

SIFAT-SIFAT GRAF DALAM ALJABAR LINIER DAN PENGGUNAANNYA DALAM SAGE

Soleha

Jurusan Matematika, FMIPA ITS Surabaya

seha.07@matematika.its.ac.id

Abstrak

Pada paper ini dibahas penggunaan teknik aljabar linier untuk mempelajari graf. Sehingga dapat membentuk teorema mengenai graf. Dari suatu graf sederhana berhingga G dapat dibentuk matriks ketetanggaan A yang mencerminkan hubungan antar simpul dari graf tersebut. Selain itu, juga dapat dibentuk matriks ketetanggaan antara sisi-sisi dari graf yaitu A_L , matriks keterkaitan antara simpul dan sisi yaitu X . Dari matriks ketetanggaan tersebut, dilakukan analisis terhadap sifat-sifat yang ada pada graf. Pada paper ini dikaji sifat graf terkait nilai eigen dari graf teratur, graf Petersen dan graf garis beserta sifat-sifat yang lain. Selain itu, dalam paper ini akan dikaji keterkaitan antara nilai eigen matriks Laplacian (matriks Kirchhoff) dan matriks ketetanggaan dalam suatu graf G . Selanjutnya, akan diberikan proses pembuktian dari sifat-sifat tersebut terhadap beberapa contoh graf menggunakan Sage.

Katakunci: *Matriks ketetanggaan, Graf teratur, Graf Petersen, Graf garis, Matriks laplacian, Sage.*

1. Pendahuluan

Teori graf merupakan salah satu bagian dalam ilmu matematika. Sebuah graf G terdiri atas dua himpunan yaitu himpunan berhingga tak kosong $V(G)$ yang elemen-elemennya disebut simpul dan himpunan berhingga (mungkin kosong)

$E(G)$ yang elemen-elemennya disebut sisi. Apabila sisi v_i, v_j ada di $E(G)$, maka dapat dikatakan bahwa v_i dan v_j saling bertetangga. Simpul v_i dan v_j dapat dikatakan bertetangga apabila terdapat sisi yang menghubungkan v_i dan v_j serta sisi tersebut terkait dengan v_i dan v_j [1]. Aplikasi cabang ilmu lain dari matematika dalam Teori Graf antara lain Aljabar Linear. Dari teori aljabar linier tersebut dapat dibentuk suatu matriks ketetanggaan A dari suatu graf. Matriks ketetanggaan A merupakan matriks yang merepresentasikan ketetanggaan dari simpul-simpul yang terdapat pada suatu graf. Selain itu, dapat juga dibentuk matriks ketetanggaan antara sisi-sisi dari graf yaitu A_L , matriks keterkaitan antara simpul dan sisi yaitu X . Jika pada graf diberikan suatu orientasi, dapat dibentuk matriks keterkaitan antara simpul dan sisi dengan orientasi yang dikatakan sebagai matriks D . Lebih dari itu, dapat dibentuk matriks Laplacian (Kirchhoff) Q yang dibentuk dari A dan D . Salah satu permasalahan utama dari teori graf aljabar adalah menentukan sifat-sifat graf yang direfleksikan dari teknik aljabar linier menggunakan matriks-matriks di atas.

Pada paper ini akan dikaji beberapa lemma, proposisi dan teorema dalam [2] terkait sifat-sifat tersebut dan dalam paper ini penulis menyertakan pembuktian dari teorema terhadap beberapa contoh graf menggunakan Sage.

