Limits: Journal of Mathematics and Its Applications
E-ISSN: 2579-8936
P-ISSN: 1829-605X
Vol. 20, No. 1, Maret 2023, 107-112
DOI: http://dx.doi.org/10.12962/limits.v20i1.14318

Eksistensi Invers Moore Penrose Diperumum Elemen Normal Diperumum pada Ring dengan Involusi

Titi Udjiani SRRM*, Nikken Prima Puspita, Suryoto
[1,2,3]Departemen Matematika Universitas Diponegoro Semarang Indonesia
e-mail: udjianititi@lecturer.undip.ac.id, nikkenprima@lecturer.undip.ac.id
suryoto@lecturer.undip.ac.id

Diajukan: 4 September 2022, Diperbaiki: 29 Januari 2023, Diterima: 6 Maret 2023

Abstrak

Invers Moore Penrose Elemen Normal pada Ring dengan involusi telah dibahas oleh beberapa peneliti. Dengan memperumum konsep invers Moore Penrose menjadi invers Moore Penrose diperumum, sifat elemen Invers Moore Penrose Diperumum dari Elemen Normal juga telah diperoleh. Selain memperumum konsep invers Moore Penrose, definisi elemen normal juga telah diperumum dengan memperumum pangkat 1 menjadi pangkat $n \in \mathbb{N}$. Diperoleh bahwa irisan antara himpunan elemen Normal diperumum dan himpunan elemen yang mempunyai Invers Moore Penrose Diperumum tidak kosong. Hal ini mengindikasikan ada sifat bersama yang dimiliki oleh keduanya, sehingga tulisan ini bertujuan membangun syarat perlu dan cukup suatu elemen normal diperumum mempunyai invers Moore Penrose diperumum dengan menggunakan sifat2 tersebut. Metode yang dilakukan adalah dengan mencari kesamaan sifat yang dimiliki oleh elemen normal diperumum dan elemen yang mempunyai invers Moore Penrose diperumum. Langkah selanjutnya adalah menggunakan sifat involusi untuk memperoleh hasil akhir. Pendekatan yang dilakukan selain melalui invers Moore Penrose Diperumum, juga melalui invers grup
Kata Kunci: Grup, Moore Penrose, Normal.

Abstract

The Moore Penrose inverse of normal element in ring with involution have been discussed by several researchers. By generalizing concept of Moore Penrose inverse to the generalized Moore Penrose inverse, the element properties of the generalized Moore Penrose inverse of normal elements have also been obtained. In addition to generalizing the concept of Moore Penrose inverse, the definition of the normal element has also been generalized by generalizing the power of 1 to $n \in N$. It is found that intersection between set of generalized normal element and set of generalized Moore Penrose inverse element is not empty. This indicates that both of them have common properties, so this paper aims is to build the necessary and sufficient conditions for a generalized normal element to have a generalized Moore Penrose inverse using these properties. The method used is to look for the similarity of properties possessed by a generalized normal element and element that has generalized Moore Penrose inverse. The next step is to use the involution properties to obtain the final result. The approach taken is not only through the generalized Moore Penrose inverse, but also group inverse.
***Keywords**: Group, Moore Penrose, Normal.*

1 Pendahuluan

Menurut [1] dan [2] operasi transpose pada himpunan matriks memiliki sifat berikut :

$$(A^T)^T = A$$

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

dengan $A, B \in M_{mxn}(\mathbb{R})$ dan operasi penjumalahan dan perkalian matriks A adan B dipenuhi. Dengan membatasi pembahasan operasi transpose hanya pada $M_{nxn}(\mathbb{R})$, selanjutnya [3] memperluas definsi operasi transpose dengan mendefinisikan operasi involusi pada struktur aljabar ring R . Diketahui R adalah ring dengan elemen satuan dan $a \in R$. Suatu operasi involusi "$*$" pada ring R adalah fungsi $*: a \in R \mapsto *(a) = a^* \in R$ yang memenuhi $(a^*)^* = a$, $(a+b)^* = a^* + b^*$ dan $(ab)^* = b^* a^*$ untuk setiap element a, b di R.

