

Analisis dan Kontrol Optimal pada Model Dinamik Penyebaran Virus Zika

Suhud Wahyudi^{1*}, Nurani Dwi Pangestuti², Kamiran³

^{1,2,3}Departemen Matematika ITS Surabaya Indonesia

e-mail: suhudwahyudi60@gmail.com

Diajukan: 31 Oktober 2022, Diperbaiki: 16 Januari 2023, Diterima: 2 Maret 2023

Abstrak

Virus zika adalah sejenis virus dari keluarga *flaviviridae* dan genus *flavivirus* yang disebarkan oleh nyamuk *Aedes Aegypti* yang dapat menyebabkan masalah serius seperti penyakit Guillain Barre Syndrome (GBS) dan mikrosefalus. Dalam makalah ini, digunakan model penyebaran virus zika yang terdiri dari dua populasi yang dibagi menjadi beberapa sub-populasi antara lain sub-populasi manusia Susceptible, sub-populasi manusia Asymptomatic Infected, sub-populasi manusia Symtomatic Infected, sub-populasi manusia Recovered, sub-populasi nyamuk Susceptible, dan sub-populasi nyamuk Infected. Model dianalisis dengan menentukan bilangan reproduksi dasar, titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemik, serta kestabilan dari setiap titik kesetimbangan. Kemudian dilakukan kontrol optimal menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin yang disimulasikan secara numerik menggunakan metode Range-Kutta. Hasil simulasi menunjukkan menurunnya sub-populasi manusia yang terinfeksi virus zika dan menurunnya populasi nyamuk setelah adanya pemberian kontrol berupa penggunaan kondom, pengobatan, dan penyemprotan insektisida.

Kata Kunci: Model penyebaran virus zika, Kestabilan, Kontrol Optimal, Prinsip Maksimum Pontryagin.

Abstract

Zika is a virus from flaviviridae family and flavivirus genus that spread by Aedes Aegypti mosquito and that can cause serious problem disease such as Guillain Barre Syndrome (GBS) and mikrosefalus. In this paper used spreading dynamic zika virus model that consists of two population and divided to sub population Susceptible humans, sub-population Asymptomatic Infected humans, sub-population Infected humans, sub-population Recovered humans, sub-population Susceptible mosquitoes, and sub-population Infected mosquitoes. The model that anlysis by determine the basic reproduction number, the point of disease free and endemic equilibrium, and the stability of each point of equilibrium. Then, do the optimal control using Pontryagin principle with numerical solution given by Range-Kutta method. The simulation results show the decreasing sub-population of infected humans, asymptomatic infected human, and population of mosquitoes after given controls such using condom, treatment, and using indoor residual spray.

Keywords: Spreading dynamic zika virus model, Stability, Optimal Control, Pontryagin Maximum Principle.

1 Pendahuluan

Virus zika adalah sejenis virus dari keluarga *flaviviridae* dan genus *flavivirus* yang disebarkan oleh nyamuk *Aedes Aegypti* sehingga virus zika termasuk dalam garis virus yang sama dengan virus *dengue* penyebab penyakit demam berdarah. Dalam hal ini gejala yang ditimbulkan

oleh virus zika berbeda dengan virus *dengue*, dimana secara umum infeksi virus zika pada orang dewasa hanya menampakkan gejala ringan pada 20% pasien yang terinfeksi. Bahkan pada 80% pasien yang terinfeksi tidak menunjukkan gejala apapun pada tahap awal infeksi [1]. Laporan terbaru menyebutkan terjadi adanya masalah penyakit *Guillain Barre Syndrome* (GBS) dan mikrosefalus yang terkait dengan wabah virus zika. GBS adalah sebuah sindrom langka yang disebabkan oleh sistem imun yang menyerang sebagian sistem saraf periferal. Kondisi ini bisa membuat saraf meradang dan mengakibatkan kelumpuhan atau kelemahan otot. Sedangkan mikrosefalus adalah kelainan otak dengan ukuran kepala lebih kecil dari ukuran normal[2]. Kedua penyakit tersebut dapat dikaitkan dengan berbagai faktor penyebab diantaranya infeksi intrauterin, faktor genetik, paparan toksin dan lain sebagainya. Penelitian epidemiologi menemukan hubungan peningkatan kedua penyakit tersebut setelah terjadinya wabah virus zika.

Peningkatan penyebaran virus zika ini tidak diiringi dengan peningkatan kesadaran masyarakat terhadap ancaman serius dari virus zika. Penyebaran virus zika bukan hanya melalui gigitan nyamuk, tetapi juga dapat dengan interaksi antar individual yang terinfeksi virus zika tersebut. Sampai saat ini masih belum ditemukan vaksin atau pengobatan yang spesifik terhadap infeksi virus zika. Pengobatan yang disarankan sejauh ini hanya berupa terapi terhadap gejala, serta langkah-langkah pencegahan untuk dapat terhindar dari gigitan nyamuk yang dapat menginfeksi virus zika [3].

Melihat fenomena tersebut, perlu adanya model matematika penyebaran virus zika untuk dapat dianalisis penyebaran virus zika dan perlu adanya kontrol untuk dapat meminimumkan penginfeksian virus zika. Model dinamik penyebaran virus zika telah dikaji oleh beberapa peneliti. Pada makalahnya, Ebenezer Bonyah dan Kazeem Oare Okosun [4] menganalisis model dinamik penyebaran virus zika dan membuat model kontrol baru untuk dapat meminimumkan jumlah individu yang terinfeksi dengan variabel kontrol pencegahan dan pengobatan virus zika. Selain itu Gao, D., dkk. [5] membuat model kontrol penyebaran virus zika dengan mengembangkan model Mosquito-Borne yang telah ada sebelumnya ditambahkan model transmisi virus zika melalui hubungan seks. Selanjutnya Kurcharski, A.J., dkk. [6] membuat model transmisi dinamik penyebaran virus zika di Polynesia dari tahun 2013 hingga tahun 2014 dengan mengumpulkan data yang ada. Setelah itu, dianalisis modelnya sehingga menghasilkan beberapa individu yang sehat dan terbebas dari infeksi virus zika untuk beberapa tahun yang akan datang.

Dalam makalah ini dikembangkan model dinamik penyebaran virus zika oleh A. A. Momoh dan A. Fügenschuh [7] dengan menambahkan kontrol penggunaan kondom, pengobatan, dan penyemprotan insektisida yang dikaji dan dianalisis kestabilan titik kesetimbangan pada model penyebaran virus zika tersebut. Setelah itu untuk dapat meminimumkan jumlah manusia yang

terinfeksi virus zika diperlukan kontrol yang optimal dengan menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin lalu disimulasikan secara numerik dengan metode Range-Kutta Orde 4.

