Limits: Journal of Mathematics and Its Applications
E-ISSN: 2579-8936
P-ISSN: 1829-605X
Vol. 20, No. 2, Juli 2023, 219-229
DOI: http://dx.doi.org/10.12962/limits.v20i2.15397

Dimensi Metrik Graf Buckminsterfullerene-Subdivisi dan Buckminsterfullerene-Star

Lyra Yulianti*, Laila Hidayati , Des Welyyanti
Program Studi S1 Matematika,
Departemen Matematika dan Sains Data, FMIPA, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia
e-mail: lyra@sci.unand.ac.id, laila.hdyt3@gmail.com, wely@sci.unand.ac.id

Diajukan: 29 Desember 2022, Diperbaiki: 11 April 2023, Diterima: 13 Juli 2023

Abstrak

Misalkan terdapat graf *Buckminsterfullerene* B_{60} dengan 60 titik. Graf *Buckminsterfullerene-subdivisi*, dinotasikan $B_{60,n}$, $n \geq 1$, dikonstruksi dengan cara melakukan operasi subdivisi terhadap satu sisi tertentu di B_{60}, yaitu penyisipan sebanyak n titik di sisi tersebut. Selanjutnya, Graf *Buckminsterfullerene-star*, dinotasikan $B_{60}5S_n$, $n \geq 1$, dikonstruksi dengan cara mengidentifikasi masing-masing satu titik daun dari lima graf bintang S_n dengan titik yang bersesuaian di B_{60}. Pada artikel ini akan ditentukan dimensi metrik dari $B_{60,n}$ dan $B_{60}5S_n$ untuk $n \geq 1$.
Kata Kunci: Dimensi metrik, himpunan pembeda, *Buckminsterfullerene-subdivisi*, *Buckminsterfullerene-star*.

Abstract

Let B_{60} be the *Buckminsterfullerene* graph on 60 vertices. The *Buckminsterfullerene-subdivision*, denoted by $B_{60,n}$, $n \geq 1$, is constructed by subdividing one particular edge of B_{60} into *n+1* edges. Moreover, *Buckminsterfullerene-star*, denoted by $B_{60}5S_n$, $n \geq 1$, is constructed by identifying one leaf from five stars S_n with the corresponding vertex of B_{60}. This paper will discuss the metric dimension of *Buckminsterfullerene-subdivision* and *Buckminsterfullerene-star* graphs.
Keywords: *Metric dimension, resolving set, Buckminsterfullerene-subdivision, Buckminsterfullerene-star.*

1 Pendahuluan

Konsep dimensi metrik pada suatu graf diperkenalkan secara terpisah oleh Slater [1] dan Harary dan Melter [2]. Selanjutnya, Chartrand dkk. [3] memberikan definisi baku dimensi metrik dari suatu graf terhubung G sebagai berikut. Misalkan terdapat graf terhubung $G = (V, E)$, dan misalkan terdapat himpunan terurut $W = \{w_1, w_2, \cdots, w_k\} \subseteq V(G)$. Representasi titik $v \in V(G)$ terhadap W, dinotasikan $r(v|W)$, didefinisikan sebagai k-vektor

$$r(v|W) = \big(d(v, w_1), d(v, w_2), \dots, d(v, w_k)\big).$$

Jika untuk setiap dua titik u dan v di G diperoleh bahwa $r(u|W) \neq r(v|W)$ maka W dinamakan himpunan pembeda dari G. Himpunan pembeda dengan kardinalitas minimum disebut sebagai himpunan pembeda minimum, sementara nilai kardinalitas minimum tersebut dinamakan dimensi metrik dari G, dinotasikan $dim(G)$. Definisi dan notasi lainnya yang digunakan mengacu ke Diestel [4].

Berikut diberikan beberapa hasil terkait penentuan dimensi metrik dari suatu graf yang merupakan hasil operasi terhadap graf lain yang telah diketahui dimensi metriknya. Pada [5], Saputro dkk. memperoleh dimensi metrik graf hasilkali *lexicographic* dari beberapa graf tertentu. Selanjutnya, pada [6] diberikan batas atas dan batas bawah dimensi metrik graf hasil amalgamasi beberapa graf terhubung sebarang. Putra dkk. [7] menentukan dimensi metrik dari graf hasil operasi join antara graf roda dan siklus, dinotasikan $W_n + C_n$ untuk $n \in \{3,4\}$.

Pada [8] diperoleh dimensi metrik graf hasil operasi amalgamasi graf tangga segitiga diperumum homogen. Hasil pada [8] diperumum oleh Yulianti dkk. [9] dengan menentukan dimensi metrik amalgamasi graf tangga segitiga diperumum sebarang, dinamakan graf *triangle-net*. Selanjutnya, pada [10] diberikan hasil terkait dimensi metrik graf amalgamasi graf lengkap $Amal(nK_m)$ untuk $n \geq 4$ dan $m \geq 4$. Yulianti dkk. [11] memberikan dimensi metrik graf hasil operasi *thorn* dan *thorn*-subdivisi terhadap graf lengkap K_n untuk $n \geq 1$. Kemudian pada [12] diberikan dimensi metrik graf hasil subdivisi terhadap graf Lobster, dengan cara menyisipkan m titik di setiap sisi graf tersebut, dinotasikan $R_n(q,r)_m$ untuk $n, q, r, m \geq 2$.