Diperoleh fenomena bahwa jika $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2x2}(\mathbb{R})$, maka $A^T A \neq AA^T$. Akan tetapi jika ditambahkan syarat bahwa $b = c$, maka $A^T A = AA^T$. Fenomena ini oleh [4] diperumum pada ring R dengan elemen satuan yang dilengkapi involusi " $*$ ", dengan membangun konsep elemen normal. Diberikan ring R dengan involusi "$*$". Elemen $a \in R$ disebut elemen normal, jika a komutatif dengan a^*. Himpunan semua elemen normal in R disimbolkan dengan R^{nor}.

Invers Moore Penrose Diperumum dari elemen normal suatu ring sudah dibahas oleh [5] Dalam perkembangannya, dengan menggunakan definisi elemen normal diperoleh $aaa^* = a^*aa$. Hal ini memotivasi [6] untuk memperumum definisi elemen normal. Elemen a anggota ring R yang dilengkapi involusi "$*$" disebut elemen normal diperumum, jika $a^* a^n = a^n a^*$, $n \in \mathbb{N}$. Himpunan semua elemen normal diperumum di R ditulis R^{gnor}.

Pada ring R yang dilengkapi involusi "$*$" juga dibahas konsep invers Moore Penrose oleh [7]. Dengan mengabaikan syarat ternormalisasi yang dimiliki oleh invers Moore Penrose, selanjutnya konsep invers Moore Penrose oleh [5] dapat diperumum. Diberikan ring R dengan involusi "$*$". Elemen $a \in R$ dikatakan mempunyai invers Moore Penrose diperumum jika dapat ditemukan elemen $b \in R$ yang memenuhi :

$$aba = a,\ (ab)^* = ab,\ (ba)^* = ba. \tag{1}$$

Elemen b yang memenuhi Persamaan (1) disebut invers Moore Penrose diperumum dari a. Simbol a_g^+ dan R_g^+ berturut turut adalah invers Moore Penrose diperumum dari a dan himpunan elemen di R yang mempunyai invers Moore Penrose diperumum. Jika $a \in R$ mempunyai invers Moore Penrose diperumum, maka a_g^+ tidak selalu tunggal. Diperoleh bahwa $a_g^+ = a_g^+ a a_g^+$ atau $a_g^+ \neq a_g^+ a a_g^+$. Himpunan invers Moore Penrose diperumum dari $a \in R$ disimbolkan dengan $(a_g^+)^-$.

Sifat invers Moore Penrose dari elemen normal element sudah dibahas oleh [4] . Selanjutnya [5] telah membahas sifat invers Moore Penrose diperumum pada elemen normal. Tulisan ini mendiskusikan sifat invers Moore Penrose diperumum untuk elemen normal diperumum pada ring dengan elemen satuan yang dilengkapi dengan involusi "$*$".

2 Metode Penelitian

Metode yang dilakukan dengan mempelajari semua sifat sifat utama yang dimiliki ring, ring dengan elemen satuan, involusi, invers Moore Penrose, invers grup dan elemen normal. Mempelajari dan memperoleh pemahaman dari motivasi untuk memperumum invers Moore Penrose dan elemen normal. Menyelidiki apakah ada sifat yang dimiliki bersama antara elemen normal diperumum dan elemen yang mempunyai invers Moore Penrose diperumum, dengan menunjukkan bahwa irisan dari himpunan elemen normal diperumum dan elemen yang mempunyai invers Moore Penrose diperumum tidak kosong. Pada penyelidikan selanjutnya diperoleh bahwa tidak setiap elemen normal diperumum mempunyai invers Moore Penrose diperumum. Menggunakan kesamaan sifat yang sudah diperoleh dan sifat involusi, dibangun syarat perlu dan cukup elemen normal diperumum mempunyai invers Moore Penrose diperumum. Langkah yang sama dilakukan melalui pendekatan invers grup.

3 Hasil dan Pembahasan

Tidak setiap elemen suatu ring mempunyai invers Moore Penrose diperumum, sebagai contoh pada ring $\mathbb{Z}_8$ terhadap operasi perkalian bilangan bulat modulo 8 yang dilengkapi involusi identitas. Element $\bar{0}$, $\bar{1}$, $\bar{3}$, $\bar{5}$, $\bar{7} \in (\mathbb{Z}_8)_g^+$, tetapi $\bar{2}$, $\bar{4}$, $\bar{6} \notin (\mathbb{Z}_8)_g^+$. Teorema 1 berikut ini menjelaskan sifat dari a_g^+ jika $a \in R_g^+$, yang sudah dibahas oleh [8].