2. Sage

System for Algebra and Geometry Experimentation atau yang umumnya disingkat Sage adalah perangkat lunak dengan keunggulan dalam menyelesaikan permasalahan berbagai aspek dalam matematika, termasuk aljabar linier, kalkulus, teori graf, teori bilangan dan analisis numerik [3]. Sage juga dapat disebut *sagemath*. Sage versi pertama dipublikasikan pada 24 Februari 2005 sebagai perangkat lunak bebas di bawah lisensi GNU General Public dengan tujuan awal untuk menyaingi beberapa perangkat lunak berbayar sejenis yang sudah ada yaitu Mathematica, Maple dan Matlab. Pencipta dari Sage adalah William Stein, seorang akademisi matematika dari University of Washington, Amerika Serikat. Sage menggunakan bahasa pemrograman Python. Pada tahun 2007, Sage memenangkan penghargaan terbaik dalam Les Trophées du Libre, suatu ajang penghargaan internasional untuk perangkat lunak bebas [4]. Saat ini, Sage digunakan oleh para akademisi di banyak negara yang bekerja di bidang aljabar dan graf, baik aljabar abstrak maupun aljabar linear, misalnya dalam [5], [6] dan [7]. Sebagai perangkat lunak matematika, Sage mempunyai banyak keunggulan yaitu dapat diunduh secara bebas, menyediakan banyak paket matematika, dan Sage dapat digunakan menyelesaikan suatu persoalan dalam aljabar linier dan persoalan matematika lainnya. Selain itu, Sage juga dapat menjadi wadah untuk menuliskan teks modul perkuliahan yang terintegrasi dengan LaTeX. Teks modul tersebut selanjutnya dapat diung-

gah ke dalam suatu jejaring. Beberapa paket matematika yang termuat dalam Sage antara lain:

<i>Aljabar</i>	: <i>GAP, Maxima, Singular</i>
<i>Aljabar Geometri</i>	: <i>Singular</i>
<i>Geometri Aritmatika</i>	: <i>PARI/GP, NTL, mwrank, ecm</i>
<i>Kalkulus</i>	: <i>Maxima, SymPy, GiNaCKombinatorikSymmetrica,</i>
<i>Aljabar Linear</i>	: <i>ATLAS, BLAS, LAPACK, NumPy, LinBox, IML, GSL</i>
<i>Teori Graf</i>	: <i>NetworkX</i>
<i>Komputasi Numerik</i>	: <i>GSL, SciPy, NumPy, ATLAS</i>

3. Graf Garis dan Matriks keterkaitan

Misalkan G suatu graf sederhana yaitu graf yang tidak memuat loop dan sisi ganda, dengan label dari sisi nya $EG = (e_1, e_2, \dots, e_m)$ dan simpulnya $VG = (v_1, v_2, \dots, v_n)$. Matriks ketetanggaan suatu graf G adalah suatu matriks $A = A(G)_{n \times n}$ dimana

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika } v_i \text{ bertetangga dengan } v_j ; \\ 0, & \text{yang lain.} \end{cases}$$

Berdasarkan definisi di atas, A adalah suatu matriks simetri dan setiap unsur pada diagonal utama adalah 0. Nilai eigen graf G adalah nilai eigen dari matriks A . Jika graf G dengan n simpul memiliki s simpul yang memiliki himpunan simpul ketetanggaan yang sama, maka terdapat s baris dalam matriks A yang memiliki elemen yang sama. Akibatnya, matriks tersebut singular sehingga dapat dikatakan A memiliki nilai eigen 0. Pernyataan di atas dapat dirangkum dalam proposisi berikut ini.

Proposisi 3.1 *Jika graf G dengan n simpul memiliki s simpul yang memiliki himpunan simpul ketetanggaan yang sama, maka G memiliki nilai eigen 0.*

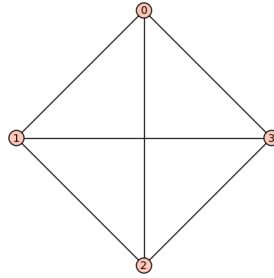
Selanjutnya, pandang suatu graf teratur. Untuk mencari nilai eigen dari graf teratur berderajat k dapat digunakan proposisi berikut:

Proposisi 3.2 *Misalkan G graf teratur berderajat k . Maka:*

1. k merupakan salah satu nilai eigen dari G .
2. Jika G terhubung, maka multiplisitas aljabar dari k adalah 1
3. Untuk setiap nilai eigen λ dari graf G , didapatkan $|\lambda| \leq k$

Pengembangan dari Proposisi 3.2 di atas, didapatkan jika G tidak terhubung, maka multiplisitas aljabar dari k adalah banyaknya komponen terhubung dari G [8].

Sebagai contoh, diberikan graf lengkap dengan empat simpul $G = K_4$. Graf K_4 adalah graf terhubung teratur berderajat tiga.