Andova dkk. [13] membahas tentang graf *fullerene*, yang merupakan representasi dari molekul *fullerene*, suatu molekul *polyhedral* yang terbuat dari atom karbon. Selanjutnya, Akhter dkk. [14] memperoleh dimensi metrik dari graf *(3,6)-fullerene* dan *(4,6)-fullerene*, dimana graf *(k,6)-fullerene* adalah graf *fullerene* dengan semua *face* yang berbentuk k-gon dan hexagon, untuk $k = 3,4,5$. Graf *Buckminsterfullerene* B_{60} yang didefinisikan oleh Kroto dkk. [15] adalah salah satu jenis graf *(5,6)-fullerene* dengan bentuk paling simetris. Putri dkk. [16] memperoleh bahwa dimensi metrik graf B_{60} adalah 3. Amalia dkk. [17] menentukan dimensi metrik graf *Buckminsterfullerene-type* $B_{60}(1,t)$ untuk $1 \leq t \leq 5$. Graf tersebut dikonstruksi dengan mengidentifikasi lima titik terluar dari graf B_{60} dengan lima titik yang bersesuaian di lima salinan graf B_{60}. Selanjutnya, Yulianti dkk. [18] menentukan dimensi metrik dari graf *Buckminsterfullerene-net*, yaitu graf yang berasal dari amalgamasi titik terhadap m salinan graf B_{60} untuk $m \geq 2$. Pada artikel ini akan ditentukan dimensi metrik dari dua graf hasil modifikasi terhadap graf *Buckminsterfullerene* B_{60}, yaitu graf *Buckminsterfullerene-subdivisi* dan graf *Buckminsterfullerene-star*.

Misalkan terdapat graf *Buckminsterfullerene* B_{60} dengan himpunan titik dan himpunan sisi yang didefinisikan oleh Putri dkk. [16] sebagai berikut.

$$V(B_{60}) = \{v_i, z_i | 1 \leq i \leq 5\} \cup \{w_j, y_j | 1 \leq j \leq 15\} \cup \{x_k | 1 \leq k \leq 20\}, \quad (1)$$

$$E(B_{60}) = \{v_l v_{l+1}, z_l z_{l+1} | 1 \leq l \leq 4\} \cup \{w_m w_{m+1}, y_m y_{m+1} | 1 \leq m \leq 14\} \quad (2)$$

$\cup\ \{x_n x_{n+1} | 1 \leq n \leq 19\} \cup \{w_{3l} x_{4l+1}, x_{4l} y_{3l+1}, y_{3l} z_{l+1} | 1 \leq l \leq 4\}$

$\cup\ \{v_i w_{3i-2}, w_{3i-1} x_{4i-2}, x_{4i-1} y_{3i-1} | 1 \leq i \ \leq 5\}$

$\cup\ \{w_{15} x_1, x_{20} y_1, y_{15} z_1, v_1 v_5, z_1 z_5, w_1 w_{15}, y_1 y_{15}, x_1 x_{20}\}$.

Pada artikel ini graf *Buckminsterfullerene-subdivisi*, dinotasikan $B_{60,n}$ untuk $n \geq 1$, diperoleh dengan melakukan operasi subdivisi terhadap sisi $e = v_4 v_5$, yaitu dengan menyisipkan sebanyak *n* titik ke sisi tersebut. Maka diperoleh:

$$V(B_{60,n}) = \{v_i, z_i | 1 \leq \mathrm{i} \leq 5\} \cup \{w_j, y_j | 1 \leq \mathrm{j} \ \leq 15\} \cup \{x_k | 1 \ \leq \ \mathrm{k} \ \leq \ 20\}$$
$$\cup \{v_{4,t} \ | 1 \leq \ \mathrm{t} \leq \ \mathrm{n}\}, \quad (3)$$

$$E(B_{60,n}) = \{v_l v_{l+1}, z_l z_{l+1} | 1 \leq \mathrm{l} \leq \ 4\} \cup \{w_m w_{m+1}, y_m y_{m+1} | 1 \ \leq \ m \ \leq \ 14\}$$
$$\cup \{x_k x_{k+1} | 1 \ \leq \ k \ \leq \ 19\} \cup \{w_{3l} x_{4l+1}, x_{4l} y_{3l+1}, y_{3l} z_{l+1} | 1 \ \leq \ l \ \leq \ 4\}$$
$$\cup \{v_i w_{3i-2}, w_{3i-1} x_{4i-2}, x_{4i-1} y_{3i-1} | 1 \ \leq \ i \ \leq \ 5\}$$
$$\cup \{v_1 v_5, z_1 z_5, w_1 w_{15}, y_1 y_{15}, x_1 x_{20}, w_{15} x_1, x_{20} y_1, y_{15} z_1\}$$
$$\cup \{v_{4,s} v_{4,s+1} | 1 \leq \mathrm{s} \leq \mathrm{n} - 1\} \cup \{v_4 v_{4,1}, v_{4,n} v_5\}. \quad (4)$$

Selanjutnya, misalkan terdapat graf *Buckminsterfullerene* B_{60} dengan himpunan titik dan himpunan sisi seperti pada persamaan (1) dan persamaan (2), serta gabungan lima graf bintang dengan *n* sisi yang homogen, dinotasikan $5S_n, n \geq 1$, dengan:

$V(5S_n) = v_{i,p} | 1 \leq i \leq 5; 0 \leq p \leq n,$

$E(5S_n) \ = \ \{v_{i,0} v_{i,q} | 1 \leq i \leq 5, 1 \leq q \leq n\}.$

Graf *Buckminsterfullerene-star,* dinotasikan $B_{60} 5S_n, n \ \geq \ 1$, dikonstruksi dengan cara mengidentifikasi titik v_i di B_{60} dengan titik $v_{i,n}$ untuk $1 \leq i \leq 5$. Tuliskan titik hasil identifikasi sebagai v_i untuk $1 \leq i \leq 5$. Maka diperoleh:

$$V(B_{60} 5S_n) = \{v_i, z_i | 1 \leq i \leq 5\} \cup \{w_j, y_j | 1 \leq j \ \leq 15\} \cup \{x_k | 1 \ \leq \ k \ \leq \ 20\}$$
$$\cup \{v_{i,r} \ | 1 \leq \ i \leq \ 5; \ 0 \ \leq \ r \ \leq n - 1\}, \quad (5)$$