2 Proses Pemodelan

Model dinamik penyebaran virus zika yang dibahas pada makalah ini adalah model dinamik yang digunakan A. A. Momoh dan A. Fügenschuh [7] yang dikonstruksi kembali sedemikian hingga mempunyai asumsi – asumsi sebagai berikut:

1. Model dibangun oleh dua populasi yaitu populasi manusia (N_H) dan populasi nyamuk (N_V). Kedua populasi tersebut dibagi menjadi beberapa sub – populasi dengan rincian sebagai berikut:

Untuk populasi manusia (N_H)

S_H : jumlah populasi manusia *Susceptible* (kumpulan individu rentan terhadap virus zika)

A_H : jumlah populasi manusia *Asymptomatic Infected* (terinfeksi virus zika, namun tidak tahu jika sedang terinfeksi)

I_H : jumlah populasi manusia *Infected* (terinfeksi virus zika)

R_H : jumlah populasi manusia *Recovered* (masa penyembuhan)

dan untuk jumlah populasi manusia dinyatakan dengan

$$N_H(t) = S_H(t) + A_H(t) + I_H(t) + R_H(t)$$

Untuk populasi nyamuk (N_V)

S_V : jumlah populasi nyamuk *Susceptible* (rentan terhadap virus zika)

I_V : jumlah populasi nyamuk *Infected* (terinfeksi virus zika)

dan untuk jumlah populasi nyamuk dinyatakan dengan $N_V(t) = S_V(t) + I_V(t)$

2. Parameter-parameter yang ada pada model dinamik didefinisikan sebagai berikut:

Λ_H : laju penambahan individu manusia yang akan menjadi populasi manusia *susceptible*

μ_H : laju kematian alami manusia

φ_H : rata-rata individu manusia *recovered* karena sistem imun

ϕ : rata-rata spontanitas individu manusia untuk *recovery*

ν : rate penyembuhan individu manusia akibat imun sementara

α_H : laju perubahan individu *exposed* menjadi *infected*

δ_H : laju kematian individu manusia akibat virus

c : rata-rata relatif kontak individu manusia *asymptomatic infected*

k : rata-rata relatif kontak individu manusia *infected*

β_a : peluang transmisi virus dari individu manusia *asymptomatic infected* melalui hubungan seksualitas

β_S : peluang transmisi virus dari individu manusia *infected* melalui hubungan seksualitas

β_1 : peluang transmisi virus dari individu nyamuk *infected*

β_2 : peluang transmisi virus dari individu manusia *infected*

ε : rata – rata per kapital terkena gigitan nyamuk

ρ : rata – rata kontak nyamuk dengan manusia

Λ_V : laju penambahan individu nyamuk yang akan menjadi populasi nyamuk *susceptible*

μ_V : laju kematian nyamuk

θ : rata-rata konstan penyemprotan insektisida

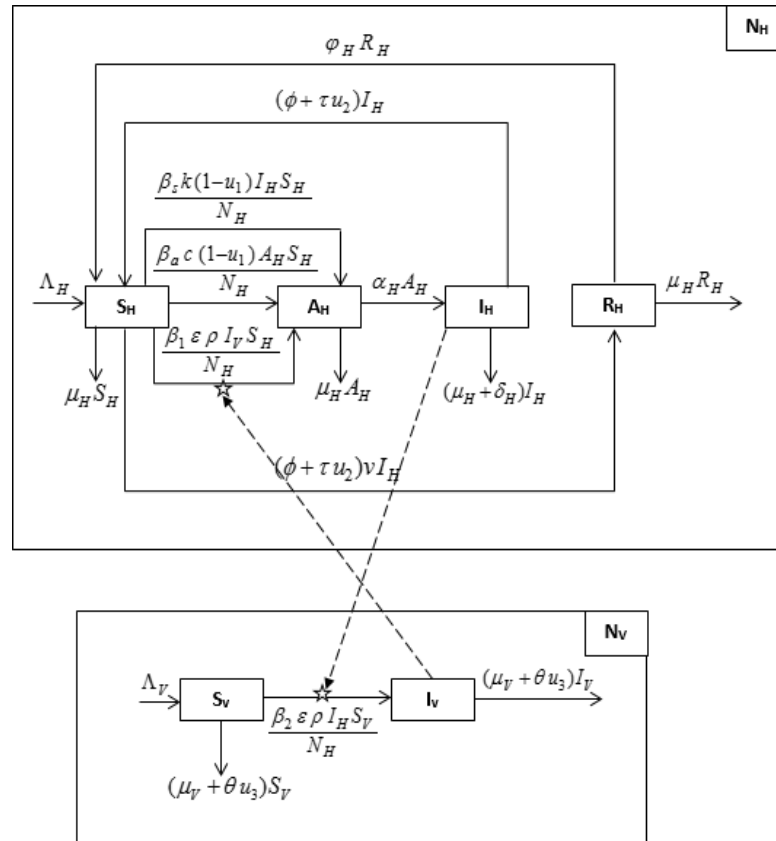
3. Kontrol yang digunakan pada model dinamik didefinisikan sebagai berikut:

u_1 : kontrol terhadap penggunaan alat kontrasepsi

u_2 : kontrol terhadap pengobatan untuk individu manusia yang terinfeksi

u_3 : kontrol terhadap penyemprotan insektisida

Berdasarkan mekanisme penyebaran virus zika dan asumsi-asumsi yang telah disebutkan, dapat digambarkan diagram kompartemen model dinamik penyebaran virus zika, seperti pada Gambar



