

Aplikasi Metode Adams-Bashforth-Moulton Model Verhulst Pada Hasil Panen Padi di Kabupaten Jombang

Lukman Hanafi¹, Kamiran², Sadjidon³, Rizki Eko Prasetyo⁴

^{1,2,3,4}Departemen Matematika ITS Surabaya Indonesia

email : lukman@matematika.its.ac.id

Diajukan: 14 Nopember 2022, Diperbaiki: 13 Nopember 2023, Diterima: 20 Maret 2024

Abstrak

Padi merupakan salah satu tanaman utama hasil komoditas pertanian yang menjadi makanan pokok sebagian besar masyarakat Indonesia. Ketersediaan padi diperlukan untuk mengantisipasi munculnya permasalahan pada masa mendatang seperti pertambahan populasi, perubahan musim, atau sebagai komoditas ekspor. Estimasi ketersediaan padi bisa dilakukan dengan membentuk model matematika, dimana model matematika yang digunakan adalah model logistik Verhulst. Model Verhulst dapat diselesaikan pertama menggunakan metode Runge-Kutta untuk memperoleh empat nilai awal yang digunakan untuk mendapatkan nilai pendekatan dengan menggunakan metode numerik banyak langkah yaitu Metode Adams-Bashforth-Moulton. Setelah diperoleh solusi numerik pendekatan maka dilakukan perhitungan akurasi berdasarkan galat yang dihasilkan. Estimasi ketersediaan padi pada tahun 2008-2021 dengan menggunakan ukuran langkah $h=1$ dan kapasitas tampung (*carrying capacity*) hasil panen padi di Kabupaten Jombang dibatasi sebesar 500,000 ton, 600,000 ton, dan 700,000 ton diperoleh nilai galat rata-rata dari solusi numerik metode Adams-Bashforth-Moulton sebesar 3.35%, 3.39%, dan 3.36%.

Kata Kunci: Model Verhulst, Metode Runge-Kutta, Metode Adams-Bashforth-Moulton.

Abstract

Rice is one of the main crops produced by agricultural commodities which is staple food of most Indonesian people. The availability of rice is needed to anticipate the emergence of problems in the future such as population growth, changes in seasons, or as an export commodity. Estimation of rice availability in the future can be done by forming a mathematical model, where the mathematical model used is the Verhulst logistic model. The differential equations in the Verhulst model are first solved using Runge-Kutta method to obtain four initial solutions to be used in finding approximate values using the Adams-Bashforth-Moulton method. After obtaining an approximate solution, a comparison of the accuracy based on error is carried out. The availability estimation rice in 2008-2021 using Verhulst model with a step size $h = 1$ and carrying capacity rice harvest at Jombang Regency limited 500,000 tons, 600,000 tons, and 700,000 tons, obtained rate error values from numerical solution of Adams-Bashforth-Moulton method is 3.35%, 3.39%, and 3.36%.

Keywords: Verhulst Model, Runge-Kutta Method, Adams-Bashforth-Moulton Method.

1 Pendahuluan

Padi merupakan salah satu tanaman utama hasil komoditas pertanian yang menjadi makanan pokok bagi sebagian besar masyarakat Indonesia. Banyak faktor yang mempengaruhi jumlah ketersediaan hasil panen padi, seperti contohnya perubahan iklim, lahan yang sempit, keterbatasan modal, maupun kurangnya penguasaan teknologi budidaya padi [1]. Salah satu cara untuk mengetahui perkiraan ketersediaan hasil panen padi pada tahun mendatang yaitu dengan

melakukan pembentukan model matematika. Model matematika sangat penting untuk menganalisis sebuah masalah pada semua aspek kehidupan. Model matematika disusun dengan menggambarkan keadaan pada kehidupan nyata dan dari keadaan tersebut diperoleh suatu persamaan diferensial [2].

Banyak kejadian yang dapat dibuat persamaan diferensialnya seperti model pegas, model rangkaian listrik, model penyebaran penyakit, model pertumbuhan populasi dan lain-lain. Ada empat jenis model pertumbuhan populasi yaitu model diskrit, model eksponensial, model pertumbuhan populasi dengan distribusi umur, dan model logistik. Dari empat jenis model tersebut model logistik yang dikenalkan oleh Pierre Francois Verhulst merupakan model pertumbuhan populasi yang paling akurat. Model pertumbuhan populasi logistik menurut Verhulst merupakan model matematika dengan persamaan diferensial tak linier.