Gambar 1: Graf K_4

Dari Proposisi 3.2 di atas, didapat salah satu nilai eigen dari K_4 adalah 3, dan nilai mutlak dari nilai eigen yang lain ≤ 3 . Berikut diberikan pembuktiannya menggunakan Sage.

```

SDGE The Sage Notebook
Version 5.1
admin Toggle | Home | Published | Log | Settings | Help | Report a Problem | Sign out

limits
last edited on June 05, 2013 02:49 AM by admin
Save Save & quit Discard & quit

File... Action... Data... sage Typeset Print Worksheet Edit Text Undo Share Publish

sage=G1=graphs.CompleteGraph(4)
sage=S1=G1.spectrum();S1

[3, -1, -1, -1]
jMath

```

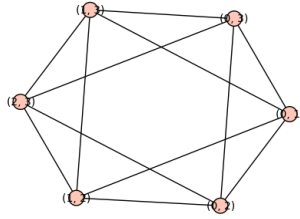
Gambar 2: Nilai eigen dari K_4

Terlihat bahwa nilai eigen dari K_4 adalah 3 dan -1, dimana $|-1| = 1 \leq 3$, dan multiplisitas aljabar dari $k = 3$ adalah satu.

Selain dapat dibentuk matriks ketetanggaan, dari suatu graf sederhana G dapat juga dibentuk graf garis $L(G)$ dengan pengaturan setiap sisi di G adalah simpul di $L(G)$, dan untuk setiap 2 simpul yang terkait di sisi e_a dan sisi yang lain misal e_b , maka e_a dan e_b bertetangga di $L(G)$. Dari $L(G)$ dapat juga dibentuk matriks ketetanggaannya yaitu A_L berukuran $m \times m$ dimana

$$(A_L)_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika } e_i \text{ bertetangga dengan } e_j ; \\ 0, & \text{yang lain.} \end{cases}$$

Berikut diberikan gambar graf garis dari K_4 .



Gambar 3: Graf garis dari K_4

Selanjutnya, didefinisikan matriks $X_{n \times m}$ yang merepresentasikan keterkaitan antara v_i dan e_i yaitu

$$X_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika } v_i \text{ dan } e_i \text{ terkait} \\ 0, & \text{jika } v_i \text{ dan } e_i \text{ tidak terkait.} \end{cases}$$

Dari beberapa definisi di atas, dapat digunakan untuk membuktikan lemma berikut

Lemma 3.3 Didefinisikan G , A , $L(G)$, A_L dan X seperti di atas. Maka:

1. $X^T X = A_L + 2I_m$
2. Jika G teratur berderajat k , maka $XX^T = A + kI_n$.

Berikut diberikan pembuktian Lemma 3.3 di atas untuk graf K_4 dengan menggunakan Sage, dengan $k = 3$.

```
sage=L1=line_graph=Graph([G1.edges(labels=fals
e),\lambda
i,j:len(set(i).intersection(set(j)))>0], \
loops=False)
sage=L1.vertices()
sage=A_L1=line_graph.adjacency_matrix()
sage=X=Matrix([[1,1,0,0,0],[1,0,0,1,1,0],
[0,1,0,1,0,1],[0,0,1,0,1,1]])
sage=Xt=X.transpose()
sage=I_6 = identity_matrix(QQ, 6)
sage=Xt*X
sage=A_L1+2*I_6
Xt*X==A_L1+2*I_6
True
```

Gambar 4: $X^T X = A_L + 2I_6$

```
sage=A1=G1.adjacency_matrix()
sage=I_4=identity_matrix(QQ, 4)
sage=X*Xt
sage=A1+3*I_4
X*Xt==A1+3*I_4
True
```

Gambar 5: $XX^T = A + 3I_4$

Lemma 3.4 Jika λ adalah nilai eigen dari A_L , maka $\lambda \geq -2$.

Bukti Misal μ nilai eigen dari $X^T X$, maka

$$X^T X.z = \mu.z \quad (1)$$

dengan z vektor eigen yang bersesuaian dengan μ . Kalikan persamaan (1) dengan z^T dari kiri, didapat

$$z^T X^T X.z = \mu.z^T z \quad (2)$$

Di sisi lain, $\|Xz\|^2 = \langle Xz, Xz \rangle = (Xz)^T Xz = z^T X^T Xz$. Karena $\|Xz\|^2 \geq 0$, dan $z^T z \geq 0$, maka $\mu \geq 0$.