Gambar 1. Diagram Kompartemen Model Dinamik Transmisi Virus Zika

Dari diagram kompartemen pada Gambar 1 dapat dituliskan persamaan-persamaan model matematika penyebaran virus zika sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \frac{dS_H}{dt} &= \Lambda_H + \varphi_H R_H + (\phi + \tau u_2) I_H - (\phi + \tau u_2) v I_H - \frac{\beta_1 \varepsilon \rho I_V S_H}{N_H} - \frac{\beta_a c (1 - u_1) A_H S_H}{N_H} \\
 &\quad - \frac{\beta_s k (1 - u_1) I_H S_H}{N_H} - \mu_H S_H \\
 \frac{dA_H}{dt} &= \frac{\beta_1 \varepsilon \rho I_V S_H}{N_H} + \frac{\beta_a c (1 - u_1) A_H S_H}{N_H} + \frac{\beta_s k (1 - u_1) I_H S_H}{N_H} - \alpha_H A_H - \mu_H A_H \\
 \frac{dI_H}{dt} &= \alpha_H A_H - (\phi + \tau u_2) I_H - (\mu_H + \delta_H) I_H \\
 \frac{dR_H}{dt} &= (\phi + \tau u_2) v I_H - \varphi_H R_H - \mu_H R_H \\
 \frac{dS_V}{dt} &= \Lambda_V - \frac{\beta_2 \varepsilon \rho I_H S_V}{N_H} - (\mu_V + \theta u_3) S_V \\
 \frac{dI_V}{dt} &= \frac{\beta_2 \varepsilon \rho I_H S_V}{N_H} - (\mu_V + \theta u_3) I_V
 \end{aligned} \tag{1}$$

Selanjutnya dilakukan analisis model matematika penyebaran virus zika sistem Persamaan (1). Analisis yang pertama adalah menentukan titik kesetimbangan dan bilangan reproduksi dasar. Analisis yang kedua adalah menentukan kontrol optimal menggunakan prinsip Maksimum

Pontryagin.

A. Titik Keseimbangan dan Bilangan Reproduksi Dasar

Titik kesetimbangan sistem dinamis dinyatakan oleh suatu persamaan differensial biasa yang merupakan solusi dari sistem yang tidak berubah terhadap waktu. Misal diberikan suatu persamaan differensial

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), x(t_0) = x(0)$$

dengan $x(t) \in \mathbb{R}^n$, vektor \bar{x} memenuhi $f(\bar{x}) = \bar{0}$

Definisi 1[8] Titik $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ disebut titik kesetimbangan dari suatu sistem jika $f(\bar{x}) = \bar{0}$

Untuk titik kesetimbangan diperoleh pada laju masing-masing kompartemen sama dengan nol. Untuk titik kesetimbangan bebas penyakit sub-populasi manusia yang terinfeksi virus sama dengan nol ($I_H = 0$) dan juga sub-populasi nyamuk yang terinfeksi virus sama dengan nol ($I_V = 0$). Sehingga diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit yaitu

$$E_0 = \left(\frac{\Lambda_H}{\mu_H}, 0, 0, 0, \frac{\Lambda_V}{\mu_V + \theta u_3}, 0 \right)$$

Untuk titik kesetimbangan endemik sub-populasi manusia yang terinfeksi virus tidak sama dengan nol ($I_H \neq 0$) dan juga sub-populasi nyamuk yang terinfeksi virus tidak sama dengan nol ($I_V \neq 0$). Diperoleh titik kesetimbangan endemik

$$E = (S_H^*, A_H^*, I_H^*, R_H^*, S_V^*, I_V^*)$$

dengan

$$S_H^* = \frac{\Lambda_H(\Lambda_H + \varphi_H R_H^* + (\phi + \tau u_2)(1 - v)I_H^*)}{\beta_1 \varepsilon \rho \mu_H I_V^* + \beta_a c(1 - u_1)\mu_H A_H^* + \beta_S k(1 - u_1)\mu_H I_H^* + \mu_H \Lambda_H}$$

$$A_H^* = \frac{\beta_1 \varepsilon \rho \mu_H I_V^* S_H^* + \beta_S k(1 - u_1)\mu_H I_H^* S_H^*}{\alpha_H \Lambda_H + \mu_H \Lambda_H - \beta_a c(1 - u_1)\mu_H S_H}$$

$$I_H^* = \frac{\alpha_H A_H^*}{\phi + \tau u_2 + \mu_H + \delta_H}$$

$$R_H^* = \frac{(\phi + \tau u_2)v I_H^*}{\varphi_H + \mu_H}$$

$$S_V^* = \frac{\Lambda_V \Lambda_H}{\beta_2 \varepsilon \rho \mu_H I_H^* + \Lambda_H(\mu_V + \theta u_3)}$$

$$I_V^* = \frac{\beta_2 \varepsilon \rho \mu_H I_H^* S_V^*}{\Lambda_H(\mu_V + \theta u_3)}$$

Untuk bilangan reproduksi dasar (R_0) diperoleh dengan menggunakan metode *Next Generation Matrix* dengan mencari matriks F dan V dari sistem penyebaran virus zika. F_i adalah laju kemunculan infeksi baru pada kompartemen. Jika V_i adalah laju perpindahan individu keluar dari kompartemen dan x_0 adalah titik kesetimbangan bebas penyakit, maka bilangan reproduksi

dasar diperoleh dari nilai eigen terbesar dari matriks $[F][V]^{-1}$ dimana $F = \frac{\partial F_i(x_0)}{\partial(x_j)}$ dan $V = \frac{\partial V_i(x_0)}{\partial(x_j)}$

[9] sehingga didapatkan

$$R_0 = \frac{\left(\frac{L_1}{K_1} + \frac{\alpha_H L_2}{K_1 K_2}\right) + \sqrt{\left(\frac{L_1}{K_1} + \frac{\alpha_H L_2}{K_1 K_2}\right)^2 + 4 \left(\frac{\alpha_H L_3 L_4}{K_1 K_2 K_3}\right)}}{2}$$

dengan

$$\begin{aligned} L_1 &= \beta_a c(1 - u_1) & K_1 &= \alpha_H + \mu_H \\ L_2 &= \beta_S k(1 - u_1) & K_1 &= \phi + \tau u_2 + \delta_H + \mu_H \\ L_3 &= \beta_1 \varepsilon \rho & K_3 &= \mu_V + \theta u_3 \\ L_4 &= \beta_2 \varepsilon \rho \Lambda_V \mu_H \end{aligned}$$

Analisis Kestabilan

Model matematika penyebaran virus zika merupakan sistem persamaan diferensial autonomous yang tak linier. Oleh karena itu untuk mendapatkan kestabilan lokal dari titik-titik setimbang, perlu dilakukan linierisasi dengan menggunakan matriks Jacobian. Untuk menganalisis kestabilan lokal pada setiap titik kesetimbangan perlu dilakukan linierisasi dengan menggunakan matriks Jacobian.

