I - J_{(E_1)}) = 0$, kita punya persamaan karakteristik dari matriks Jacobian sebagai berikut.

$$(\lambda + (\gamma_1 + \mu))(\lambda + (\gamma_2 + \mu))(\lambda + (\alpha + \gamma_4 + \mu))Q = 0 \quad (3)$$

$$\text{dengan } Q = a_0\lambda^5 + a_1\lambda^4 + a_2\lambda^3 + a_3\lambda^2 + a_4\lambda + a_5 \quad (11)$$

$$a_0 = 1, a_1 = Y + Z + P_1 + P_2 + P_3,$$

$$a_2 = YZ + YP_1 + YP_2 + YP_3 + ZP_1 + ZP_2 + ZP_3 + P_1P_2 + P_1P_3 + P_2P_3 - \sigma P_4;$$

$$a_3 = \sigma C^2 i^* v_1^* + \sigma W^2 i^* v_2^* + YZP_1 + YZP_2 + YZP_3 + YP_1P_2 + YP_1P_3 + YP_2P_3 + ZP_1P_2 + ZP_1P_3 + ZP_2P_3 + P_1P_2P_3 + \sigma\beta s^* \beta i^* - \sigma P_3P_4 - \sigma P_2P_4 - \sigma P_1P_4,$$

$$a_4 = YZP_1P_2 + YZP_1P_3 + YZP_2P_3 + YP_1P_2P_2 + ZP_1P_2P_3 + \sigma W i^* \varepsilon \omega C v_1^* + \sigma\beta s^* \beta i^* P_1 + \sigma\beta s^* \beta i^* P_2 + \sigma C^2 i^* v_1^* P_1 + \sigma C^2 i^* v_1^* P_3 + \sigma C i^* \beta s^* \xi + \sigma W^2 i^* v_2^* P_2 + \sigma W^2 i^* v_2^* P_3 - \sigma P_2P_3P_4 - \sigma P_1P_3P_4 - \sigma P_1P_2P_4,$$

$$a_5 = YZP_1P_2P_3 + \sigma W i^* \varepsilon \omega C v_1^* P_3 + \sigma\beta s^* \beta i^* P_1P_2 + \sigma C^2 i^* v_1^* P_1P_3 + \sigma C i^* \beta s^* \xi P_1 + \sigma W^2 i^* v_2^* P_2P_3 + \sigma W i^* \varepsilon \omega \beta s^* \xi - \sigma P_1P_2P_3P_4,$$

$$P_1 = (W i^* + B), P_2 = (C i^* + A), P_3 = (\beta i^* + X), P_4 = (\beta s^* + C v_1^* + W v_2^*).$$

Diperoleh $\lambda_1 = -(\gamma_1 + \mu)$, $\lambda_2 = -(\gamma_2 + \mu)$, $\lambda_3 = -(\alpha + \gamma_4 + \mu)$. Karena $\mu > 0$, dan $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_4, \alpha \geq 0$ maka ketiga nilai eigen tersebut bernilai negatif. Untuk menyederhanakan pembuktian, menurut kriteria Lienard-Chipart [16], semua nilai eigen dari polinomial derajat lima (11) akan bernilai negatif jika dan hanya jika koefisien kriteria Routh-Hurwitz a_1 , a_3 , dan a_5 positif dan matriks Routh-Hurwitz Δ_2 dan Δ_4 positif. Karena $R_0 > 1$ jelas $a_1 > 0$ dan titik ekuilibrium endemik E_1 stabil asimtotik lokal ketika koefisien kriteria Routh-Hurwitz a_3 , dan a_5 positif, dan determinan matriks Routh-Hurwitz Δ_2 dan Δ_4 positif terpenuhi. Sehingga terbukti Teorema 4 benar. ■

3.4 Analisis Bifurkasi

Bifurkasi merupakan fenomena terjadinya perubahan titik ekuilibrium dan perubahan kestabilan titik ekuilibrium, dikarenakan i^* merupakan polinomial berderajat tiga, maka akan ada kemungkinan akar positif lebih dari satu, maka perlu dilakukan pengecekan eksistensi i^* . Bifurkasi mundur adalah fenomena penyakit belum tentu menghilang dalam populasi meskipun $R_0 < 1$.