$$E(B_{60} 5S_n) = \{v_l v_{l+1}, z_l z_{l+1} | 1 \leq \mathrm{l} \leq \ 4\} \cup \{w_m w_{m+1}, y_m y_{m+1} | 1 \leq m \ \leq 14\}$$
$$\cup \{x_k x_{k+1} | 1 \leq k \ \leq 19\} \cup \{w_{3l} x_{4l+1}, x_{4l} y_{3l+1}, y_{3l} z_{l+1} | 1 \leq l \ \leq 4\}$$
$$\cup \{v_i w_{3i-2}, w_{3i-1} x_{4i-2}, x_{4i-1} y_{3i-1} | 1 \leq i \ \leq 5\}$$
$$\cup \{v_1 v_5, z_1 z_5, w_1 w_{15}, y_1 y_{15}, x_1 x_{20}, w_{15} x_1, x_{20} y_1, y_{15} z_1\}$$
$$\cup \{v_i v_{i,0} | 1 \leq i \leq 5\} \cup \{v_{i,0} v_{i,q} | 1 \leq i \leq 5, 1 \leq q \leq n\}. \quad (6)$$

2 Metode Penelitian

Penentuan dimensi metrik graf *Buckminsterfullerene-subdivisi* $\boldsymbol{B_{60,n}}$ dan graf *Buckminsterfullerene-star* $\boldsymbol{B_{60} 5S_n}$ untuk $\boldsymbol{n \geq 1}$ dilakukan dengan cara sebagai berikut. Dituliskan

$\boldsymbol{dim(G) \leq k}$ untuk $\boldsymbol{G = B_{60,n}}$ atau $\boldsymbol{G = B_{60}5S_n}$ dan suatu bilangan bulat k, jika dapat ditentukan suatu himpunan pembeda W dengan $\boldsymbol{|W| = k}$ sedemikian sehingga sebarang dua titik u dan v di G mempunyai representasi yang berbeda. Selanjutnya, dituliskan $\boldsymbol{dim(G) \geq k}$ jika untuk setiap kemungkinan himpunan $\boldsymbol{W^*}$ dengan $\boldsymbol{|W^*| = k - 1}$, selalu terdapat minimal dua titik dengan representasi yang sama.

3 Hasil dan Pembahasan

Pada bagian ini diberikan dimensi metrik graf *Buckminsterfullerene*-subdivisi $B_{60,n}$ dan graf *Buckminsterfullerene*-star $B_{60}S_n$ untuk $n \geq 1$.

Teorema 1 *Misalkan terdapat graf Buckminsterfullerene-subdivisi* $B_{60,n}$ *dengan* $n \geq 1$. *Maka* $dim(B_{60,n}) = 3$.

Bukti.

Misalkan terdapat graf *Buckminsterfullerene-subdivisi* $B_{60,n}$ dengan himpunan titik dan sisi pada persamaan (3) dan persamaan (4). Definisikan suatu himpunan pembeda:

$$W = \begin{cases} \left\{x_{13}, z_5, v_{4,\frac{n+1}{2}}\right\}, \text{untuk } n \text{ ganjil,} \\ \left\{x_{13}, z_5, v_{4,\frac{n}{2}}\right\}, \text{untuk } n \text{ genap.} \end{cases}$$

Perhatikan dua kasus berikut.

Kasus 1.A *n* ganjil.

Pilih $W = \left\{x_{13}, z_5, v_{4,\frac{n+1}{2}}\right\}$. Perhatikan dua subkasus berikut.

Kasus 1.A.1 $n = 1$.

Pilih $W_1 = \{x_{13}, z_5, v_{4,1}\}$. Pada Tabel 1 diberikan representasi semua titik di $B_{60,1}$ terhadap W_1.

Tabel 1. Representasi titik $B_{60,1}$

Titik	Representasi	Titik	Representasi	Titik	Representasi	Titik	Representasi	Titik	Representasi
v_1	(6,8,2)	v_2	(5,9,3)	v_3	(4,8,2)	v_4	(3,7,1)	v_5	(5,7,1)
w_1	(7,7,3)	w_2	(8,7,4)	w_3	(7,7,5)	w_4	(6,8,4)	w_5	(5,7,5)
w_6	(4,7,4)	w_7	(3,8,3)	w_8	(2,6,4)	w_9	(1,6,3)	w_{10}	(2,6,2)
w_{11}	(2,5,3)	w_{12}	(3,5,3)	w_{13}	(4,6,2)	w_{14}	(5,6,3)	w_{15}	(6,6,4)
x_1	(7,5,5)	x_2	(8,6,6)	x_3	(9,5,6)	x_4	(8,5,7)	x_5	(8,6,6)
x_6	(6,6,6)	x_7	(6,5,7)	x_8	(5,5,6)	x_9	(4,6,5)	x_{10}	(3,5,5)
x_{11}	(2,4,6)	x_{12}	(1,4,5)	x_{13}	(0,5,4)	x_{14}	(1,4,4)	x_{15}	(2,3,5)
x_{16}	(3,3,5)	x_{17}	(4,4,4)	x_{18}	(5,5,4)	x_{19}	(6,4,5)	x_{20}	(7,4,6)
y_1	(7,3,7)	y_2	(8,4,7)	y_3	(7,3,8)	y_4	(7,4,8)	y_5	(6,4,8)
y_6	(5,3,9)	y_7	(4,4,7)	y_8	(3,3,7)	y_9	(3,2,7)	y_{10}	(2,3,6)
y_{11}	(3,2,6)	y_{12}	(4,1,7)	y_{13}	(4,2,7)	y_{14}	(5,3,6)	y_{15}	(6,2,7)
z_1	(6,1,8)	z_2	(6,2,9)	z_3	(5,2,9)	z_4	(4,1,8)	z_5	(5,0,8)
$v_{4,1}$	(4,8,0)								

Dapat dilihat dari Tabel 1 bahwa setiap dua titik di $B_{60,1}$ mempunyai representasi yang berbeda terhadap W_1.