Definisi 2 [8] Diberikan fungsi $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ pada sistem $\dot{x} = f(x)$ dengan $f_i \in C(E)$, $i = 1, 2, \dots, n$. $E \subseteq \mathbb{R}^n$ dan E himpunan terbuka. Matriks

$$J(f(\bar{x})) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

dinamakan matriks Jacobian dari f di titik \bar{x}

Matriks Jacobian $J(f(\bar{x}))$ dapat digunakan untuk mengidentifikasi sifat kestabilan sistem nonlinier disekitar titik setimbang \bar{x} dimana titik setimbang tersebut disubstitusikan ke dalam persamaan matriks Jacobian sehingga diperoleh nilai-nilai eigennya (λ) dari persamaan karakteristik $|A - \lambda I| = 0$.

Matriks Jacobian sistem Persamaan (1) dapat diuraikan sebagai berikut:

Misalkan:

$$\begin{aligned} f_1 = \frac{dS_H}{dt} &= \Lambda_H + \varphi_H R_H + (\phi + \tau u_2) I_H - (\phi + \tau u_2) v I_H - \frac{\beta_1 \varepsilon \rho I_V S_H}{N_H} - \frac{\beta_a c(1 - u_1) A_H S_H}{N_H} \\ &\quad - \frac{\beta_S k(1 - u_1) I_H S_H}{N_H} - \mu_H S_H \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_2 &= \frac{dA_H}{dt} = \frac{\beta_1 \varepsilon \rho I_V S_H}{N_H} + \frac{\beta_a c(1 - u_1)A_H S_H}{N_H} + \frac{\beta_S k(1 - u_1)I_H S_H}{N_H} - \alpha_H A_H - \mu_H A_H \\
f_3 &= \frac{dI_H}{dt} = \alpha_H A_H - (\phi + \tau u_2)I_H - (\mu_H + \delta_H) I_H \\
f_4 &= \frac{dR_H}{dt} = (\phi + \tau u_2)vI_H - \phi_H R_H - \mu_H R_H \\
f_5 &= \frac{dS_V}{dt} = \Lambda_V - \frac{\beta_2 \varepsilon \rho I_H S_V}{N_H} - (\mu_V + \theta u_3)S_V \\
f_6 &= \frac{dI_V}{dt} = \frac{\beta_2 \varepsilon \rho I_H S_V}{N_H} - (\mu_V + \theta u_3)I_V
\end{aligned}$$

Matriks Jacobian dari sistem Persamaan (1) adalah:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial S_H} & \frac{\partial f_1}{\partial A_H} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial I_V} \\ \frac{\partial f_2}{\partial S_H} & \frac{\partial f_2}{\partial A_H} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial I_V} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_6}{\partial S_H} & \frac{\partial f_6}{\partial A_H} & \dots & \frac{\partial f_6}{\partial I_V} \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} -a_1 - a_2 - a_3 - \mu_H & -a_4 & a_5 - a_6 - a_7 & \phi_H & 0 & -a_8 \\ a_1 + a_2 + a_3 & a_4 - \alpha_H - \mu_H & a_7 & 0 & 0 & a_8 \\ 0 & \alpha_H & -a_5 - a_9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_6 & -\phi_H - \mu_H & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_{10} & 0 & -a_{11} - a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & a_{10} & 0 & a_{11} & -a_{12} \end{pmatrix}$$

dengan

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{\beta_1 \varepsilon \rho I_V}{N_H}; a_2 = \frac{\beta_a c(1 - u_1)A_H}{N_H}; a_3 = \frac{\beta_S k(1 - u_1)I_H}{N_H}; a_4 = \frac{\beta_a c(1 - u_1)S_H}{N_H}; \\
a_5 &= \phi + \tau u_2; a_6 = (\phi + \tau u_2)v; a_7 = \frac{\beta_S k(1 - u_1)S_H}{N_H}; a_8 = \frac{\beta_1 \varepsilon \rho S_H}{N_H}; a_9 = \delta_H + \mu_H; \\
a_{10} &= \frac{\beta_2 \varepsilon \rho S_V}{N_H}; a_{11} = \frac{\beta_1 \varepsilon \rho I_H}{N_H}; a_{12} = \mu_V + \theta u_3
\end{aligned}$$

Untuk menentukan kestabilan tiap titik setimbang, dievaluasi terlebih dahulu titik setimbang tersebut dengan mensubstitusikan nilai titik setimbang ke matriks Jacobian yang telah didapatkan.

Untuk titik setimbang bebas penyakit $E_0 = \left(\frac{\Lambda_H}{\mu_H}, 0, 0, 0, \frac{\Lambda_V}{\mu_V + \theta u_3}, 0 \right)$ diperoleh

$$J_{E_0} = \begin{pmatrix} -\mu_H & -\beta_a c(1-u_1) & (\phi + \tau u_2)(1-v) - \beta_S k(1-u_1) & \phi_H & 0 & -\beta_1 \varepsilon \rho \\ 0 & \beta_a c(1-u_1) - \alpha_H - \mu_H & \beta_S k(1-u_1) & 0 & 0 & \beta_1 \varepsilon \rho \\ 0 & \alpha_H & -(\phi + \tau u_2) - (\delta_H + \mu_H) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\phi + \tau u_2)v & -\phi_H - \mu_H & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta_2 \varepsilon \rho & 0 & -(\mu_v + \theta u_3) & 0 \\ 0 & 0 & \beta_2 \varepsilon \rho & 0 & a_{11} & -(\mu_v + \theta u_3) \end{pmatrix}$$

Titik setimbang bebas penyakit (E_0) stabil secara lokal jika semua nilai eigen dari $|\lambda I - J_{E_0}| = 0$ bernilai real negatif. Nilai eigen dari $|\lambda I - J_{E_0}| = 0$ semua bernilai real negatif jika $\beta_a c(1-u_1) < \alpha_H + \mu_H$ dan $R_0 < 1$. Sedangkan untuk titik setimbang endemik (E) nilai Jacobian J_E diperoleh dengan memasukkan titik setimbang endemik $E = (S_H^*, A_H^*, I_H^*, R_H^*, S_V^*, I_V^*)$ pada matriks Jacobian J yang stabil secara lokal atau terjadi endemik jika $R_0 > 1$

B. Analisis Kontrol Optimal Model Penyebaran Virus Zika

Dalam menyelesaikan permasalahan kontrol optimal, salah satu metode yang dapat digunakan adalah prinsip Maksimum Pontryagin. Prinsip Maksimum Pontryagin merupakan suatu kondisi sehingga dapat diperoleh penyelesaian kontrol optimal yang sesuai dengan tujuan (memaksimalkan indeks performansi) [10].