Teorema 1 : *Jika $a \in R_g^+$, maka*

1. $(a^*)_g^+ a^* (a^*)_g^+ = (a_g^+ a a_g^+)^*$ untuk setiap $a_g^+ \in \left(a_g^+\right)^-$ dan $(a^*)_g^+ \in \left((a^*)_g^+\right)^-$.
2. $(a^*a)_g^+ a^* a (a^*a)_g^+ = a_g^+ \, (a_g^+ a a_g^+)^*$ dan $(aa^*)_g^+ a a^* (aa^*)_g^+ = (a_g^+ a a_g^+)^* a_g^+$ untuk setiap $a_g^+ \in \left(a_g^+\right)^-$, $(aa^*)_g^+ \in \left((aa^*)_g^+\right)^-$ dan $(a^*a)_g^+ \in \left((a^*a)_g^+\right)^-$.
3. $a^* = a^* a a_g^+ = a_g^+ a a^*$ untuk setiap $a_g^+ \in \left(a_g^+\right)^-$.
4. $a_g^+ a a_g^+ = (a^*a)_g^+ a^* a (a^*a)_g^+ a^* = a^* (aa^*)_g^+ a a^* (aa^*)_g^+$ untuk setiap $a_g^+ \in \left(a_g^+\right)^-$, $(aa^*)_g^+ \in \left((aa^*)_g^+\right)^-$ dan $(a^*a)_g^+ \in \left((a^*a)_g^+\right)^-$.
5. $(a^*)_g^+ a^* (a^*)_g^+ = a (a^*a)_g^+ a^* a (a^*a)_g^+ = (aa^*)_g^+ a a^* (aa^*)_g^+ a$ untuk setiap $(a^*)_g^+ \in \left((a^*)_g^+\right)^-$, $(aa^*)_g^+ \in \left((aa^*)_g^+\right)^-$ dan $(a^*a)_g^+ \in \left((a^*a)_g^+\right)^-$.

6. $(a_g^+ a a_g^+)_g^+ = a$ untuk setiap $a_g^+ \in \left(a_g^+\right)^-$.

Dengan menggunakan sifat komutatif dari elemen normal dan sifat yang dimiliki involusi, diperoleh sifat elemen normal diperumum sebagai berikut :

Lema 2 : Jika $a \in R^{gnor}$ dan $n \in \mathbb{N}$, maka a^n komutatif dengan a^*a dan aa^*. Demikian juga $(a^*)^n$ komutatif dengan a^*a dan aa^*.

Bukti : Oleh karena $a \in R^{gnor}$, maka $a^n a^* a = a^* a^n\, a = a^* a a^n$ dan $a^n a a^* = a a^n a^* = a a^* a^n$. Selanjutnya

$$(a^*)^n\, a = (a^*)^n\, (a^*)^* = (a^* a^n)^* = \ (a^n a^*)^* = (a^*)^* (a^*)^n = a(a^*)^n \tag{2}$$

Dan

$$(a^*)^n\, a^* = (a a^n)^* = (a^n a)^* = a^* (a^*)^n \tag{3}$$

Menggunakan Persamaan (2) dan (3), diperoleh

$$(a^*)^n\, a^* a \ = \ a^* (a^*)^n a = a^* a (a^*)^n \text{ dan } \ (a^*)^n\, a a^* \ = \ a (a^*)^n a^* = a a^* (a^*)^n.$$

Berikutnya [9] membahas konsep invers grup elemen suatu ring sebagai berikut :

Definisi 3 : Diketahui R adalah ring dengan elemen identitas dan $a \in R$. Invers grup dari $a \in R$ adalah elemen $a^\# \in R$ yang memenuhi

$$a a^\# a = a, \qquad a^\# a a^\# = a^\#, \qquad a a^\# = a^\# a.$$

Tidak semua elemen di ring mempunyai invers grup. Himpunan semua elemen di R yang mempunyai invers grup dinotasikan dengan $R^\#$.