Pada bentuk persamaan diferensial tertentu penyelesaian secara analitik tidak mudah dilakukan. Sebaliknya metode numerik dapat menjadi penyelesaian alternatif ketika metode analitik tidak dapat dilakukan [3]. Metode numerik pada umumnya memiliki dua jenis penyelesaian persamaan diferensial, yaitu metode satu langkah (*single step*) dan metode banyak langkah (*multi-step*). Metode Adams merupakan salah satu contoh metode *multi-step* yang terbagi menjadi dua jenis yaitu metode terbuka atau metode Adams-Bashforth dan metode tertutup atau metode Adams-Moulton [4]. Metode satu langkah membutuhkan sebuah nilai awal sedangkan metode banyak langkah membutuhkan beberapa nilai awal. Metode banyak langkah seringkali disebut dengan metode prediksi-koreksi karena dalam proses mendapatkan solusi terdapat dua tahap yaitu tahap pertama menemukan nilai prediksi dengan menggunakan persamaan *predictor* dan tahap kedua menemukan nilai koreksi dengan menggunakan persamaan *corrector*. Metode banyak langkah yang sering digunakan adalah metode Adams-Bashforth-Moulton [5]. Metode Adams-Bashforth dapat digunakan sebagai persamaan *predictor* dan metode Adams-Moulton dapat digunakan sebagai persamaan *corrector* dalam penyelesaian suatu persamaan diferensial. [6].

2 Metode Penelitian

2.1 Model Verhulst

Model logistik Verhulst merupakan sebuah model matematika mengenai pertumbuhan populasi yang dikenalkan oleh Pierre-Francois-Verhulst pada tahun 1838. Verhulst mengajukan sebuah persamaan diferensial berdasarkan model eksponensial Malthus [7].



Gambar 1. Grafik Model Malthus (kiri) dan Grafik Model Verhulst (kanan)
Berikut ini merupakan model logistik Verhulst:

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) \quad (1)$$

Pada model Verhulst terdapat peubah K yang disebut dengan kapasitas tampung (*carrying capacity*) yang menggambarkan kapasitas lingkungan terhadap batas populasi yang sudah tidak dapat dilampaui [8]. Nilai r (tingkat pertumbuhan populasi) dapat ditentukan dengan melakukan integrasi pada model Verhulst dengan interval $[0, t]$ sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut [9], [10]:

$$r = \frac{1}{t} \left(\ln \left| \frac{N_t}{N_0} \right| + \ln \left| \frac{K - N_0}{K - N_t} \right| \right) \quad (2)$$

dengan:

t : waktu

N_0 : jumlah populasi awal

N_t : jumlah populasi pada saat t

2.2 Metode Numerik

Metode numerik merupakan suatu metode yang digunakan untuk menyelesaikan model matematika rumit yang sulit atau tidak dapat diselesaikan dengan metode analitik. Dengan metode numerik diperoleh solusi yang menghampiri solusi sejatinya sehingga ada selisih antara solusi pendekatan dan solusi sejati yang disebut dengan galat (*error*). Ada dua jenis galat yaitu galat mutlak dan galat relatif. Galat mutlak hanya menunjukkan selisih antara solusi pendekatan dan solusi sejatinya sedangkan galat relatif menunjukkan tingkat ketelitian antara selisih solusi pendekatan dan solusi sejatinya. Galat mutlak dan galat relatif didefinisikan [11]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_m &= |y - y_i| \\ \varepsilon_r &= \frac{|y - y_i|}{y} \times 100\% \end{aligned} \quad (3)$$

dengan:

ε_m : galat mutlak

ε_r : galat relatif

y : solusi sejati

y_i : solusi pendekatan

Metode Runge-Kutta merupakan salah satu metode dalam penyelesaian persamaan diferensial secara numerik dengan pendekatan akurasi dari deret Taylor tanpa memerlukan perhitungan turunan yang cukup tinggi. Bentuk umum persamaan diferensial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) ; y(x_0) = y_0$$