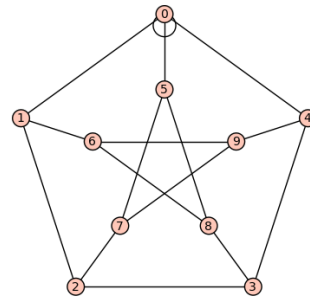
Pandang persamaan berikut

$$\begin{aligned} X^T X.z &= \mu.z \\ (A_L + 2I_m).z &= \mu.z \\ A_L.z + 2I_m.z &= \mu.z \\ A_L.z &= -2I_m.z + \mu.z \\ A_L.z &= (\mu - 2)I_m.z \\ A_L.z &= (\mu - 2).z \\ A_L.z &= \lambda.z \end{aligned}$$

Karena $\mu \geq 0$, maka nilai eigen dari A_L yaitu $\lambda = \mu - 2 \geq -2$. ■

Berikut diberikan pembuktian Lemma 3.4 di atas untuk graf Petersen menggunakan Sage beserta gambarnya.

```
sage=G2=graphs.PetersenGraph()
sage=L2=line_graph=Graph([G2.edges(labels=false),\
lambda i,j:len(set(i).intersection(set(j)))>0],\
loops=False)
sage=line_graph.vertices()
sage=A2_L2=line_graph.adjacency_matrix()
sage=F2=L2.spectrum();
F2
[4, 2, 2, 2, 2, 2, -1, -1, -1, -1, -2, -2, -2, -2, -2]
```



Gambar 6: Nilai eigen dari graf garis dari graf Petersen

Gambar 7: Graf Petersen

Terlihat bahwa nilai eigen dari $L(G_2)$ dengan G_2 adalah graf Petersen adalah lebih besar sama dengan -2 .

Berikut ini diberikan suatu teorema terkait polinomial karakteristik graf garis.

Teorema 3.5 *Jika G graf k teratur dengan n simpul dan $m = \frac{1}{2}nk$ sisi, maka*

$$C_{A_L}(\lambda) = (\lambda + 2)^{m-n} C_A(\lambda + 2 - k).$$

Bukti Didefinisikan matriks blok sebagai berikut :

$$R = \begin{bmatrix} \lambda I_n & -X \\ 0 & I_m \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} I_n & X \\ X^t & \lambda I_m \end{bmatrix}.$$

maka

$$RS = \begin{bmatrix} \lambda I_n - XX^t & 0 \\ X^t & \lambda I_m \end{bmatrix}, \quad SR = \begin{bmatrix} \lambda I_n & 0 \\ \lambda X^t & I_m - X^t X \end{bmatrix}.$$

Karena $\det(RS) = \det(SR)$, maka

$$\lambda^m \det(\lambda I_n - XX^t) = \lambda^n \det(\lambda I_m - X^t X).$$

Menggunakan Lemma 3.3 dan persamaan di atas diperoleh

$$\begin{aligned} C_{A_L}(\lambda) &= \det(\lambda I_m - A_L) \\ &= \det((\lambda + 2)I_m - X^t X) \\ &= (\lambda + 2)^{m-n} \det((\lambda + 2)I_n - XX^t) \\ &= (\lambda + 2)^{m-n} \det((\lambda + 2 - k)I_n - A) \\ &= (\lambda + 2)^{m-n} C_A(\lambda + 2 - k). \blacksquare \end{aligned}$$

4. Matriks Laplacian

Diperkenalkan untuk setiap $e_\alpha = \{v_\gamma, v_\tau\}$ dari G , kemudian dipilih salah satu dari v_γ, v_τ menjadi ujung positif dari e_α dan yang lain ujung negatif. Prosedur ini dapat dikatakan sebuah orientasi terhadap G . Matriks keterkaitan D dari graf G dengan orientasi adalah matriks berukuran $n \times m$ (d_{ij}) yang didefinisikan dengan

$$d_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika } v_i \text{ adalah ujung positif dari } e_j \\ -1, & \text{jika } v_j \text{ adalah ujung negatif dari } e_j ; \\ 0, & \text{yang lain.} \end{cases}$$