Diperoleh bahwa $R_g^+ \cap R^\# \neq \emptyset$. Sebagai contoh $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in (M_{2\text{x}2}(\mathbb{R}))_g^+ \cap \left(M_{2\text{x}2}(\mathbb{R})\right)^\#$ dengan involusi $M_{2\text{x}2}(\mathbb{R})$ adalah operasi transpose. Oleh karenanya sifat sifat elemen normal diperumum yang dibahas dalam tulisan ini dibatasi pada himpunan $R_g^+ \cap R^\#$. Fenomena yang terjadi pada himpunan $R_g^+ \cap R^\#$ menjelaskan bahwa tidak setiap elemen merupakan elemen normal diperumum. Pada himpunan matriks $M_{2\text{x}2}(\mathbb{R})$ dengan involusi transpose, elemen $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in (M_{2\text{x}2}(\mathbb{R}))_g^+ \cap (M_{2\text{x}2}(\mathbb{R}))^\#$ merupakan elemen normal diperumum, sementara $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in (M_{2\text{x}2}(\mathbb{R}))_g^+ \cap (M_{2\text{x}2}(\mathbb{R}))^\#$ bukan elemen normal diperumum. Dimotivasi oleh fenomena bahwa$R_g^+ \cap R^\# \neq \emptyset$, Teorema 4 berikut ini membahas syarat perlu dan cukup elemen di $R_g^+ \cap R^\#$ merupakan elemen normal diperumum.

Teorema 4 : Diketahui $a \in R_g^+ \cap R^\#$ dan $n \in \mathbb{N}$. Elemen $a \in R^{gnor}$ jika dan hanya jika $a^n a_g^+ = a_g^+ a^n$ dan $(a^*)^n a_g^+ a a_g^+ = a_g^+ a a_g^+ (a^*)^n$ untuk setiap $a_g^+ \in \left(a_g^+\right)^-$.

Bukti : Menggunakan Lema 2 , jika $a \in R_g^+ \cap R^\# \cap R^{gnor}$ maka diperoleh

$$a^n a_g^+ (a_g^+ a a_g^+)^* = a_g^+ (a_g^+ a a_g^+)^* a^n$$

Dan

$$(a^*)^n a_g^+ (a_g^+ a a_g^+)^* = a_g^+ \, (a_g^+ a a_g^+)^* (a^*)^n$$

untuk setiap $a_g^+ \in \left(a_g^+\right)^-$. Sehingga untuk setiap $a_g^+ \in \left(a_g^+\right)^-$ diperoleh

$$a^n a_g^+ = a^n a_g^+ a a_g^+ = a^n a_g^+ \left(a a_g^+\right)^* = a^n a_g^+ (a_g^+ a a_g^+)^* a^* = a_g^+ a a_g^+ a^n = a_g^+ \, a^n$$

dan

$$(a^*)^n a_g^+ a a_g^+ = (a^*)^n a_g^+ (a a_g^+)^* = (a^*)^n a_g^+ (a_g^+ a a_g^+)^* a^* = a_g^+ a a_g^+ (a^*)^n$$

Disisi lain jika $a^n a_g^+ = a_g^+ a^n$ dan $(a^*)^n a_g^+ a a_g^+ = a_g^+ a a_g^+ (a^*)^n$ untuk setiap $a_g^+ \in \left(a_g^+\right)^-$, maka $aa^\# = (aa^\#)^n$=$(a a_g^+ a)^n (a^\#)^n = a^n a_g^+ a (a^\#)^n = a_g^+ a^n a (a^\#)^n = a_g^+ a$. Akibatnya $a^\# = a_g^+ a a_g^+$ untuk setiap $a_g^+ \in \left(a_g^+\right)^-$. Berikutnya, karena $a^\# a = aa^\#$ diperoleh $a a_g^+ = a_g^+ a$ untuk setiap $a_g^+ \in \left(a_g^+\right)^-$ dan $(a^*)^n a = \ a^* (a^*)^{n-1} a = \ a^* (a^*)^{n-1} (a a_g^+ a)^* = a (a^*)^n$. Menggunakan sifat involusi dihasilkan $a^* a^n = ((a^*)^n a)^*$= $(a(a^*)^n)^*$= $a^n a^*$.

Berdasarkan Teorema 4 , diperoleh akibat sebagai berikut :

Akibat 5 : Diketahui $a \in R_g^+ \cap R^\#$ dan $n \in \mathbb{N}$. Jika $a \in R^{gnor}$, maka $a^\# = a_g^+ a a_g^+$ untuk setiap $a_g^+ \in \left(a_g^+\right)^-$

Bukti : Menurut Teorema 4, jika $a \in R_g^+ \cap R^\# \cap R^{gnor}$, maka $a^n a_g^+ = a_g^+ a^n$ untuk setiap $a_g^+ \in \left(a_g^+\right)^-$. So $aa^\# = (aa^\#)^n = (a a_g^+ a)^n (a^\#)^n = a^n a_g^+ a (a^\#)^n = a_g^+ a^n a (a^\#)^n = a_g^+ a$. Diperoleh kesimpulan $a^\# = a_g^+ a a_g^+$ untuk setiap $a_g^+ \in \left(a_g^+\right)^-$.