Pada masalah kontrol optimal model penyebaran virus zika, tujuan yang akan dicapai adalah meminimumkan penyebaran terinfeksi virus zika dengan diberikan tindakan kontrol $u_1(t)$, $u_2(t)$, dan $u_3(t)$. Kontrol $u_1(t)$ yaitu kontrol penggunaan kondom untuk dapat mencegah penularan virus zika antar individu yang terinfeksi. Kontrol $u_2(t)$ yaitu kontrol untuk pengobatan individu yang sudah terinfeksi. Kontrol $u_3(t)$ yaitu kontrol terhadap penyemprotan insektisida untuk dapat meminimumkan jumlah populasi nyamuk.

Penyelesaian kontrol optimal model penyebaran virus zika menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin dan fungsi objektif untuk model diberikan:

$$J = \min_{u_1, u_2, u_3} \int_0^{T_f} (I_H(t) + \frac{1}{2}(C_1 u_1^2(t) + C_2 u_2^2(t) + C_3 u_3^2(t))) dt$$

dengan kendala

$$0 \leq T \leq T_f; \quad 0 \leq u_1 \leq 1; \quad 0 \leq u_2 \leq 1; \quad 0 \leq u_3 \leq 1$$

dengan

C_1 : bobot pada kontrol penggunaan kondom

C_2 : bobot pada kontrol pengobatan individu terinfeksi

C_3 : bobot pada kontrol penyemprotan insektisida

Untuk menyelesaikan kontrol optimal, harus ditentukan fungsi Lagrangian dan fungsi Hamiltonian. Fungsi Lagrangian dari masalah kontrol ini adalah:

$$L = I_H + \frac{1}{2}(C_1 u_1^2 + C_2 u_2^2 + C_3 u_3^2)$$

Fungsi Hamiltonian (H) dari masalah kontrol ini adalah:

$$\begin{aligned} H &= L(I_H, u_1, u_2, u_3) + \lambda_{S_H} \frac{dS_H}{dt} + \lambda_{A_H} \frac{dA_H}{dt} + \lambda_{I_H} \frac{dI_H}{dt} + \lambda_{R_H} \frac{dR_H}{dt} + \lambda_{S_V} \frac{dS_V}{dt} + \lambda_{I_V} \frac{dI_V}{dt} \\ H &= I_H + \frac{1}{2}(C_1 u_1^2 + C_2 u_2^2 + C_3 u_3^2) \\ &\quad + \lambda_{S_H} \left(\Lambda_H + \varphi_H R_H + (\phi + \tau u_2) I_H - (\phi + \tau u_2) v I_H - \frac{\beta_1 \varepsilon \rho I_V S_H}{N_H} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\beta_a c(1 - u_1) A_H S_H}{N_H} - \frac{\beta_s k(1 - u_1) I_H S_H}{N_H} - \mu_H S_H \right) \\ &\quad + \lambda_{A_H} \left(\frac{\beta_1 \varepsilon \rho I_V S_H}{N_H} + \frac{\beta_a c(1 - u_1) A_H S_H}{N_H} + \frac{\beta_s k(1 - u_1) I_H S_H}{N_H} - \alpha_H A_H \right. \\ &\quad \left. - \mu_H A_H \right) + \lambda_{I_H} (\alpha_H A_H - (\phi + \tau u_2) I_H - (\mu_H + \delta_H) I_H) \\ &\quad + \lambda_{R_H} ((\phi + \tau u_2) v I_H - \phi_H R_H - \mu_H R_H) \\ &\quad + \lambda_{S_V} \left(\Lambda_V - \frac{\beta_2 \varepsilon \rho I_H S_V}{N_H} - (\mu_V + \theta u_3) S_V \right) \\ &\quad + \lambda_{I_V} \left(\frac{\beta_2 \varepsilon \rho I_H S_V}{N_H} - (\mu_V + \theta u_3) I_V \right) \end{aligned}$$

Untuk mendapatkan persamaan state dan costate yang optimal dilakukan dengan menurunkan persamaan parsial fungsi Hamiltonian (H) seperti berikut:

Untuk persamaan state yang optimal:

$$\begin{aligned} \dot{S}_H^* &= \frac{\partial H}{\partial \lambda_{S_H}} = \Lambda_H + \varphi_H R_H + (\phi + \tau u_2) I_H - (\phi + \tau u_2) v I_H - \frac{\beta_1 \varepsilon \rho I_V S_H}{N_H} \\ &\quad - \frac{\beta_a c(1 - u_1) A_H S_H}{N_H} - \frac{\beta_s k(1 - u_1) I_H S_H}{N_H} - \mu_H S_H \\ \dot{A}_H^* &= \frac{\partial H}{\partial \lambda_{A_H}} = \frac{\beta_1 \varepsilon \rho I_V S_H}{N_H} + \frac{\beta_a c(1 - u_1) A_H S_H}{N_H} + \frac{\beta_s k(1 - u_1) I_H S_H}{N_H} - \alpha_H A_H - \mu_H A_H \\ \dot{I}_H^* &= \frac{\partial H}{\partial \lambda_{I_H}} = \alpha_H A_H - (\phi + \tau u_2) I_H - (\mu_H + \delta_H) I_H \\ \dot{R}_H^* &= \frac{\partial H}{\partial \lambda_{R_H}} = (\phi + \tau u_2) v I_H - \phi_H R_H - \mu_H R_H \\ \dot{S}_V^* &= \frac{\partial H}{\partial \lambda_{S_V}} = \Lambda_V - \frac{\beta_2 \varepsilon \rho I_H S_V}{N_H} - (\mu_V + \theta u_3) S_V \end{aligned}$$

$$i_V^* = \frac{\partial H}{\partial \lambda_{I_V}} = \frac{\beta_2 \varepsilon \rho I_H S_V}{N_H} - (\mu_V + \theta u_3) I_V$$