Dalam menentukan apakah bifurkasi mundur terjadi atau tidak pada model, perlu diketahui bagaimana eksistensi titik ekuilibrium endemik dari model. Diketahui persamaan polinomial i^* sebagai berikut:

$$a_0 i^{*3} + a_1 i^{*2} + a_2 i^* + a_3 = 0$$

dengan $a_0 = C\beta WYZ$, $a_1 = \beta AWYZ + CXWYZ + C\beta BYZ - \sigma\beta\mu CW$, $a_2 = XAWYZ + \beta ABYZ + CXBYZ - \sigma\beta\mu CB - \sigma\beta\mu AW - \sigma C\xi\mu W$, $a_3 = XABYZ(1 - R_0)$. Diperhatikan bahwa a_0 selalu positif dan a_3 negatif jika $R_0 > 1$, namun ketika $R_0 < 1$ a_3 menjadi positif. Untuk menentukan jumlah kemungkinan akar positif yang tepat, dapat menggunakan *Descartes rule of sign* yang tergantung pada tanda a_1 dan a_2 [17][18]. Sehingga diperoleh tabel dalam dua kasus, yaitu

Kasus 1: $R_0 > 1$

Tabel 2. Jumlah Akar Positif dari Persamaan Polinomial i^*

a_0	a_1	a_2	a_3	Perubahan Tanda Polinomial i^*	Jumlah Akar Positif
+	+	-	-	1	1
+	+	+	-	1	1
+	-	-	-	1	1
+	-	+	-	3	1 atau 3

Kasus 1: $R_0 < 1$

Tabel 3. Jumlah Akar Positif dari Persamaan Polinomial i^*

a_0	a_1	a_2	a_3	Perubahan Tanda Polinomial i^*	Jumlah Akar Positif
+	+	+	+	0	0
+	+	-	+	2	0 atau 2
+	-	+	+	2	0 atau 2
+	-	-	+	2	0 atau 2

Jika pada persamaan polinomial i^* terjadi perubahan tanda pada saat $R_0 < 1$, dan terdapat dua akar positif. Akibatnya ada dua titik ekuilibrium endemik saat $R_0 < 1$, sehingga bifurkasi mundur terjadi. Untuk memeriksa fenomena bifurkasi mundur, dicari nilai kritis dari R_0 yang dilambangkan dengan R_0^c . Bifurkasi mundur terjadi ketika R_0^c ada [19]. Untuk memperoleh nilai R_0^c akan dicari titik optimum dari persamaan polinomial i^* kemudian mensubstitusikan hasilnya

ke dalam persamaan $a_0 i^{*3} + a_1 i^{*2} + a_2 i^* + a_3 = 0$ [20]. Misalkan $p(i^*) = a_0 i^{*3} + a_1 i^{*2} + a_2 i^* + a_3$, untuk mencari titik optimum dari persamaan $p(i^*)$ dilakukan penurunan fungsi persamaan $p(i^*)$ terhadap i^* , sehingga

$$3a_0 i^{*2} + 2a_1 i^* + a_2 = 0 \Leftrightarrow i_1^* = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{3a_0} \text{ dan } i_2^* = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{3a_0}.$$

Substitusi i_1^* ke dalam persamaan $p(i^*) = 0$ diperoleh

$$a_3 = \frac{(a_1 + \sqrt{a_1^2 - 3a_0 a_2})(5a_1 \sqrt{a_1^2 - 3a_0 a_2} - 12a_0 a_2 + 5a_1^2)}{27a_0^2}.$$

Karena $a_3 = XABYZ(1 - R_0)$ maka $R_0 = 1 - \frac{(a_1 + \sqrt{a_1^2 - 3a_0 a_2})(5a_1 \sqrt{a_1^2 - 3a_0 a_2} - 12a_0 a_2 + 5a_1^2)}{27a_0^2 XABYZ}$.

Substitusi i_2^* ke dalam persamaan $p(i^*) = 0$

$$a_3 = \frac{(-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 3a_0 a_2})(5a_1 \sqrt{a_1^2 - 3a_0 a_2} + 12a_0 a_2 - 5a_1^2)}{27a_0^2}.$$

Karena $a_3 = XABYZ(1 - R_0)$ maka $R_0 = 1 - \frac{(-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 3a_0 a_2})(5a_1 \sqrt{a_1^2 - 3a_0 a_2} + 12a_0 a_2 - 5a_1^2)}{27a_0^2 XABYZ}$.

