

Simulasi Numerik Penelusuran Aliran di Kanal menggunakan Persamaan Saint-Venant

Bambang Agus Sulistyono^{1,*}, Suryo Widodo²

^{1,2}Pendidikan Matematika Universitas Nusantara PGRI Kediri
e-mail: bb7agus1@unpkediri.ac.id , suryowidodo@unpkediri.ac.id

Diajukan: 16 Januari 2023, Diperbaiki: 11 April 2023, Diterima: 28 Juli 2023

Abstrak

Penelitian ini membahas perilaku debit di sepanjang kanal secara numerik menggunakan data debit yang tercatat di bagian hulu. Secara matematis perilaku debit di kanal dapat dilukiskan menggunakan persamaan Saint-Venant satu dimensi. Persamaan Saint-Venant merupakan sistem persamaan diferensial parsial non-linier dan secara umum belum ditemukan solusi analitiknya. Dalam penelitian ini model matematika tersebut disederhanakan dengan cara memodifikasi persamaan momentumnya. Persamaan Saint-Venant yang telah disederhanakan diselesaikan secara numerik menggunakan metode beda hingga eksplisit. Untuk memastikan bahwa model numerik yang dihasilkan dapat diimplementasikan, maka dilakukan uji validasi dengan model numerik yang dipilih dari literatur. Hasil simulasi menunjukkan bahwa input hidrograf dengan debit puncak $12 \text{ m}^3/\text{detik}$ mengalami peredaman debit sepanjang kanal. Pada lokasi $x = 600 \text{ m}$ dari hulu kanal, debit puncak menyusut menjadi $7,38 \text{ m}^3/\text{detik}$.

Kata Kunci: persamaan Saint-Venant, metode beda hingga, penelusuran aliran

Abstract

This paper discusses the behavior of discharge along the channel numerically using discharge data recorded upstream. Mathematically the discharge behavior in the canal can be described using the one-dimensional Saint-Venant equation. The Saint-Venant equation is a system of non-linear partial differential equations and in general, an analytical solution has not yet been found. In this research, the mathematical model is simplified by modifying the momentum equation. The simplified Saint-Venant equation is solved numerically using the explicit finite difference method. To ensure that the resulting numerical model can be implemented, a validation test is carried out with the selected numerical model from the literature. The simulation results show that the input hydrograph with a peak discharge of $12 \text{ m}^3/\text{second}$ experiences a reduction in discharge along the river. At location $x = 600 \text{ m}$ from the headwaters of the channel, the peak discharge is $7.38 \text{ m}^3/\text{second}$.

Keywords: Saint-Venant equations, finite difference method, flow routing

1 Pendahuluan

Salah satu upaya untuk meminimalisir akibat yang ditimbulkan oleh banjir adalah dengan membangun sistem peringatan dini banjir. Secara umum sistem peringatan dini bekerja dengan cara mengukur tinggi muka air di sungai kemudian mengklasifikasikan tinggi muka air menjadi kondisi rendah, sedang, dan tinggi. Jika ketinggian air mencapai kondisi yang ditentukan, sistem akan memberikan peringatan kepada pihak yang berwenang. Kelemahan dari sistem ini adalah banjir hanya dapat diprediksi ketika muka air sungai berada pada ketinggian yang hampir

meluap. Hal ini menyebabkan peringatan yang diberikan bersifat mendadak sehingga masyarakat tidak sempat mempersiapkan diri dan menyimpan barang-barangnya karena waktu yang sangat singkat. Salah satu cara yang dapat digunakan untuk membantu mengatasi kelemahan tersebut adalah dengan menerapkan metode penelusuran aliran [1], [2].

Secara umum, terdapat dua jenis metode penelusuran aliran yang sering digunakan yaitu hidrologi dan hidraulika. Pada metode hidrologi, perilaku debit dihitung sebagai fungsi dari waktu saja sehingga penelusuran terhadap debit hanya dilakukan di lokasi tertentu. Metode hidrologi ini menggunakan pendekatan matematis dari fungsi tampungan (*storage*) yang dibangun berdasarkan hukum kekekalan massa [3], [4]. Oleh karena itu, dalam prakteknya metode ini hanya mempertimbangkan pada aliran masuk, aliran keluar dan air tampungan. Kelemahan utama dari metode ini adalah tidak adanya kaitan antara variabel aliran air dengan geometri kanal yang dilalui aliran.