Untuk persamaan costate yang optimal:

$$\lambda_{S_H}' = -\frac{\partial H}{\partial S_H} = (\lambda_{S_H} - \lambda_{A_H}) \left[\frac{\beta_1 \varepsilon \rho I_V}{N_H} + \frac{\beta_a c(1-u_1)A_H}{N_H} + \frac{\beta_S k(1-u_1)I_H}{N_H} \right] + \lambda_{S_H} \mu_H$$

$$\lambda_{A_H}' = -\frac{\partial H}{\partial A_H} = (\lambda_{S_H} - \lambda_{A_H}) \frac{\beta_a c(1-u_1)S_H}{N_H} + \alpha_H (\lambda_{A_H} - \lambda_{I_H}) + \lambda_{A_H} \mu_H$$

$$\lambda_{I_H}' = -\frac{\partial H}{\partial I_H} = (\lambda_{S_H} - \lambda_{A_H}) \frac{\beta_S k(1-u_1)S_H}{N_H} + (\lambda_{S_V} - \lambda_{I_V}) \frac{\beta_2 \varepsilon \rho S_V}{N_H} - \lambda_{S_H} (\phi + \tau u_2)(1-v) \\ + \lambda_{I_H} (\phi + \tau u_2 + \mu_H + \delta_H) - \lambda_{R_H} (\phi + \tau u_2)v$$

$$\lambda_{R_H}' = -\frac{\partial H}{\partial R_H} = (\lambda_{R_H} - \lambda_{S_H}) \varphi_H + \lambda_{R_H} \mu_H$$

$$\lambda_{S_V}' = -\frac{\partial H}{\partial S_V} = (\lambda_{S_V} - \lambda_{I_V}) \frac{\beta_2 \varepsilon \rho I_H}{N_H} + \lambda_{S_V} (\mu_V + \theta u_3)$$

$$\lambda_{I_V}' = -\frac{\partial H}{\partial I_V} = (\lambda_{S_H} - \lambda_{A_H}) \frac{\beta_1 \varepsilon \rho S_H}{N_H} + \lambda_{I_V} (\mu_V + \theta u_3)$$

Kondisi optimal dicapai dengan cara menurunkan fungsi Hamiltonian terhadap $u_1, u_2,$ dan u_3 .

Berdasarkan prinsip optimal, maka

$$\frac{\partial H}{\partial u_1} = \frac{\partial H}{\partial u_2} = \frac{\partial H}{\partial u_3} = 0$$

sehingga diperoleh kontrol optimal sebagai berikut:

$$u_1^* = \max \left\{ 0, \min \left(\frac{(\lambda_{A_H} - \lambda_{S_H}) \left[\frac{\beta_a c A_H S_H}{N_H} + \frac{\beta_S k I_H S_H}{N_H} \right]}{C_1} \right) \right\}$$

$$u_2^* = \max \left\{ 0, \min \left(\frac{I_H (\tau [(\lambda_{I_H} - \lambda_{S_H}) + (\lambda_{S_H} - \lambda_{R_H})v])}{C_2} \right) \right\}$$

$$u_3^* = \max \left\{ 0, \min \left(\frac{\theta (\lambda_{S_V} S_V - \lambda_{I_V} I_V)}{C_3} \right) \right\}$$

3 Hasil dan Pembahasan

Penyelesaian kontrol optimal sulit diselesaikan secara analitik sehingga pada penyelesaian kontrol optimal ini diselesaikan secara numerik. Hal ini dilakukan dengan mensimulasikan permasalahan kontrol optimal menggunakan metode Range-Kutta Orde 4 untuk menentukan sifat

kestabilan dari titik setimbang endemik dengan nilai awal dan parameter seperti yang ditunjukkan dalam Tabel 1 dan Tabel 2.

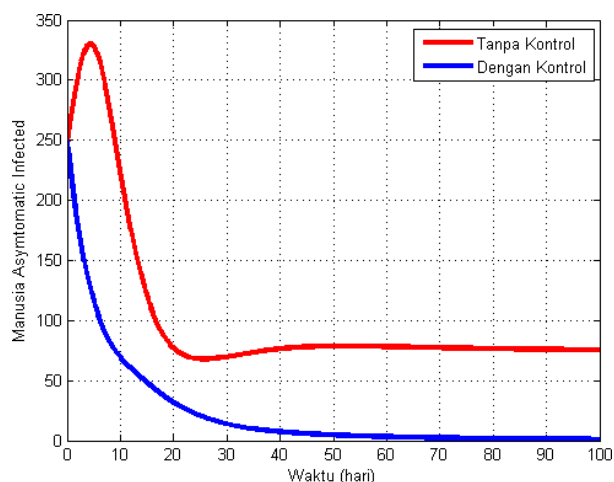
Tabel 1. Nilai Awal Sub-Populasi untuk Simulasi Numerik Kontrol Optimal

Sub-Populasi	Nilai Awal	Sumber
S_H	750	[7]
A_H	250	[7]
I_H	10	[7]
R_H	20	[7]
S_V	10000	[7]
I_V	500	[7]

Tabel 2. Nilai Parameter untuk Simulasi Numerik Kontrol Optimal

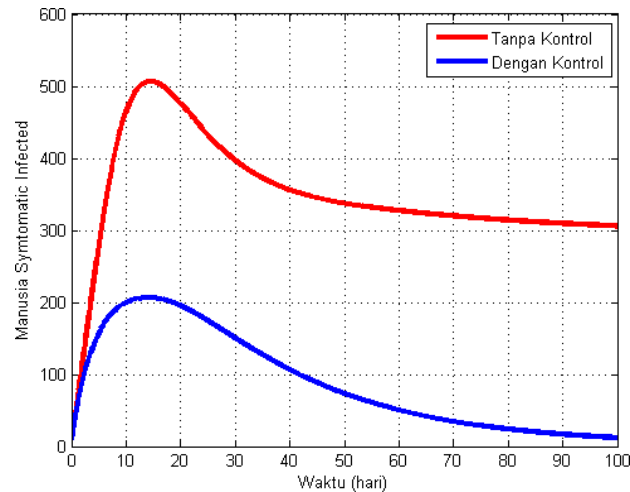
Parameter	Nilai Parameter	Sumber
Λ_H	0.000011	[7]
ϕ	0.05	[7]
τ	0.15	[7]
ν	0.023	[7]
φ_H	0.02	[7]
ε	0.5	[7]
ρ	0.1	[7]
c	0.05	[7]
k	0.05	[7]
β_1	0.4	[7]
β_a	0.6	[7]
β_S	0.3	[7]
μ_H	0.000046	[7]
α_H	0.2	[7]
δ_H	0.0003	[7]
Λ_V	0.071	[7]
β_2	0.5	[7]
μ_V	0.071	[7]
θ	0.15	[11]
C_1	1	Asumsi
C_2	2	Asumsi
C_3	1,5	Asumsi

Berdasarkan nilai parameter yang diberikan pada Tabel 2 diperoleh bilangan reproduksi dasar sebelum pemberian kontrol adalah $R_0 = 1.061$ Karena $R_0 > 1$, maka dapat dikatakan terjadi penyebaran virus zika pada kedua populasi, sehingga perlu adanya kontrol untuk dapat mengurangi penyebaran virus zika tersebut. Dengan pemberian kontrol $u_1(t)$ yaitu kontrol penggunaan kondom untuk dapat mencegah penularan virus zika antar individu yang terinfeksi, kontrol $u_2(t)$ yaitu kontrol untuk pengobatan individu yang sudah terinfeksi, dan kontrol $u_3(t)$ yaitu kontrol terhadap penyemprotan insektisida untuk dapat meminimumkan jumlah populasi nyamuk, didapatkan hasil simulasi seperti ditunjukkan pada Gambar 2.