Karena $R_0 = R_0^c$ [20], sehingga diperoleh penyelesaian untuk nilai kritis dari R_0^c , yaitu

$$R_0^c = 1 - \frac{(\pm a_1 + \sqrt{a_1^2 - 3a_0 a_2})(5a_1 \sqrt{a_1^2 - 3a_0 a_2} \pm 12a_0 a_2 \pm 5a_1^2)}{27a_0^2 XABYZ}.$$

Jadi bifurkasi mundur benar terjadi untuk nilai $R_0 < 1$, sehingga persamaan bifurkasi mundur, yaitu $R_0^c < R_0 < 1$. Akibat dari persamaan bifurkasi mundur yaitu pada saat $R_0 < 1$ titik ekuilibrium bebas penyakit stabil dan karena terdapat dua titik ekuilibrium endemik, pada saat $R_0^c < R_0 < 1$ satu titik ekuilibrium endemik stabil, dan satu titik ekuilibrium lainnya stabil pada saat $R_0 > 1$ [19][21]. Artinya penyakit akan tetap ada dalam populasi pada saat $R_0 > 1$ dan $R_0^c < R_0 < 1$, penyakit menghilang dari populasi pada saat $R_0 < 1$.

3.5 Simulasi Numerik

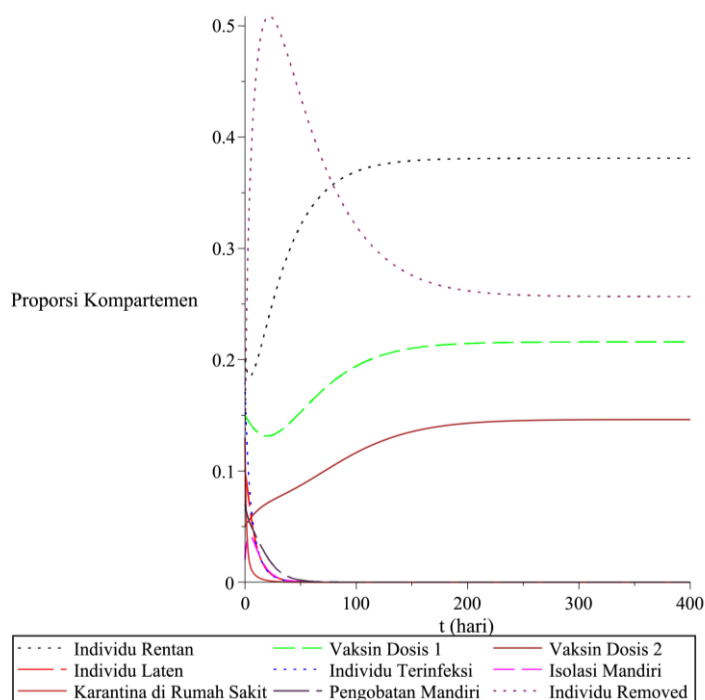
Simulasi numerik dari model matematika COVID-19 dengan vaksinasi dua tahap, karantina, dan pengobatan mandiri dilakukan menggunakan bantuan *Maple 2021* dengan parameter-parameter yang ditampilkan pada Tabel 4 berikut.

Tabel 4. Nilai-Nilai Parameter Simulasi Bebas Penyakit

Parameter	Nilai	Satuan	Referensi
μ	0.0125	$\frac{1}{\text{hari}}$	[9]
β	0.4215	$\frac{1}{\text{hari}}$	[22]