Kasus 1.A.2 *n* ganjil, $n \geq 3$.

Pilih $W_2 = \left\{x_{13}, z_5, v_{4,\frac{n+1}{2}}\right\}$. Dari konstruksi graf $B_{60,n}$ diketahui bahwa $d(v_4, v_5) = n + 1$, sehingga didapatkan $d\left(v_4, v_{4,\frac{n+1}{2}}\right) = d\left(v_5, v_{4,\frac{n+1}{2}}\right) = \frac{n+1}{2}$ dan $d\left(v_{4,1}, v_{4,\frac{n+1}{2}}\right) = \frac{n+1}{2} - 1 = \frac{n-1}{2}$.

Dari persamaan (3), tuliskan:

$$V(B_{60,n}) = V(B_{60,1}) \cup \{v_{4,b} | 2 \leq b \leq n\}. \quad (7)$$

Selanjutnya, akan ditentukan representasi titik-titik di $V(B_{60,n})$ untuk *n* ganjil, $n \geq 3$. Ambil sebarang titik di $B_{60,n}$, namakan titik *u*. Karena $d\left(u, v_{4,\frac{n+1}{2}}\right) = d(u, v_{4,1}) + d\left(v_{4,1}, v_{4,\frac{n+1}{2}}\right) = d(u, v_{4,1}) + \frac{n-1}{2}$, maka representasi titik di $B_{60,1}$ pada persamaan (7) terhadap W_2 akan berbeda dengan representasi titik yang bersesuaian terhadap W_1 di Tabel 1.

Kemudian akan ditentukan representasi dari titik-titik di $\{v_{4,p} | 2 \leq p \leq n\}$ pada persamaan (7). Misal terdapat dua titik $v_{4,a}$ dan $v_{4,b}$, dengan $2 \leq a, b \leq n$. Perhatikan dua kondisi berikut.

(a) Jika $d\left(v_{4,a}, v_{4,\frac{n+1}{2}}\right) \neq d\left(v_{4,b}, v_{4,\frac{n+1}{2}}\right)$ maka $r(v_{4,a}|W_2) \neq r(v_{4,b}|W_2)$.

(b) Jika $d\left(v_{4,a}, v_{4,\frac{n+1}{2}}\right) = d\left(v_{4,b}, v_{4,\frac{n+1}{2}}\right)$ maka $d(v_{4,a}, v_4) \neq d(v_{4,b}, v_4)$ atau $d(v_{4,a}, v_5) \neq d(v_{4,b}, v_5)$, sehingga diperoleh $r(v_{4,a}|W_2) \neq r(v_{4,b}|W_2)$.

Kasus 1.B n genap.

Pilih $W_3 = \left\{x_{13}, z_5, v_{4,\frac{n}{2}}\right\}$. Perhatikan dua subkasus berikut.

Kasus 1.B.1 $n = 2$.

Pilih $W_3 = \{x_{13}, z_5, v_{4,1}\}$. Pada Tabel 2 diberikan representasi semua titik di $B_{60,2}$ terhadap W_3.

Tabel 2. Representasi titik $B_{60,2}$

Titik	**Represen tasi**	**Titik**	**Represen tasi**	**Titik**	**Represen tasi**	**Titik**	**Represen tasi**	**Titik**	**Represen tasi**
v_1	*(6,8,3)*	v_2	*(5,9,3)*	v_3	*(4,8,2)*	v_4	*(3,7,1)*	v_5	*(5,7,2)*
w_1	*(7,7,4)*	w_2	*(8,7,5)*	w_3	*(7,7,6)*	w_4	*(6,8,4)*	w_5	*(5,7,5)*
w_6	*(4,7,4)*	w_7	*(3,8,3)*	w_8	*(2,6,4)*	w_9	*(1,6,3)*	w_{10}	*(2,6,2)*
w_{11}	*(2,5,3)*	w_{12}	*(3,5,4)*	w_{13}	*(4,6,3)*	w_{14}	*(5,6,4)*	w_{15}	*(6,6,5)*
x_1	*(7,5,6)*	x_2	*(8,6,7)*	x_3	*(9,5,7)*	x_4	*(8,5,8)*	x_5	*(8,6,6)*
x_6	*(6,6,6)*	x_7	*(6,5,7)*	x_8	*(5,5,6)*	x_9	*(4,6,5)*	x_{10}	*(3,5,5)*
x_{11}	*(2,4,6)*	x_{12}	*(1,4,5)*	x_{13}	*(0,5,4)*	x_{14}	*(1,4,4)*	x_{15}	*(2,3,5)*
x_{16}	*(3,3,6)*	x_{17}	*(4,4,5)*	x_{18}	*(5,5,5)*	x_{19}	*(6,4,6)*	x_{20}	*(7,4,7)*
y_1	*(7,3,8)*	y_2	*(8,4,8)*	y_3	*(7,3,9)*	y_4	*(7,4,9)*	y_5	*(6,4,8)*
y_6	*(5,3,9)*	y_7	*(4,4,7)*	y_8	*(3,3,7)*	y_9	*(3,2,7)*	y_{10}	*(2,3,6)*
y_{11}	*(3,2,6)*	y_{12}	*(4,1,7)*	y_{13}	*(4,2,7)*	y_{14}	*(5,3,7)*	y_{15}	*(6,2,8)*

Titik	Representasi	Titik	Representasi	Titik	Representasi	Titik	Representasi	Titik	Representasi
z_1	(6,1,9)	z_2	(6,2,10)	z_3	(5,2,9)	z_4	(4,1,8)	z_5	(5,0,8)
$v_{4,1}$	(4,8,0)	$v_{4,2}$	(5,8,1)						

Dapat dilihat dari Tabel 2 bahwa setiap dua titik di $B_{60,2}$ mempunyai representasi yang berbeda terhadap W_3.

Kasus 1.B.2 *n* genap, $n \geq 4$.