Penyelesaian dengan metode Runge-Kutta orde empat adalah [6]:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (4)$$

dengan:

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + k_1 \frac{h}{2}\right)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + k_2 \frac{h}{2}\right)$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + k_3 h)$$

Metode integrasi Adams-Bashforth (AB) merupakan metode banyak langkah (*multi-step*) yang termasuk dalam metode eksplisit demikian pula dengan metode integrasi Adams-Moulton (AM) yang merupakan metode banyak langkah namun termasuk dalam metode implisit. Kombinasi dari metode prediksi Adams-Bashforth dan metode koreksi Adams-Moulton dapat disebut dengan metode Adams-Bashforth-Moulton (ABM) [12]. Persamaan *predictor* Adams-Bashforth adalah sebagai berikut:

$$y_{i+1}^{(p)} = y_i + \frac{h}{24}[55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}] \quad (5)$$

dan persamaan *corrector* Adams-Moulton adalah sebagai berikut:

$$y_{i+1}^{(c)} = y_i + \frac{h}{24}[9f_{i+1} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2}] \quad (6)$$

4 Hasil dan Pembahasan

3.1 Analisis Data

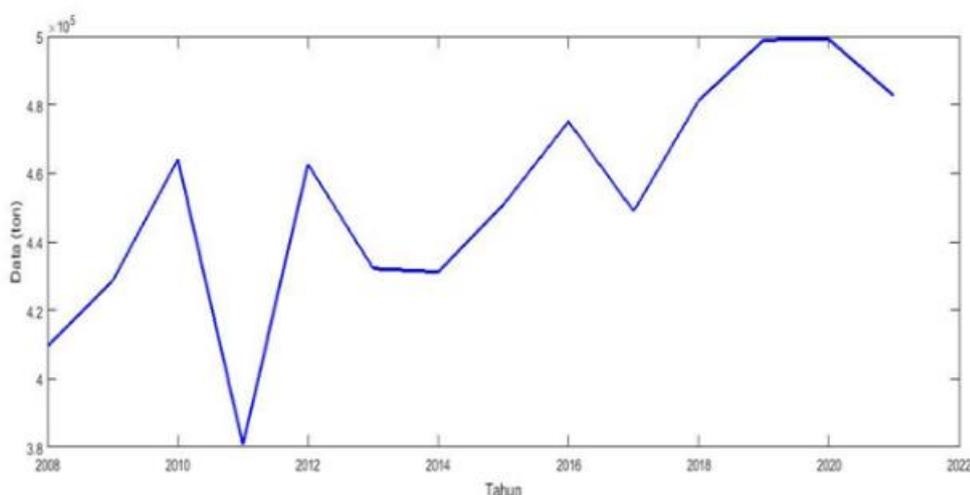
Data yang digunakan yaitu berupa data sekunder yaitu data jumlah hasil panen padi sawah di Kabupaten Jombang pada tahun 2008 sampai 2021. Data tersebut diperoleh dari Dinas Pertanian Kabupaten Jombang.

Tabel 1. Data Hasil Panen Padi Kabupaten Jombang

Nomor	Tahun	Produksi (ton)
1	2008	409,156
2	2009	428,617
3	2010	463,979
4	2011	380,819
5	2012	462,628

Nomor	Tahun	Produksi (ton)
6	2013	432,173
7	2014	431,175
8	2015	450,810
9	2016	475,079
10	2017	448,880
11	2018	481,236
12	2019	498,900
13	2020	499,019
14	2021	482,576

Dalam rentang waktu empat belas tahun hasil panen padi tertinggi berada pada tahun 2020 dengan jumlah panen padi sebanyak 499,019 ton, sedangkan hasil panen padi terendah berada pada tahun 2011 dengan jumlah panen padi sebanyak 380,819 ton.