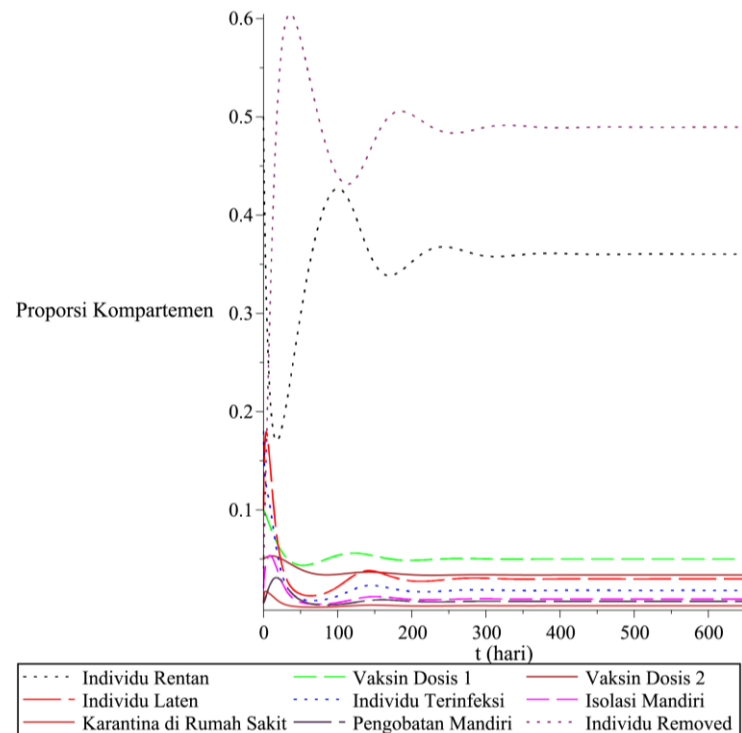
Parameter	Nilai	Satuan	Referensi
ξ	0.0203	$\frac{1}{\text{hari}}$	[23]
ε	0.653		[24]
ω	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{\text{hari}}$	Asumsi
τ_1	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{\text{hari}}$	Asumsi
τ_2	$\frac{1}{90}$	$\frac{1}{\text{hari}}$	Asumsi
ρ	0.653		[24]
φ	0,0336	$\frac{1}{\text{hari}}$	[10]
σ	0.196	$\frac{1}{\text{hari}}$	[5]
θ_1	0.10	$\frac{1}{\text{hari}}$	[23]
θ_2	0.11	$\frac{1}{\text{hari}}$	[23]
α	0,0833	$\frac{1}{\text{hari}}$	[25]
γ_1	0.1	$\frac{1}{\text{hari}}$	[25]
γ_2	0.8198	$\frac{1}{\text{hari}}$	[25]
γ_3	0,1	$\frac{1}{\text{hari}}$	[25]
γ_4	0.1	$\frac{1}{\text{hari}}$	[25]

Substitusi nilai parameter pada Tabel 4 ke Persamaan (3) diperoleh $R_0 = 0,5569881789$. Titik ekuilibrium bebas penyakit dari sistem (3) adalah $E_0(s, v_1, v_2, e, i, q_1, q_2, m) = (0,3810975610, 0,2159679498, 0,1462416992, 0, 0, 0, 0, 0)$. Menggunakan nilai awal $s(0) = 0,2, v_1(0) = 0,15, v_2(0) = 0,05, e(0) = 0,1, i(0) = 0,18, q_1(0) = 0,02, q_2(0) = 0,13, m(0) = 0,07$ dan $r(0) = 0,1$ diperoleh simulasi pada Gambar 2.



Gambar 2. Simulasi Sistem (3) Menuju Titik Ekuilibrium Endemik Penyakit E_0

Selanjutnya dilakukan simulasi numerik untuk $R_0 > 1$. Berdasarkan Tabel 4, jika nilai parameter β diperbesar menjadi 0,95, dan nilai parameter ξ diperkecil menjadi 0,005 maka diperoleh bilangan reproduksi dasar dari sistem (3) adalah $R_0 = 2,133300428$. Diperoleh titik ekuilibrium endemik dari sistem (3) adalah $E_1 = (s^*, v_1^*, v_2^*, e^*, i^*, q_1^*, q_2^*, m^*) = (0,3603346720, 0,04998306801, 0,03377738223, 0,02977318072, 0,0180947082907757, 0,009241424050, 0,002391466913, 0,006842761099)$. Dengan nilai awal $s(0) = 0,5, v_1(0) = 0,1, v_2(0) = 0,05, e(0) = 0,1, i(0) = 0,18, q_1(0) = 0,02, q_2(0) = 0,005, m(0) = 0,005$ dan $r(0) = 0,04$ diperoleh simulasi pada Gambar 3.