Teorema 4.1 *Jika D matriks keterkaitan dari graf G dengan orientasi maka $Q = DD^t = \Delta - A$, dengan A matriks ketetanggaan dan Δ matriks diagonal yang elemen diagonalnya adalah derajat dari v_i ($1 \leq i \leq n$).*

Dari Teorema 4.1 di atas, dapat didefinisikan $Q = (Q_{i,j})_{n \times n}$ dalam bentuk yang baru, yaitu:

$$q_{ij} = \begin{cases} \text{derajat } v_i, \text{ untuk } i = j \\ -1 & , \text{ untuk } i \neq j \text{ dan } v_i \text{ bertetangga dengan } v_j ; \\ 0 & , \text{ yang lain.} \end{cases}$$

Teorema 4.2 Diberikan graf G dan matriks Laplacian Q dengan nilai eigen $\mu_0 \leq \mu_1 \leq \dots \leq \mu_{n-1}$:

1. $\mu_0 = 0$ dengan vektor eigen $x = [1, 1, \dots, 1]$
2. Jika G terhubung, maka $\mu_1 > 0$
3. Jika G graf teratur berderajat k , maka $\mu_i = k - \lambda_i$, dengan λ_i adalah nilai eigen dari G .

Bukti 1. Dari definisi $Q = DD^t$, maka Q adalah matriks semi definite positif ($\forall i, \mu_i \geq 0$). Akan dibuktikan bahwa Q memuat 0 sebagai nilai eigen, sehingga $\mu_0 = 0$.

$$\text{Misal } Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix} \text{ dengan } \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n q_{ij} = 0.$$

$$\text{Pandang } \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ yang memenuhi } Q \times \bar{x} = \mu \times \bar{x}, \text{ dengan } \bar{x} \text{ vektor eigen}$$

dari Q yang bersesuaian dengan μ .

Akan dibuktikan terdapat \bar{x} sehingga $\mu = 0$.

$$\text{Pilih } \bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ Karena } \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n q_{ij} = 0, \text{ maka}$$

$$Q \times \bar{x} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \mu \times \bar{x}.$$

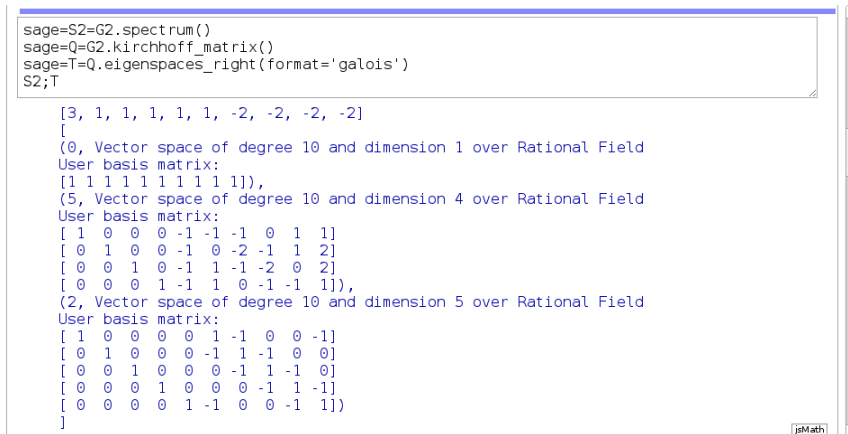
Sehingga $\mu = 0$ adalah nilai eigen dari Q dan $\mu = 0 = \mu_0$

2. Akan dibuktikan jika G terhubung, maka $\mu_1 > 0$. Karena dimensi kernel $Q = \dim(VG) = n - \dim \text{rank} = n - (n - 1) = 1$, dan $\dim \text{kernel} = \text{multiplisitas aljabar dari } (\mu = 0)$. Maka multiplisitas aljabar dari $(\mu = 0)$ adalah 1. Oleh karena multiplisitas aljabar dari $(\mu = 0)$ adalah 1 dan karena $\mu_0 = 0$, maka $\mu_1 > 0$.