Gambar 2. Hasil Panen Padi Kabupaten Jombang

Model Verhulst pada Persamaan (1) terdapat variabel K yang menunjukkan kapasitas tampung populasi dalam suatu lingkungan, karena jumlah produksi panen padi di Kabupaten Jombang sejak 2008 hingga 2021 berada di bawah 500,000 ton maka dapat dibentuk beberapa skenario model pertumbuhan populasi dimana ada tiga nilai kapasitas tampung hasil panen padi di Kabupaten Jombang yaitu sebesar 500,000 ton, 600,000 ton, dan 700,000 ton. Untuk menentukan tingkat pertumbuhan hasil panen padi dalam rentang waktu empat belas tahun digunakan Persamaan (2) sebagai berikut:

Tingkat pertumbuhan hasil panen padi dengan $K = 500000$:

$$r = 0.1297 \approx 13\% \quad (7)$$

Tingkat pertumbuhan hasil panen padi dengan $K = 600000$:

$$r = 0.0464 \approx 4.6\% \quad (8)$$

Tingkat pertumbuhan hasil panen padi dengan $K = 700000$:

$$r = 0.0326 \approx 3.3\% \quad (9)$$

Diperoleh tingkat pertumbuhan hasil panen padi untuk kapasitas tampung 500,000 ton, 600,000 ton, dan 700,000 ton sebesar 13%, 4.6%, dan 3.3% secara berturut-turut. Apabila nilai r pada Persamaan (7), (8), dan (9) disubstitusikan pada Persamaan (1) maka diperoleh sebuah model pertumbuhan populasi panen padi di Kabupaten Jombang dengan tiga nilai K sebagai berikut:

Model pertumbuhan populasi dengan $K = 500,000$:

$$\frac{dN}{dt} = 0.13N \left(1 - \frac{N}{500,000}\right) \tag{10}$$

Model pertumbuhan populasi dengan $K = 600,000$:

$$\frac{dN}{dt} = 0.046N \left(1 - \frac{N}{600,000}\right) \tag{11}$$

Model pertumbuhan populasi dengan $K = 700,000$:

$$\frac{dN}{dt} = 0.033N \left(1 - \frac{N}{700,000}\right) \tag{12}$$

3.2 Solusi Awal Model Verhulst

Hasil solusi awal model Verhulst pada Persamaan (10), Persamaan (11), Persamaan (12) menggunakan metode Runge-Kutta orde empat pada Persamaan (4) dapat ditabelkan sebagai berikut:

Tabel 2. Solusi Awal dengan $K = 500,000$

Tahun	h	i	N_{i+1}	f_i
2008	1	0	409,156	9,664.0355926
2009		1	418,423.4847109	8,874.7177474
2010		2	426,914.4194588	8,112.3349288
2011		3	434,659.5802826	7,384.2182466

Tabel 3. Solusi Awal dengan Awal $K = 600,000$

Tahun	h	i	N_{i+1}	f_i
2008	1	0	409,156	5,986.5141876
2009		1	415,091.7930755	5,884.4640694
2010		2	420,923.7691416	5,778.9372243
2011		3	426,648.6227800	5,670.2763533

Tabel 4. Solusi Awal dengan $K = 600,000$

Tahun	h	i	N_{i+1}	f_i
2008	1	0	409,156	5,610.0267613
2009		1	414,749.9188927	5,577.3511202
2010		2	420,309.7939613	5,541.9508354
2011		3	425,832.9365421	5,503.8986704

3.3 Solusi Numerik Adams-Bashforth-Moulton

Setelah diperoleh solusi awal maka selanjutnya empat solusi awal tersebut digunakan untuk menentukan solusi numerik menggunakan Metode Adams-Bashforth-Moulton pada Persamaan (5) dan Persamaan (6), sehingga diperoleh hasil estimasi ketersediaan padi di Kabupaten Jombang sebagai berikut:

Tabel 5. Solusi Numerik Metode ABM dengan $K = 500,000$

Tahun	i	$N_{i+1}^{(p)}$	$N_{i+1}^{(c)}$
2008	0		409,156
2009	1		418,423.4847109
2010	2		426,914.4194588
2011	3		434,659.5802826
2012	4	441,696.7669112	441,695.9839388
2013	5	448,065.8984137	448,065.1880702
2014	6	453,811.9799849	453,811.3736046
2015	7	458,980.5052125	458,979.9963186
2016	8	463,617.0227249	463,616.6124085
2017	9	467,766.2677519	467,765.9492357
2018	10	471,471.4360790	471,471.1995869
2019	11	474,773.6770526	474,773.5113745
2020	12	477,711.7498014	477,711.6433972
2021	13	480,321.8162070	480,321.7579975