Gambar 3. Simulasi Sistem (3) Menuju Titik Ekuilibrium Endemik Penyakit E_1

3.6 Analisis Sensitivitas

Untuk menentukan intervensi yang optimal dalam menekan jumlah individu terinfeksi, perlu mengidentifikasi faktor-faktor yang berpengaruh terhadap penularan COVID-19. Indeks sensitivitas dapat digunakan untuk mengidentifikasi parameter yang memiliki pengaruh paling signifikan terhadap R_0 . Parameter dengan pengaruh yang tinggi pada R_0 menunjukkan bahwa parameter tersebut memiliki pengaruh yang dominan terhadap penyebaran COVID-19. Indeks sensitivitas dapat dihitung dengan menurunkan persamaan R_0 terhadap parameter p , dimana p adalah parameter yang akan dihitung indeks sensitivitasnya, sebagai berikut [26].

$$C_p^{R_0} = \frac{\partial R_0}{\partial p} \times \frac{p}{R_0}$$

Secara lengkap indeks sensitivitas seluruh parameter yang berkaitan dengan R_0 ditampilkan pada Tabel 5.

Tabel 5. Indeks Sensitivitas Parameter

Parameter	Indeks Sensitivitas
β	+0,8406361523
ξ	-0,6048957636
μ	+0,4118240264
ρ	-0,3661405827
θ_2	-0,3410852716
θ_1	-0,3100775197

Parameter	Indeks Sensitivitas
γ_3	-0,3100775197
τ_2	+0,1453571727
φ	-0,09260100430
σ	+0,05995203831
ω	+0,04160384011
ε	+0,01524545628
τ_1	+0,01400667539

Selanjutnya dilakukan simulasi numerik untuk melihat pengaruh beberapa parameter yang menggambarkan penyebaran COVID-19 menggunakan beberapa nilai yang berbeda.

1) Pengaruh Vaksinasi

Dengan mengubah nilai parameter ξ (laju perpindahan individu rentan menjadi vaksinasi dosis satu) dapat diketahui efektivitas penggunaan vaksinasi yang ditampilkan pada Tabel 6.

Tabel 6. Pengaruh Laju Vaksinasi

ξ	R_0	Kondisi i
0,0001	1,429728722	Menjadi endemik dan stabil pada hari ke-900
0,001	1,335253837	Menjadi endemik dan stabil pada hari ke-800
0,01	0,8061944881	Penyakit menghilang pada hari ke-80
0,1	0,1713232693	Penyakit menghilang pada hari ke-45

2) Pengaruh Karantina

Dengan mengubah nilai parameter θ_1 (laju perpindahan individu terinfeksi menjadi isolasi mandiri) dan θ_2 (laju perpindahan individu terinfeksi menjadi karantina di rumah sakit) secara bersamaan dapat diketahui efektivitas karantina yang ditampilkan pada Tabel 7

Tabel 7. Pengaruh Laju Karantina

θ_1	θ_2	R_0	Kondisi i
0,005	0,005	1,466356634	Menjadi endemik dan stabil pada hari ke-400
0,01	0,01	1,355688209	Menjadi endemik dan stabil pada hari ke-350
0,06	0,06	0,7725965062	Penyakit menghilang pada hari ke-90
0,7	0,7	0,1187627687	Penyakit menghilang pada hari ke-25

4 Simpulan

Model matematika COVID-19 dengan vaksinasi dua tahap, karantina, dan pengobatan mandiri dibentuk dengan membagi populasi menjadi tujuh sub-populasi yaitu *susceptible* (rentan), *vaccination* (vaksinasi), *exposed* (laten), *infected* (terinfeksi), *quarantine*

(isolasi/karantina), *medication* (pengobatan mandiri), *removed* (sembuh atau meninggal akibat penyakit) dan membagi kompartemen vaksinasi menjadi dua yaitu vaksinasi dosis satu dan vaksinasi dosis dua, serta membagi kompartemen karantina menjadi dua yaitu isolasi mandiri dan karantina di rumah sakit.