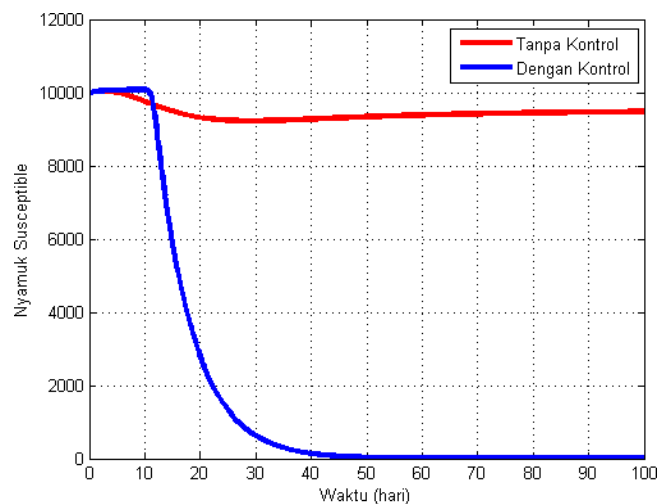
Gambar 2. Grafik Sub-populasi Manusia Asymptomatic Infected Sebelum dan Sesudah dikontrol

Gambar 2 menunjukkan perbedaan jumlah sub-populasi manusia *Asymptomatic Infected* sebelum dan sesudah dikontrol. Sub-populasi manusia *Asymptomatic Infected* sebelum di kontrol dengan kondisi awal $A_H(0) = 250$ meningkat akibat terinfeksi virus zika pada saat kurang lebih 5 hari sehingga jumlah manusia *Asymptomatic Infected* menjadi 330 orang, kemudian menurun lalu stabil pada saat kurang lebih hari ke- 45 dengan jumlah manusia *Asymptomatic Infected* 80 orang. Sedangkan ketika sub-populasi manusia *Asymptomatic Infected* tersebut diberikan kontrol $u_1(t)$, $u_2(t)$, dan $u_3(t)$ terjadi penurunan lebih cepat sejak hari pertama hingga pada hari ke-70 jumlah manusia *Asymptomatic Infected* setelah dikontrol mendekati nol. Ini berarti pemberian kontrol $u_1(t)$, $u_2(t)$, dan $u_3(t)$ efektif dalam mengurangi jumlah sub-populasi manusia yang telah terinfeksi virus zika namun gejala yang ditimbulkan belum tampak.



Gambar 3. Grafik Sub-populasi Manusia Symtomatic Infected Sebelum dan Sesudah dikontrol

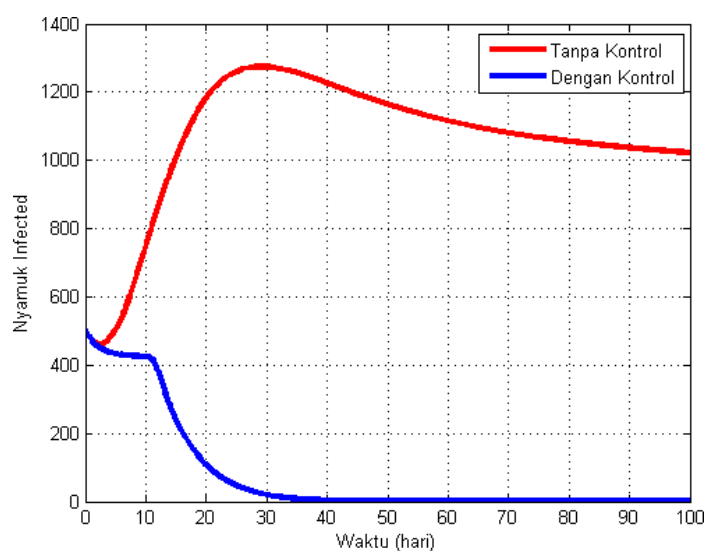
Gambar 3 menunjukkan perbedaan jumlah sub-populasi manusia Symtomatic Infected sebelum dan sesudah dikontrol. Sub-populasi manusia Symtomatic Infected sebelum di kontrol dengan kondisi awal $I_H = 10$ meningkat pada saat kurang lebih 15 hari akibat terinfeksi virus zika sehingga jumlah manusia *Symtomatic Infected* menjadi 505 orang, kemudian menurun sampai hari ke-100 sehingga jumlah manusia *Symtomatic Infected* tersebut menjadi 305 orang. Sedangkan, ketika sub-populasi manusia *Symtomatic Infected* tersebut diberikan kontrol $u_1(t)$, $u_2(t)$, dan $u_3(t)$ pertumbuhan jumlah sub-populasi tersebut tidak lebih tinggi dari pertumbuhan jumlah sub-populasi sebelum dikontrol. Sampai hari ke-100 jumlah sub-populasi manusia Symtomatic Infected setelah dikontrol menjadi 12 orang. Ini berarti pemberian kontrol $u_1(t)$, $u_2(t)$, dan $u_3(t)$ efektif dalam mengurangi jumlah sub-populasi manusia yang telah terinfeksi virus zika.