Pilih $W_4 = \left\{x_{13}, z_5, v_{4,\frac{n}{2}}\right\}$. Diketahui bahwa $d\left(v_4, v_{4,\frac{n}{2}}\right) = \frac{n}{2}$, $d\left(v_5, v_{4,\frac{n}{2}}\right) = \frac{n}{2} + 1$, dan $d\left(v_{4,1}, v_{4,\frac{n}{2}}\right) = \frac{n}{2} - 1 = \frac{n-2}{2}$. Dari persamaan (3), tuliskan:

$$V(B_{60,n}) = V(B_{60,2}) \cup \{v_{4,r} | 3 \leq r \leq n\}. \quad (8)$$

Akan ditentukan representasi titik-titik di $V(B_{60,n})$ untuk *n* genap, $n \geq 4$. Ambil sebarang titik di $B_{60,n}$, namakan titik *u*. Karena $d\left(u, v_{4,\frac{n}{2}}\right) = d(u, v_{4,1}) + d\left(v_{4,1}, v_{4,\frac{n}{2}}\right) = d(u, v_{4,1}) + \frac{n-2}{2}$, maka representasi titik di $B_{60,2}$ pada persamaan (8) terhadap W_4 akan berbeda dengan representasi titik yang bersesuaian terhadap W_3 di Tabel 2.

Kemudian ditentukan representasi titik-titik di $\{v_{4,r} | 3 \leq r \leq n\}$ pada persamaan (8). Misal terdapat dua titik $v_{4,a}$ dan $v_{4,b}$, dengan $3 \leq a, b \leq n$. Perhatikan dua kondisi berikut.

(a) Jika $d\left(v_{4,a}, v_{4,\frac{n}{2}}\right) \neq d\left(v_{4,b}, v_{4,\frac{n}{2}}\right)$ maka $r(v_{4,a}|W_4) \neq r(v_{4,b}|W_4)$.

(b) Jika $d\left(v_{4,a}, v_{4,\frac{n}{2}}\right) = d\left(v_{4,b}, v_{4,\frac{n}{2}}\right)$ maka $d(v_{4,a}, v_4) \neq d(v_{4,b}, v_4)$ atau $d(v_{4,a}, v_5) \neq d(v_{4,b}, v_5)$, sehingga diperoleh $r(v_{4,a}|W_4) \neq r(v_{4,b}|W_4)$.

Berdasarkan Kasus 1.A dan Kasus 1.B dapat dilihat bahwa setiap titik di graf $B_{60,n}$ memiliki representasi yang berbeda. Diperoleh bahwa $dim(B_{60,n}) \leq 3$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa untuk sebarang himpunan W^* dengan $|W^*| = 2$, selalu terdapat minimal dua titik di $B_{60,n}$ dengan representasi yang sama terhadap W^*. Pandang beberapa kasus berikut.

Kasus 2.A $W_1^* = \{v_i, v_j | 1 \leq i, j \leq 5\}$, atau $W_1^* = \{z_i, z_j | 1 \leq i, j \leq 5\}$, atau $W_1^* = \{w_i, w_j | 1 \leq i, j \leq 15\}$, atau $W_1^* = \{y_i, y_j | 1 \leq i, j \leq 15\}$, atau $W_1^* = \{x_i, x_j | 1 \leq i, j \leq 20\}$.

Tanpa mengurangi perumuman, misalkan $W_1^* = \{v_i, v_j | 1 \leq i, j \leq 5\}$, dengan $j = (i + 2)\ mod\ 5$. Misalkan $W_1^* = \{v_1, v_3\}$ maka $r(w_3|W_1^*) = r(w_5|W_1^*) = (3,3)$, sehingga W_1^* bukan himpunan pembeda. Untuk titik-titik lain pada Kasus 2.A, pembuktian dilakukan dengan cara serupa.

Kasus 2.B $W_2^* = \{v_{4,i}, v_{4,j} | 1 \leq i, j \leq n\}$.

Tanpa mengurangi perumuman, misalkan $W_2^* = \{v_{4,1}, v_{4,n} | \ n \geq 2\}$. Sebagai contoh, untuk *n = 4* misalkan $W_2^* = \{v_{4,1}, v_{4,4}\}$. Maka $r(x_1|W_2^*) = r(x_2|W_2^*) = (8,5)$, sehingga W_2^* bukan himpunan pembeda. Untuk titik-titik lain pada Kasus 2.B, pembuktian dilakukan dengan cara serupa.

Kasus 2.C $W_3^* = \{v_i, v_{4,j} | \ 1 \leq i \leq 5; \ 1 \leq j \leq n\}$, atau $W_3^* = \{w_i, v_{4,j} | \ 1 \leq i \leq 15; \ 1 \leq j \leq n\}$, atau $W_3^* = \{x_i, v_{4,j} | \ 1 \leq i \leq 20; \ 1 \leq j \leq n\}$, atau $W_3^* = \{y_i, v_{4,j} | \ 1 \leq i \leq 15; \ 1 \leq j \leq n\}$, atau $W_3^* = \{z_i, v_{4,j} | \ 1 \leq i \leq 5; \ 1 \leq j \leq n\}$.

Tanpa mengurangi perumuman, misalkan $W_3^* = \{x_i, v_{4,j} | \ 1 \leq i \leq 20; \ 1 \leq j \leq n\}$. Sebagai contoh, untuk *n = 4* misalkan $W_3^* = \{x_{13}, v_{4,1}\}$. Maka $r(x_{11}|W_3^*) = r(y_{10}|W_3^*) = (2,6)$, sehingga W_3^* bukan himpunan pembeda. Untuk titik-titik lain pada Kasus 2.C, pembuktian dilakukan dengan cara serupa.