Model yang dibentuk memiliki titik ekuilibrium bebas penyakit $E_0(s, v_1, v_2, e, i, q_1, q_2, m) = \left(\frac{\mu}{(\xi+\mu)}, \frac{\xi\mu}{(\xi+\mu)(\varepsilon\omega+\mu)}, \frac{\varepsilon\omega\xi\mu}{(\xi+\mu)(\varepsilon\omega+\mu)(\rho\varphi+\mu)}, 0, 0, 0, 0, 0 \right)$ dan titik ekuilibrium endemik penyakit $E_1(s^*, v_1^*, v_2^*, e^*, i^*, q_1^*, q_2^*, m^*)$ yang ada jika $R_0 > 1$. Titik ekuilibrium bebas penyakit stabil asimtotik lokal jika $R_0 < 1$. Eksistensi titik ekuilibrium endemik terdapat satu atau tiga akar positif jika $R_0 > 1$ dan terdapat nol atau dua akar positif jika $R_0 < 1$. Bifurkasi mundur terjadi pada kondisi $R_0 < 1$ sehingga diperoleh $R_c < R_0 < 1$. Berdasarkan hasil simulasi numerik disimpulkan penyakit akan menghilang pada populasi jika $R_0 < 1$, dan akan menetap pada populasi jika $R_0 > 1$. Dari hasil analisis sensitivitas diperoleh beberapa parameter yang paling berpengaruh secara signifikan yaitu penggunaan vaksinasi, karantina.

5 Ucapan Terima Kasih

Kami mengucapkan terima kasih kepada Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, dan Pusat Penelitian dan Penerbitan UIN Syarif Hidayatullah Jakarta atas dukungan spritual dan materilnya.

6 Daftar Pustaka

- [1] H. A. Diah Handayani, Dwi Rendra Hadi, Fathiyah Isbaniah, Erlina Burhan, "Penyakit Virus Corona 2019," *JURNAL RESPIROLOGI INDONESIA*, vol. 40, no. 3, pp. 119–129, 2020.
- [2] M. Jayaweera, H. Perera, B. Gunawardana, and J. Manatunge, "Transmission of COVID-19 virus by droplets and aerosols: A critical review on the unresolved dichotomy," *Environ Res*, vol. 188, no. June, 2020, doi: 10.1016/j.envres.2020.109819.
- [3] Satgascovid-19, "Strategi Pemerintah untuk Mengatasi Covid-19." <https://covid-19.go.id/p/berita/empat-strategi-pemerintah-atasi-covif-19> (accessed Oct. 27, 2021).
- [4] Fathiyah Isbaniah and Agus Dwi Susanto, "Pneumonia Corona Virus Infection Disease-19 (COVID-19)," *Journal Of The Indonesian Medical Association*, vol. 70, no. 4, pp. 87–94, 2020, doi: 10.47830/jinma-vol.70.4-2020-235.

-
- [5] A. B. Gumel, E. A. Iboi, C. N. Ngonghala, and E. H. Elbasha, “A primer on using mathematics to understand COVID-19 dynamics : Modeling , analysis and simulations,” *Infect Dis Model*, vol. 6, no. August 2020, pp. 148–168, 2021, doi: 10.1016/j.idm.2020.11.005.
- [6] D. Dwomoh *et al.*, “Mathematical modeling of COVID-19 infection dynamics in Ghana : Impact evaluation of integrated government and individual level interventions,” *Infectious Disease Modelling*, vol. 6, pp. 381–397, 2021, doi: 10.1016/j.idm.2021.01.008.
- [7] B. Kumar, A. Kumar, Y. Shankar, and B. Kumar, “COVID-19 created chaos across the globe : Three novel quarantine epidemic models Chaos , Solitons and Fractals COVID-19 created chaos across the globe : Three novel quarantine epidemic models,” *Chaos, Solitons and Fractals: the interdisciplinary journal of Nonlinear Science, and Nonequilibrium and Complex Phenomena*, vol. 138, no. May, p. 109928, 2020, doi: 10.1016/j.chaos.2020.109928.
- [8] M. Ali, M. Imran, and A. Khan, “Analysis and prediction of the COVID-19 outbreak in Pakistan,” *Journal of Biological Dynamics*, vol. 14, no. 1, pp. 730–747, 2020, doi: 10.1080/17513758.2020.1814883.
- [9] M. Manaqib, I. Fauziah, and E. Hartati, “Model matematika penyebaran COVID-19 dengan penggunaan masker kesehatan dan karantina,” *Jambura Journal of Biomathematics (JJBm)*, vol. 2, no. 2, pp. 68–79, Oct. 2021, doi: 10.34312/jjbm.v2i2.10483.
- [10] R. R. Musafir, A. Suryanto, and I. Darti, “Dynamics of COVID-19 Epidemic Model with Asymptomatic Infection , Quarantine , Protection and Vaccination,” vol. 4, no. 2, pp. 106–124, 2021, doi: 10.5614/cbms.2021.4.2.3.
- [11] D. Otoo, P. Opoku, S. Charles, and A. Prince, “Deterministic epidemic model for (SVC Sy C Asy IR) pneumonia dynamics , with vaccination and temporal immunity *,” *Infect Dis Model*, vol. 5, pp. 42–60, 2020, doi: 10.1016/j.idm.2019.11.001.
- [12] S. Wiggins, *Introductions to Applied Nonlinear Dynamics Systems and Chaos*, 2nd ed. New York: Springer, 2000.
- [13] F. Xia, X. Yang, R. A. Cheke, and Y. Xiao, “Quantifying competitive advantages of mutant strains in a population involving importation and mass vaccination rollout,” *Infectious Disease Modelling*, vol. 6, pp. 988–996, 2021, doi: 10.1016/j.idm.2021.08.001.
- [14] M. Martcheva, *An Introduction to Mathematical Epidemiology*. New York: Springer, 2010.