Definisi elemen normal diperumum menjelaskan bahwa jika $a \in R^{gnor}$, maka $a^* a^n = a^n a^*$. Demikian juga jika $a \in R^\#$, maka $(a^\#)^n$ komutatif dengan elemen yang komutatif dengan a^n. Hal ini mengakibatkan dapat dibangunnya Lema 6 sebagai berikut :

Lema 6 : Jika $a \in R^{gnor} \cap R^\#$ dan $n \in \mathbb{N}$, maka $(a^\#)^n$ komutatif dengan a^*.

Bukti : Disebabkan oleh $a \in R^\#$ dan $x \in R$ komutatif dengan a^n, maka $x(a^\#)^n = x(a(a^\#)^2)^n = x a^n ((a^\#)^2)^n = \ ((a^\#)^2)^n x a^n = ((a^\#)^2)^n a^n x = (a^\#)^n x$

Diperoleh kesimpulan bahwa, jika $a \in R^\#$ dan $n \in \mathbb{N}$, maka $(a^\#)^n$ komutatif dengan elemen yang komutatif dengan a^n. Dilain pihak jika $a \in R^{gnor}$ dan $n \in \mathbb{N}$, maka $a^* a^n = a^n a^*$. Sehingga jika $a \in R^{gnor} \cap R^\#$ dan $n \in \mathbb{N}$, maka $(a^\#)^n$ komutatif with a^*.

4 Simpulan

Dari sifat dan fenomena operasi transpose pada himpunan matriks dapat dibangun konsep elemen normal dan elemen normal diperumum. Eksistensi suatu elemen normal diperumum mempunyai invers Moore Penrose diperumum dijelaskan pada Teorema 4, yaitu bahwa elemen normal tersebut dan involusinya harus komutatif dengan invers Moore Penrose diperumumnya.

5 Ucapan Terima Kasih

Terimakasih kepada Departemen Matematika Undip, teman teman dosen dan mahasiswa yang sudah berkontribusi baik secara langsung ataupun tidak langsung dalam penulisan paper ini.

6 Daftar Pustaka

[1] Jin Ho Kwak and Sung Pyo Hong, *Linear Algebra*. Berlin: Birkhauser, 1997.

[2] Gregory Hartman Ph.D., *Fundamentals of Matrix Algebra*, 3rd ed. United State License, 2001.

[3] A. N. Khan and S. Ali, “Involution on prime rings with endomorphisms,” *AIMS Mathematics*, 2020, vol. 5, no. 4, pp. 3274–3283, doi: 10.3934/math.2020210.

[4] W. Apairat, “Moore-Penrose Inverses and Normal Elements in Rings.” Thesis Prince of Songkla University, 2017.

[5] T. Udjiani, Harjito, Suryoto, and N. Prima P, “Generalized Moore Penrose Inverse of Normal Elements in a Ring with Involution,” in *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, Feb. 2018, vol. 300, no. 1. doi: 10.1088/1757-899X/300/1/012074.

[6] D. M. Mosi´c and D. S. Djordjevi´cdjordjevi´c, “New Characterizations of EP, Generalized Normal and Generalized Hermitian Elements in Rings.”, Applied Mathematics and Computation, 2012, vol. 218, Issue. 12, pp. 6702-6710

[7] A. Ben-Israel, “The Moore of Moore Penrose Inverse”, The Electronic Journal of Linear Algebra, 2002, vol. 9, pp. 150-157.

[8] T. Udjiani, B. Surodjo, and S. Wahyuni, “Generalized Moore Penrose Inverse in Rings with Involution,” ,Far East Journal of Mathematics Sciences, 2014, vol. 92. No. 1, pp. 29-40.

[9] D. Mosic, “On Jacobson’s Lemma and Cline’s Formula for Drazin Inverse ”, *Revista de la Union Matematica Argentina*, 2020, vol. 61, no. 2, pp. 267–276, doi: 10.33044/REVUMA.V61N2A05.