Tabel 6. Solusi Numerik Metode ABM dengan $K = 600,000$

Tahun	i	$N_{i+1}^{(p)}$	$N_{i+1}^{(c)}$
2008	0		409,156
2009	1		415,091.7930755
2010	2		420,923.7691416
2011	3		426,648.6227800
2012	4	432,263.3913666	432,263.3911726
2013	5	437,765.4535161	437,765.4525795
2014	6	443,152.5246371	443,152.5230037
2015	7	448,422.6532405	448,422.6509622
2016	8	453,574.2135398	453,574.2106708
2017	9	458,605.8971465	458,605.8937441
2018	10	463,516.7034437	463,516.6995668
2019	11	468,305.9287839	468,305.9244921
2020	12	472,973.1546745	472,973.1500272
2021	13	477,518.2351047	477,518.2301606

Tabel 7. Solusi Numerik Metode ABM dengan $K = 700,000$

Tahun	i	$N_{i+1}^{(p)}$	$N_{i+1}^{(c)}$
2008	0		409,156
2009	1		414,749.9188927
2010	2		420,309.7939613
2011	3		425,832.9365421
2012	4	431,316.7314660	431,316.7332185
2013	5	436,758.6482986	436,758.6499299
2014	6	442,156.2350344	442,156.2365374
2015	7	447,507.1291375	447,507.1305096
2016	8	452,809.0591529	452,809.0603906
2017	9	458,059.8478057	458,059.8489067
2018	10	463,257.4147454	463,257.4157083
2019	11	468,399.7789181	468,399.7797423
2020	12	473,485.0605714	473,485.0612573
2021	13	478,511.4828928	478,511.4834413

3.4 Analisis Galat

Setelah diperoleh solusi numerik dengan metode Adams-Bashforth-Moulton maka dilakukan perhitungan nilai galat relatif antara solusi pendekatan dengan data pada Tabel 1 dengan menggunakan Persamaan (3) diperoleh hasil sebagai berikut:

1. Galat dengan $K = 500,000$

Tabel 8. Galat Metode ABM dengan $K = 500,000$

Tahun	$N_{i+1}^{(c)}$	Produksi (ton)	Galat(%)
2008	409,156	409,156	
2009	418,423.4847109	428,617	
2010	426,914.4194588	463,979	
2011	434,659.5802826	380,819	
2012	441,695.9839388	462,628	4.52
2013	448,065.1880702	432,173	3.68
2014	453,811.3736046	431,175	5.25
2015	458,979.9963186	450,810	1.81
2016	463,616.6124085	475,079	2.41
2017	467,765.9492357	448,880	4.21
2018	471,471.1995869	481,236	2.03
2019	474,773.5113745	498,900	4.84
2020	477,711.6433972	499,019	4.27
2021	480,321.7579975	482,576	0.47
Rata-rata			3.35

2. Galat dengan $K = 600,000$

Tabel 9. Galat Metode ABM dengan $K = 600,000$

Tahun	$N_{i+1}^{(c)}$	Produksi (ton)	Galat (%)
2008	409,156	409,156	
2009	415,091.7930755	428,617	
2010	420,923.7691416	463,979	
2011	426,648.6227800	380,819	
2012	432,263.3911726	462,628	6.56
2013	437,765.4525795	432,173	1.29
2014	443,152.5230037	431,175	2.78
2015	448,422.6509622	450,810	0.53
2016	453,574.2106708	475,079	4.53
2017	458,605.8937441	448,880	2.17
2018	463,516.6995668	481,236	3.68
2019	468,305.9244921	498,900	6.13
2020	472,973.1500272	499,019	5.22
2021	477,518.2301606	482,576	1.05
Rata-rata			3.39