Gambar 4. Grafik Sub-populasi Nyamuk *Susceptible* Sebelum dan Sesudah dikontrol

Gambar 4 menunjukkan perbedaan jumlah sub-populasi nyamuk *Susceptible* sebelum dan sesudah dikontrol. Sub-populasi nyamuk *Susceptible* sebelum di kontrol dengan kondisi awal $S_V(0) = 10000$ menurun pada saat kurang lebih selama 25 hari akibat terinfeksi virus zika

sehingga jumlah nyamuk *Susceptible* menjadi 9200 dan kemudian meningkat sampai hari ke-100 hingga jumlah nyamuk *Susceptible* menjadi 9500. Sedangkan, ketika sub-populasi nyamuk *Susceptible* tersebut diberikan kontrol $u_1(t)$, $u_2(t)$, dan $u_3(t)$ terjadi penurunan lebih cepat dari hari ke-10 sampai hari ke-50 hingga jumlah nyamuk *Susceptible* mendekati nol. Jadi, jumlah sub-populasi nyamuk *Susceptible* tersebut berkurang daripada tanpa adanya pengontrolan. Ini berarti pemberian kontrol $u_1(t)$, $u_2(t)$, dan $u_3(t)$ efektif dalam mengurangi jumlah sub-populasi nyamuk sehat atau rentan dalam penyebaran virus zika.



Gambar 5. Grafik Sub-populasi Nyamuk *Infected* Sebelum dan Sesudah dikontrol

Gambar 5 menunjukkan perbedaan jumlah sub-populasi nyamuk *Infected*. Sub-populasi nyamuk *Infected* sebelum di kontrol dengan kondisi awal $I_V(0) = 500$ meningkat pada saat kurang lebih selama 29 hari akibat terinfeksi virus zika sehingga jumlah nyamuk *Infected* menjadi 1275 dan kemudian menurun sampai hari ke-100 hingga jumlah nyamuk *Infected* menjadi 1020. Sedangkan, ketika sub-populasi nyamuk *Infected* tersebut diberikan kontrol $u_1(t)$, $u_2(t)$, dan $u_3(t)$ terjadi penurunan lebih cepat dari hari pertama hingga jumlah nyamuk *Infected* mendekati nol pada hari ke-40. Jadi, sub-populasi nyamuk *Infected* tersebut berkurang daripada tanpa adanya pengontrolan. Ini berarti pemberian kontrol $u_1(t)$, $u_2(t)$, dan $u_3(t)$ efektif dalam mengurangi jumlah sub-populasi nyamuk yang terinfeksi dalam penyebaran virus zika.

Dari hasil simulasi, didapatkan nilai fungsi objektif (J) dengan dan tanpa kontrol adalah sebagai berikut:

Simulasi	Hasil Fungsi Objektif
Simulasi tanpa kontrol	344.4906
Simulasi dengan kontrol	1.0586

Dari hasil perhitungan fungsi objektif dapat diamati bahwa simulasi dengan kontrol memiliki

nilai fungsi objektif yang lebih kecil dibandingkan dengan simulasi tanpa kontrol. Ini berarti pemberian kontrol yang dilakukan dapat meminimumkan fungsi objektif sehingga dapat meminimumkan penyebaran virus zika.

4 Simpulan

Berdasarkan analisis dan pembahasan yang telah dibahas, maka diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Pada kestabilan model dinamik penyebaran virus zika, sistem akan stabil ketika bilangan reproduksi dasar kurang dari satu, dimana kondisi tersebut setiap individu manusia maupun nyamuk yang terinfeksi virus zika dapat menularkan virus rata-rata kurang dari satu individu baru atau dengan kata lain tidak terjadi penyebaran virus. Sebaliknya, jika bilangan reproduksi dasar lebih dari satu, maka setiap individu manusia maupun nyamuk yang terinfeksi virus zika dapat menularkan virus rata-rata lebih dari satu individu baru atau dengan kata lain terjadi penyebaran virus (endemik).
2. Dengan pemberian kontrol penggunaan kondom, kontrol pengobatan individu terinfeksi, dan kontrol penyemprotan insektisida didapatkan dinamika jumlah sub-populasi manusia yang terinfeksi virus zika dan jumlah populasi nyamuk yang menurun dibandingkan dengan sebelum diberikan kontrol. Selain itu juga, didapatkan nilai fungsi objektif dengan adanya kontrol yang lebih kecil dibandingkan dengan nilai fungsi objektif tanpa adanya kontrol. Ini mempunyai arti bahwa pemberian kontrol dapat meminimumkan penyebaran virus zika.

5 Daftar Pustaka

- [1] A. D. Haddow, A.J. Schuh, C.Y. Yasuda, *et al.*, "Genetic characterization of zika virus strains: Geographic expansion of the asian lineage," *PLoS Negl Trop Dis*, vol. 6, no. 2, Feb. 2012, doi: 10.1371/journal.pntd.0001477.
- [2] "ZIKA SITUATION REPORT 5 FEBRUARY 2016 SUMMARY." [Online]. Available: <http://governor.hawaii.gov/newsroom/doh-news-release-hawaii-department-of-health-receives-confirmation-of-zika->, diakses 20 Agustus 2022
- [3] "Morbidity and Mortality Weekly Report." [Online]. Available: <http://www.cdc.gov/mmwr>, diakses 20 Agustus 2022
- [4] E. Bonyah and K. O. Okosun, "Mathematical modeling of Zika virus," *Asian Pac J Trop Dis*, vol. 6, no. 9, pp. 673–679, Sep. 2016, doi: 10.1016/S2222-1808(16)61108-8.

- [5] D. Gao, Lou. Y, H. Daihai, C. P. Trafis, Kuang. Y, C. Gerardo, R. Shiguan, "Prevention and Control of Zika as a Mosquito-Borne and Sexually Transmitted Disease: A Mathematical Modeling Analysis," *Sci Rep*, vol. 6, Jun. 2016, doi: 10.1038/srep28070.
- [6] A. J. Kucharski, S. Funk, R. M. Eggo, H. P. Mallet, W. J. Edmunds, and E. J. Nilles, "Transmission Dynamics of Zika Virus in Island Populations: A Modelling Analysis of the 2013–14 French Polynesia Outbreak," *PLoS Negl Trop Dis*, vol. 10, no. 5, 2016, doi: 10.1371/journal.pntd.0004726.
- [7] A. A. Momoh, "Optimal Control of Intervention Strategies and Cost Effectiveness Analysis for a Zika Virus Model." *Operations Research for Health Care*, vol. 18, pp: 99-111, 2018
- [8] L. Perko, "Texts in Applied Mathematics 7 Differential Equations and Dynamical Systems Springer."
- [9] P. Van Den Driessche and J. Watmough, "Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission." *Mathematical Biosciences*, vol. 180, no. 1, pp: 29-48, 2002
- [10] D. Subbaram, "SINGULAR PERTURBATIONS AND TIME SCALES IN CONTROL THEORY AND APPLICATIONS: AN OVERVIEW 1," 2002.