Kasus 2.D $W_4^* = \{v_i, z_i | \ 1 \leq i \leq 5\}$, atau $W_4^* = \{v_i, w_j | \ 1 \leq i \leq 5; 1 \leq j \leq 15\}$, atau $W_4^* = \{v_i, y_j | \ 1 \leq i \leq 5; 1 \leq j \leq 15\}$, atau $W_4^* = \{v_i, x_k | \ 1 \leq i \leq 5; 1 \leq k \leq 20\}$, atau $W_4^* = \{w_j, y_j | \ 1 \leq j \leq 15\}$, atau $W_4^* = \{w_j, z_i | \ 1 \leq i \leq 5; 1 \leq j \leq 15\}$, atau $W_4^* = \{w_j, x_k | \ 1 \leq j \leq 15; 1 \leq k \leq 20\}$, atau $W_4^* = \{y_j, z_i | \ 1 \leq i \leq 5; 1 \leq j \leq 15\}$, atau $W_4^* = \{z_i, x_k | \ 1 \leq i \leq 5; 1 \leq k \leq 20\}$.

Tanpa mengurangi perumuman, misalkan $W_4^* = \{z_i, x_k | \ 1 \leq i \leq 5; \ 1 \leq \ k \leq 20\}$. Sebagai contoh, untuk *n = 4* misalkan $W_4^* = \{z_5, x_{13}\}$. Maka $r(y_6|W_4^*) = r(y_{14}|W_4^*) = (4,5)$, sehingga W_4^* bukan himpunan pembeda. Untuk titik-titik lain pada Kasus 2.D, pembuktian dilakukan dengan cara serupa.

Berdasarkan Kasus 2.A sampai Kasus 2.D dapat dilihat bahwa W_1^*, W_2^*, W_3^* dan W_4^* bukan merupakan himpunan pembeda, karena terdapat minimal dua titik yang mempunyai representasi yang sama. Karena itu, diperoleh bahwa $dim(B_{60,n}) \geq 3$. ■

Teorema 2 *Misalkan terdapat graf Buckminsterfullerene-star* $B_{60}5S_n$ *dengan* $n \geq 1$. *Maka:*

$$dim(B_{60}5S_n) = \begin{cases} 3, & n = 1,2, \\ 1 + 5(n-2), & n \geq 3. \end{cases}$$

Bukti.

Misalkan terdapat graf *Buckminsterfullerene-star* $B_{60}5S_n$ dengan himpunan titik dan himpunan sisi yang didefinisikan pada persamaan (5) dan persamaan (6). Perhatikan dua kasus berikut.

Kasus 1.A *n = 1* dan *n = 2*.

Tanpa mengurangi perumuman, misalkan *n = 2*. Karena $B_{60} \subseteq B_{60}5S_2$, maka dari [16] diperoleh bahwa $dim(B_{60}5S_n) \geq 3$. Selanjutnya, definisikan suatu himpunan pembeda $W_5 = \{x_{13}, z_5, v_1\}$. Pada Tabel 3 diberikan representasi titik di $B_{60}5S_2$.

Tabel 3. Representasi titik $B_{60}5S_2$

Titik	Representasi	Titik	Representasi	Titik	Representasi	Titik	Representasi	Titik	Representasi
v_1	(5,8,0)	v_2	(5,9,1)	v_3	(4,8,2)	v_4	(3,7,2)	v_5	(4,7,1)
w_1	(7,7,1)	w_2	(8,7,2)	w_3	(7,7,3)	w_4	(6,8,2)	w_5	(5,7,3)
w_6	(4,7,4)	w_7	(3,8,3)	w_8	(2,6,4)	w_9	(1,6,4)	w_{10}	(2,6,3)
w_{11}	(2,5,4)	w_{12}	(3,5,3)	w_{13}	(4,6,2)	w_{14}	(5,6,3)	w_{15}	(6,6,2)
x_1	(7,5,3)	x_2	(8,6,3)	x_3	(9,5,4)	x_4	(8,5,8)	x_5	(8,6,4)
x_6	(6,6,5)	x_7	(6,5,5)	x_8	(5,5,6)	x_9	(4,6,5)	x_{10}	(3,5,5)
x_{11}	(2,4,7)	x_{12}	(1,4,6)	x_{13}	(0,5,5)	x_{14}	(1,4,5)	x_{15}	(2,3,6)
x_{16}	(3,3,5)	x_{17}	(4,4,4)	x_{18}	(5,5,4)	x_{19}	(6,4,5)	x_{20}	(7,4,4)
y_1	(7,3,5)	y_2	(8,4,5)	y_3	(7,3,6)	y_4	(7,4,6)	y_5	(6,4,8)
y_6	(5,3,7)	y_7	(4,4,7)	y_8	(3,3,8)	y_9	(3,2,8)	y_{10}	(2,3,7)
y_{11}	(3,2,7)	y_{12}	(4,1,8)	y_{13}	(4,2,7)	y_{14}	(5,3,6)	y_{15}	(6,2,6)
z_1	(6,1,7)	z_2	(6,2,7)	z_3	(5,2,8)	z_4	(4,1,9)	z_5	(5,0,8)
$v_{1,0}$	(6,9,1)	$v_{2,0}$	(6,10,2)	$v_{3,0}$	(5,9,3)	$v_{4,0}$	(4,8,3)	$v_{5,0}$	(5,8,2)
$v_{1,1}$	(7,10,2)	$v_{2,1}$	(7,11,3)	$v_{3,1}$	(6,10,4)	$v_{4,1}$	(5,9,4)	$v_{5,1}$	(6,9,3)

Dapat dilihat bahwa setiap titik di graf $B_{60}5S_2$ memiliki representasi yang berbeda terhadap W_5, sehingga $dim(B_{60}5S_2) \leq 3$.

Kasus 1.B $n \geq 3$.

Definisikan suatu himpunan pembeda $W_6 = \{x_{13}, v_{i,m} | 1 \leq i \leq 5; 1 \leq m \leq n-2\}$. Misalkan terdapat titik a dan b di $B_{60}5S_n$ untuk $n \geq 3$. Perhatikan beberapa kasus berikut.