3. Galat dengan $K = 700,000$

Tabel 10. Galat Metode ABM dengan $K = 700,000$

Tahun	$N_{i+1}^{(c)}$	Produksi (ton)	Galat (%)
2008	409,156	409,156	
2009	414,749.9188927	428,617	
2010	420,309.7939613	463,979	
2011	425,832.9365421	380,819	
2012	431,316.7332185	462,628	6.77
2013	436,758.6499299	432,173	1.06

Tahun	$N_{i+1}^{(c)}$	Produksi (ton)	Galat (%)
2014	442,156.2365374	431,175	2.55
2015	447,507.1305096	450,810	0.73
2016	452,809.0603906	475,079	4.69
2017	458,059.8489067	448,880	2.05
2018	463,257.4157083	481,236	3.74
2019	468,399.7797423	498,900	6.11
2020	473,485.0612573	499,019	5.12
2021	478,511.4834413	482,576	0.84
Rata-rata			3.36

4 Simpulan

Berdasarkan analisis dan pembahasan diperoleh kesimpulan berikut: Estimasi ketersediaan padi pada saat nilai *carrying capacity* sebesar 500,000 ton diperoleh rata-rata galat dari metode Adams-Bashforth-Moulton sebesar 3.35%. Selanjutnya pada saat nilai *carrying capacity* sebesar 600,000 ton diperoleh rata-rata galat dari metode Adams-Bashforth-Moulton sebesar 3.39%. Kemudian pada saat nilai *carrying capacity* sebesar 700,000 ton diperoleh rata-rata galat dari metode Adams-Bashforth-Moulton sebesar 3.36%. Estimasi hasil panen padi berdasarkan model Verhulst menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton menunjukkan bahwa terjadi pertumbuhan hasil panen padi setiap tahunnya untuk setiap nilai K yang digunakan.

5 Daftar Pustaka

- [1] Direktorat Jenderal Tanaman Pangan, "Rencana Strategis Direktorat Jenderal Tanaman Pangan Tahun 2020-2024," Jakarta, 2020.
- [2] N. Asiyah and S. Winarko, *Buku Ajar Persamaan Diferensial Biasa*. Surabaya: Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, 2012.
- [3] I. K. A. Atmika, *Diktat Mata Kuliah Metode Numerik*. Teknik Mesin, Fakultas Teknik, Universitas Udayana, 2016.
- [4] K. E. Atkinson, W. Han, and D. Stewart, *Numerical Solution of Ordinary Differential Equations*. Iowa: John Wiley & Sons, Inc., 2009.
- [5] S. Abdullah, "Penerapan Metode Adams-Bashforth-Moulton pada Persamaan Logistik dalam Memprediksi Pertumbuhan Penduduk di Provinsi Sulawesi Selatan," Tugas Akhir Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Alauddin Makassar, 2016.
- [6] R. P. Canale and S. C. Chapra, *Numerical Methods for Engineers*. New York: McGraw-Hill, 2010.

- [7] A. Tsoularis and J. Wallace, "Analysis of Logistic Growth Models," *Math. Biosci.*, vol. 179, no. 1, pp. 23–46, 2002.
- [8] J.-M. Ginoux, "The Paradox of Vito Volterra's Predator-Prey Model," *Lett. Mat.*, vol. 5, no. 4, pp. 305–311, 2017.
- [9] Uce, P. Silvy, R. Suhaemi, and H. Kartika, "Aplikasi Metode Eksponensial dan Logistik dalam Meramalkan Jumlah Penduduk Kabupaten Karawang pada Tahun 2020," *Pros. Semin. Nas. Mat. dan Pendidik. Mat.*, pp. 6–13, 2017.
- [10] W. Putri, "Perbandingan Model Malthus dan Model Verhulst untuk Estimasi Jumlah Penduduk Indonesia Tahun 2000 - 2014," *J. Mat. Univ. Andalas*, vol. 4, no. 1, pp. 1–11, 2015.
- [11] S. Maharani and E. Suprpto, *Analisis Numerik Berbasis Group Investigation untuk Meningkatkan Kemampuan Berpikir Kritis*. Magetan: AE Medika Grafika, 2018.
- [12] A. P. Hayes, "The Adams-Bashforth-Moulton Integration Methods Generalized to an Adaptive Grid," University of Maine, Maine, United State, 2011.