-
- [15] Boyce, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, 11th ed. New York: John Wiley & Sons, 2009.
- [16] A. Aslah and M. Daud, "A Note on Lienard-Chipart Criteria and its Application to Epidemic Models," vol. 9, no. 1, pp. 41–45, 2021, doi: 10.13189/ms.2021.090107.
- [17] A. K. Saha and C. N. Podder, "Dynamics of novel COVID-19 in the presence of Co-morbidity," vol. 7, pp. 138–160, 2022, doi: 10.1016/j.idm.2022.04.005.
- [18] D. Aldila, A. Islamilova, S. H. A. Khoshnaw, and B. D. Handari, "Forward Bifurcation with Hysteresis Phenomena from Atherosclerosis Mathematical Model," vol. 4, no. 2, pp. 125–137, 2021, doi: 10.5614/cbms.2021.4.2.4.
- [19] R. Anguelov, S. M. Garba, and S. Usaini, "Backward bifurcation analysis of epidemiological model with partial immunity," *Computers and Mathematics with Applications*, vol. 68, no. 9, pp. 931–940, 2014, doi: 10.1016/j.camwa.2014.06.010.
- [20] M. Rohmawati, "Backwad Bifurcation Analysis and Numerical Solution of Infectious Disease Transmission Models with Partial Immunity," Sepuluh Nopember Institute of Technology, 2015.
- [21] M. A. Safi and A. B. Gumel, "Mathematical analysis of a disease transmission model with quarantine , isolation and an imperfect vaccine," *Computers and Mathematics with Applications*, vol. 61, no. 10, pp. 3044–3070, 2011, doi: 10.1016/j.camwa.2011.03.095.
- [22] N. Nuraini, K. K. Sukandar, P. Hadisoemarto, H. Susanto, and A. I. Hasan, "Mathematical models for assessing vaccination scenarios in several provinces in Indonesia," *Infect Dis Model*, vol. 6, pp. 1236–1258, 2021, doi: 10.1016/j.idm.2021.09.002.
- [23] M. Zevika, A. Triska, N. Nuraini, and G. L. Jr, "On The Study of Covid-19 Transmission Using Deterministic and Stochastic Models with Vaccination Treatment and Quarantine," vol. 5, no. 1, pp. 1–19, 2022, doi: 10.5614/cbms.2022.5.1.1.
- [24] R. R. Musafir, A. Suryanto, and I. Darti, "Dynamics of COVID-19 Epidemic Model with Asymptomatic Infection, Quarantine, Protection and Vaccination," *Communication in Biomathematical Sciences*, vol. 4, no. 2, pp. 106–124, Dec. 2021, doi: 10.5614/cbms.2021.4.2.3.
- [25] B. Yong, J. Hoseana, and L. Owen, "From pandemic to a new normal : Strategies to optimise governmental interventions in Indonesia based on an SVEIQHR-type mathematical model," *Infect Dis Model*, vol. 7, no. 3, pp. 346–363, 2022, doi: 10.1016/j.idm.2022.06.004.

- [26] L. Yahya, "Sensitivity Analysis of Mathematical Model of Coronavirus Disease (COVID-19) Transmission," vol. 6, no. 2, pp. 91–99, 2020.