Kasus 1.B.1 Misalkan $a \in V(B_{60})$ dan $b \in V(B_{60})$.

Terdapat beberapa kondisi berikut.

(a) Jika $d(a, x_{13}) \neq d(b, x_{13})$ maka jelas $r(a|W_6) \neq r(b|W_6)$.

(b) Jika $d(a, x_{13}) = d(b, x_{13})$ maka terdapat suatu s, $1 \leq s \leq 5$ dan suatu t, $1 \leq t \leq n-2$, dengan $i \neq s$ dan $t \neq m$, sehingga $d(a, v_{s,t}) \neq d(b, v_{s,t})$. Diperoleh bahwa $r(a|W_6) \neq r(b|W_6)$. Sebagai contoh, $d(x_{15}, x_{13}) = d(x_{11}, x_{13}) = 2$ tetapi $d(x_{15}, v_{4,1}) \neq d(x_{11}, v_{4,1})$, sehingga $r(x_{15}|W_6) \neq r(x_{11}|W_6)$.

Kasus 1.B.2 Misalkan $a \in V(B_{60})$ dan $b \in V(5S_n)$.

Karena $d(a, v_{i,m}) = d(a, v_i) + d(v_i, v_{i,m})$ maka $r(a|W_6) \neq r(b|W_6)$ untuk $b = v_i$, atau $b = v_{i,m}$ untuk $1 \leq i \leq 5$ dan $1 \leq m \leq n-2$.

Kasus 1.B.3 Misalkan $a \in V(5S_n)$ dan $b \in V(5S_n)$.

Terdapat beberapa kondisi berikut.

(a) Jika $a = v_i$ dan $b = v_{i,m}$ maka $d(a, v_{i,m}) = 1 \neq 0 = d(b, v_{i,m})$, sehingga $r(a|W_6) \neq r(b|W_6)$ untuk $1 \leq i \leq 5$ dan $1 \leq m \leq n-2$.

(b) Jika $a = v_t$ dan $b = v_i$ maka $d(a, v_{i,m}) = d(a, b) + d(b, v_{i,m})$, sehingga $r(a|W_6) \neq r(b|W_6)$ untuk $1 \leq i, t \leq 5$ dan $1 \leq m \leq n-2$.

(c) Jika $a = v_{t,s}$ dan $b = v_{i,m}$ maka diperoleh $d(a, v_{i,m}) = d(a, v_t) + d(v_t, v_i) + d(v_i, v_{i,m}) \neq 0 = d(b, v_{i,m})$, sehingga $r(a|W_6) \neq r(b|W_6)$ untuk $1 \leq i, t \leq 5$ dan $1 \leq m, s \leq n-2$.

Dari Kasus 1.B.1 sampai Kasus 1.B.3, diperoleh bahwa representasi setiap dua titik di $B_{60}5S_n$ berbeda terhadap W_6. Dapat disimpulkan bahwa $dim(B_{60}5S_n) \leq 1 + 5(n-2) = 5n - 9$ untuk $n \geq 3$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa untuk sebarang himpunan W^* dengan $|W^*| = 5(n-2)$, selalu terdapat minimal dua titik di $B_{60}5S_n$ dengan representasi yang sama terhadap W^*. Pandang beberapa kasus berikut.

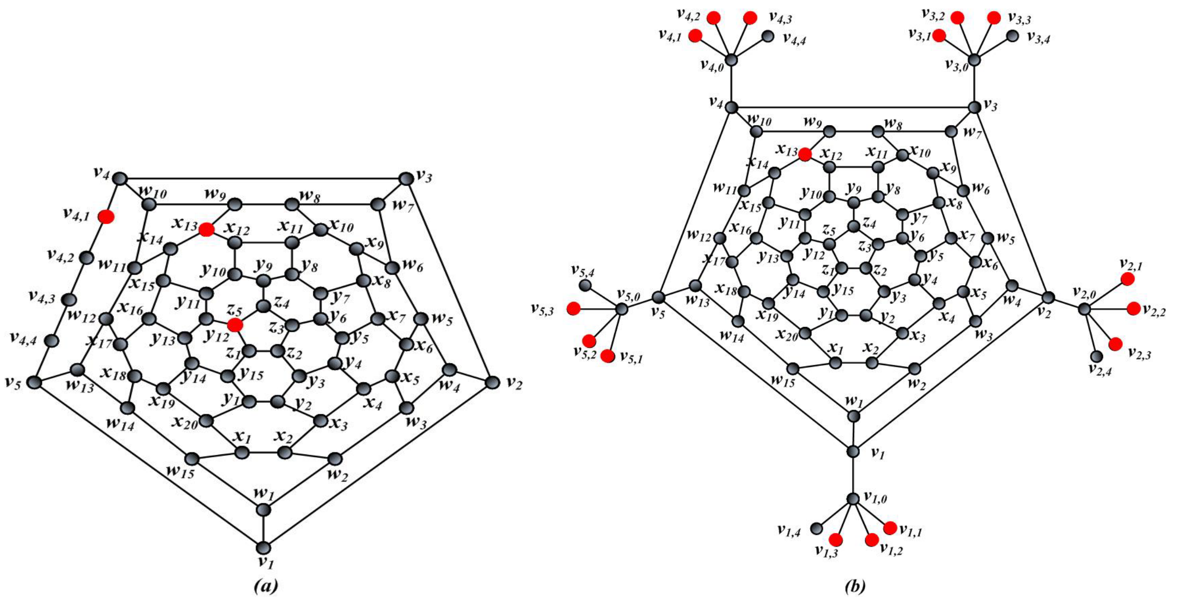
Kasus 2.A Tidak ada titik di B_{60} yang menjadi anggota W^*.