3. Pandang

$$\begin{aligned} DD^t.z &= \mu_i.z \\ (kI - A).z &= \mu_i.z \\ kI.z - A.z &= \mu_i.z \\ A.z &= kI.z - \mu_i.z \\ A.z &= (k - \mu_i).I.z \\ A.z &= (k - \mu_i).z \\ A.z &= \lambda_i.z. \blacksquare \end{aligned}$$

Berikut diberikan pembuktian Teorema 4.2 di atas untuk graf Petersen menggunakan Sage .



```
sage=S2=G2.spectrum()
sage=Q=G2.kirchhoff_matrix()
sage=T=Q.eigenspaces_right(format='galois')
S2;T
[3, 1, 1, 1, 1, 1, -2, -2, -2, -2]
[
(0, Vector space of degree 10 and dimension 1 over Rational Field
User basis matrix:
[1 1 1 1 1 1 1 1 1 1]),
(5, Vector space of degree 10 and dimension 4 over Rational Field
User basis matrix:
[ 1  0  0  0 -1 -1 -1  0  1  1]
[ 0  1  0  0 -1  0 -2 -1  1  2]
[ 0  0  1  0 -1  1 -1 -2  0  2]
[ 0  0  0  1 -1  1  0 -1 -1  1]),
(2, Vector space of degree 10 and dimension 5 over Rational Field
User basis matrix:
[ 1  0  0  0  0  1 -1  0  0 -1]
[ 0  1  0  0  0 -1  1 -1  0  0]
[ 0  0  1  0  0  0 -1  1 -1  0]
[ 0  0  0  1  0  0  0 -1  1 -1]
[ 0  0  0  0  1 -1  0  0 -1  1])
]
```

Gambar 8: Ruang eigen dari matriks Laplacian dari graf Petersen

Dari hasil di atas diperoleh bahwa nilai eigen minimal dari matriks Laplacian Q dari graf Petersen (G_2) adalah $\mu_0 = 0$ dengan vektor eigen $x = [1, 1, \dots, 1]$. Selanjutnya, $\mu_1 = 1 > 0$. Faktanya, graf Petersen adalah graf teratur berderajat tiga sehingga didapat: $\mu_0 = 3 - 3 = 0$, $\mu_1 = 3 - 1 = -2$, dan $\mu_2 = 3 - (-2) = 5$ dengan $3 = \lambda_0$, $1 = \lambda_1$, $-2 = \lambda_2$, λ_0, λ_1 dan λ_2 adalah nilai eigen dari G_2 .

5. Kesimpulan

Teknik aljabar linier dapat digunakan untuk menyelidiki teorema mengenai graf. Teorema-teorema tersebut menyatakan bahwa salah satu nilai eigen dari sebarang graf teratur berderajat k adalah k , dan batas bawah dari nilai eigen sebarang graf garis adalah -2 . Teorema yang lain menyatakan bahwa polinomial karakteristik graf garis dari graf G , dapat dibentuk dari polinomial karakteristik graf G . Teorema terakhir menentukan nilai eigen dari matriks Laplacian Q dari sebarang graf G . Pembuktian dari teorema-teorema tersebut juga dapat ditunjukkan menggunakan Sage, untuk beberapa contoh graf tertentu

Pustaka

- [1] BUDAYASA, *Teori Graph dan Aplikasinya*, Surabaya: Unesa University Press, 2007.
- [2] GODSIL, C. ROYLE, G. *Algebraic Graph Theory*, Springer, 2001.
- [3] SAGE, <http://sagemath.org>, Free, public notebook server at <http://sagenb.org>.
- [4] SCIENCE DAILY, *Free Software Brings Affordability, Transparency To Mathematics*, Desember 7 2007.
- [5] BEEZER, A. R., *Sage for Linear Algebra: A Supplement to A First Course in Linear Algebra*, GNU Free Documentation License, 2011.
- [6] WHIELDON, GWYN, *Math 440: Laboratory 1, Introduction to Abstract Algebra with SAGE*, A lecturer note:Hood College.
- [7] STEIN, W., *Exact Linear Algebra for SAGE*, MSRI Workshop, 2006.
- [8] BEEZER, R, *An Introduction to Algebraic Graph Theory*, Mathematics Department Seminar Pasicic University, 2009.