Tuliskan $W_5^* = \{v_{i,m} | 1 \leq i \leq 5; 1 \leq m \leq n-2\}$. Maka terdapat titik w_9 dan w_{11} sedemikian sehingga $d(w_9, v_{i,m}) = d(w_{11}, v_{i,m})$ untuk $1 \leq i \leq 5$ dan $1 \leq m \leq n-2$. Diperoleh bahwa $r(w_9|W_5^*) = r(w_{11}|W_5^*)$.

Kasus 2.B Terdapat tepat satu titik di B_{60} dan $5(n-2) - 1$ titik di $5S_n$ yang menjadi anggota W^*. Tanpa mengurangi perumuman, misalkan $W_6^* = \{x_{13}, v_{i,f} | 1 \leq i \leq 5; 1 \leq f \leq n-3\}$. Karena $d(v_{i,n-1}, u) = d(v_{i,n-2}, u)$ untuk setiap titik u di W_6^*, maka jelas bahwa $r(v_{i,n-1}|W_6^*) = r(v_{i,n-2}|W_6^*)$.

Dari Kasus 2.A dan Kasus 2.B dapat dilihat bahwa W_5^* dan W_6^* bukan himpunan pembeda, karena terdapat minimal dua titik yang mempunyai representasi yang sama. Karena itu, diperoleh bahwa $dim(B_{60}5S_n) \geq 5(n-2) + 1$. ■

Pada Gambar 1 diberikan graf *Buckminsterfullerene-subdivisi* $B_{60,4}$ dan graf *Buckminsterfullerene-star* $B_{60}5S_5$. Titik berwarna merah menyatakan anggota himpunan pembeda pada graf tersebut.



Gambar 1. (a) $dim(B_{60,n}) = 3$, (b) $dim(B_{60}5S_5) = 16$

4 Simpulan

Pada penelitian ini diperoleh bahwa dimensi metrik graf *Buckminsterfullerene*-subdivisi $B_{60,n}$ adalah tiga, sementara dimensi metrik graf *Buckminsterfullerene*-star $B_{60}5S_n$ adalah $5(n-2)+1$ untuk $n \geq 1$.

5 Daftar Pustaka

[1] P. Slater, "Leaves of trees," *Congressus Numerantium,* vol. 14, pp. 549 - 559, 1975.

[2] F. Harary and Melter, R.A, "On the metric dimension of a graph," *Ars Combin,* vol. 2, pp. 191 - 195, 1976.

[3] G. Chartrand, L. Eroh, M. Johnson and O. Oellermann, "Resolvability in graphs and the metric dimension of a graph," *Discrete Applied Mathematics,* vol. 105, pp. 99 - 133, 2000.

[4] R. Diestel, Graph Theory, New York: Springer-Verlag New York Inc., 2017.

[5] S. Saputro, R. Simanjuntak, S. Uttunggadewa, H. Assiyatun, E. Baskoro, A. Salman and M. Baca, "The metric dimension of the lexicographic product of graphs," *Discrete Math,* vol. 313, no. 9, pp. 1045 - 1051, 2013.

[6] R. Simanjuntak, S. Uttunggadewa and S. Saputro, "Metric Dimension of Amalgamation of Graphs," in *Lecture Notes on Computer Science (LNCS)*, New York, Springer, 2015, pp. 330 - 337.

[7] R. Putra, L. Yulianti and S. Sy, "Dimensi Metrik dari Graf W_n + C_n untuk n ∈ {3, 4}," *Jurnal Matematika UNAND,* vol. 7, no. 2, pp. 165 - 169, 2018.

[8] F. Febrianti, L. Yulianti and N. Narwen, "Dimensi Metrik pada Graf Amalgamasi Tangga Segitiga Diperumum Homogen," *Jurnal Matematika UNAND,* vol. 7, no. 1, pp. 84 - 90, 2018.

[9] L. Yulianti, A. Putri, B. Rudianto, Y. Yanita and D. Welyyanti, "On the metric dimension of the triangle-net graph," in *AIP Conference Proceeding*, 2022.

[10] T. Utomo and N. Dewi, "Dimensi Metrik dari Graf Amal(nK_m)," *Limits: Journal of Matematics and Its Applications,* vol. `5, no. 1, pp. 71 - 77, 2018.

[11] L. Yulianti, N. Narwen and S. Hariyani, "On The Subdivided Thorn Graph and Its Metric Dimension," *Indonesian Journal of Combinatorics,* vol. 3, no. 1, pp. 34 - 40, 2019.

[12] R. Aditya, N. Narwen and D. Welyyanti, "Dimensi Metrik pada Graf Rn(q,r)m," *Jurnal Matematika UNAND,* vol. 7, no. 1, pp. 260 - 267, 2018.

[13] V. Andova, F. Kardos and R. Skrekovsi, "Fullerene Graphs and Some Relevant Graphs Invariant," in *Topics in Chemical Graph Theory, Mathematical Chemistry Monographs*, Kragujevac, University of Kragujevac and Faculty of Science, Kragujevac, 2014, p. 39 – 54.

[14] S. Akhter and R. Farooq, "Metric Dimension of Fullerene Graphs," *Electronic Journal of Graph Theory and Applications,* vol. 7, no. 1, pp. 91 - 103, 2019.

[15] H. Kroto, J. Heath, S. O'Brien, S. Curl and R. Smalley, "C60: Buckminsterfullerene," *Nature,* vol. 318, pp. 162 - 163, 1985.

[16] A. Putri, L. Yulianti and D. Welyyanti, "Dimensi Metrik dari Graf Buckminsterfullerene," *Jurnal Matematika UNAND,* vol. 8, no. 4, pp. 91 - 100, 2019.

[17] M. Amalia, D. Welyyanti and L. Yulianti, "On the metric dimension of Buckminsterfullerene-type graphs," *submitted.*

[18] L. Yulianti, D. Welyyanti, Y. Yanita, M. Fajri and S. Saputro, "On the metric dimension of Buckminsterfullerene-net graphs," *submitted.*