Pada metode hidraulika, yang digunakan dalam penelitian ini, debit dihitung sebagai fungsi dari waktu dan ruang, sehingga penelusuran aliran dapat dilakukan di setiap lokasi sepanjang kanal. Secara matematis metode hidraulika dibangun berdasarkan pada hukum kekekalan massa dan hukum kekekalan momentum yang sering dinamakan persamaan Saint-Venant [5], [6]. Dengan demikian, penggunaan metode hidraulika untuk permasalahan penelusuran aliran air di kanal lebih mendekati pada kondisi nyata dikarenakan dalam proses pemodelannya metode ini mengkaitkan antara debit dengan geometri kanalnya seperti kemiringan, kekasaran permukaan, jari-jari hidraulik, panjang kanal, dan lebar penampang kanal.

Dalam artikel ini, metode hidraulika dalam hal ini persamaan Saint-Venant digunakan untuk memprediksi/menghitung besarnya debit aliran di hilir sepanjang kanal berdasarkan data debit yang diketahui di bagian hulu. Persamaan Saint-Venant termasuk jenis persamaan tak linier dengan ketaklinierannya yang sangat kuat dan belum ditemukan penyelesaian analitiknya, kecuali pada kasus-kasus khusus dan terbatas. Oleh karena itu, yang dikerjakan dalam artikel ini adalah menyederhanakan persamaan Saint-Venant dengan cara memodifikasi persamaan momentumnya dan selanjutnya menyelesaikan persamaan yang telah disederhanakan tersebut menggunakan metode numerik yang sederhana pula yaitu metode beda hingga eksplisit.

2 Metode Penelitian

Mekanisme aliran di kanal dapat digambarkan menggunakan model matematika berupa persamaan Saint-Venant [8]–[10]. Persamaan ini merupakan sistem persamaan yang tersusun dari persamaan kontinuitas dan momentum, yang masing-masing dapat ditulis sebagai

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + gA \frac{\partial h}{\partial x} + gA(S_f - S_0) = 0 \quad (2)$$

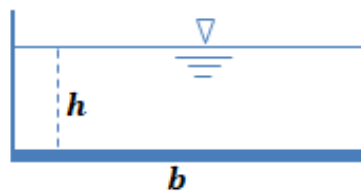
di mana A adalah luas penampang basah, Q adalah debit, h adalah tinggi air, g adalah percepatan gravitasi, S_f adalah kemiringan gesek, S_0 adalah kemiringan dasar kanal, x adalah koordinat longitudinal, dan t adalah waktu.

Untuk penampang persegi panjang, maka luas penampang basah dapat ditulis sebagai

$$A = b(x)h(x, t) \quad (3)$$

di mana b adalah lebar kanal. Dalam penelitian ini, diasumsikan b konstan, sehingga persamaan berikut dapat diperoleh dari persamaan (3) sebagai

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{b} \frac{\partial A}{\partial x} \quad (4)$$



Gambar 1. Penampang persegi panjang

Selanjutnya, substitusikan persamaan (4) ke dalam persamaan (2) dan diatur kembali susunan persamaan tersebut, diperoleh

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + 2 \frac{Q}{A} \frac{\partial Q}{\partial x} + \left(\frac{gA}{b} - \frac{Q^2}{A^2} \right) \frac{\partial A}{\partial x} + gA(S_f - S_0) = 0 \quad (5)$$

Kecepatan aliran dalam satuan SI dipilih persamaan Manning, yaitu

$$u = \frac{1}{n} R^{2/3} S_f^{1/2} \quad (6)$$

di mana R adalah jari-jari hidraulika, dan n adalah koefisien kekasaran Manning, yaitu nilai yang menunjukkan seberapa besar resistensi dilakukan terhadap air oleh dinding kanal. Untuk penampang berbentuk persegi panjang, maka berlaku hubungan sebagai berikut:

$$R = A/P \quad (7)$$

$$P = 2h + b \quad (8)$$

di mana P adalah keliling basah penampang melintang.

Turunkan secara parsial persamaan (7), (8), dan (6) terhadap x , diperoleh

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 2 \frac{\partial h}{\partial x} \quad (9)$$

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \left(\frac{1}{P} - \frac{2A}{bP^2} \right) \frac{\partial A}{\partial x} \quad (10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2}{3} \frac{1}{n} R^{-\frac{1}{3}} S_f^{\frac{1}{2}} \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{1}{n} R^{\frac{2}{3}} S_f^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial S_f}{\partial x} \quad (11)$$

Dikarenakan $\frac{\partial S_f}{\partial x}$ sangat kecil apabila dibandingkan dengan suku yang lain, maka suku kedua di ruas kanan dari Persamaan (11) dapat dihilangkan [11], [12]. Oleh karena itu, Persamaan (11) dapat ditulis kembali menjadi

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2}{3} \frac{1}{n} R^{-\frac{1}{3}} S_f^{\frac{1}{2}} \frac{\partial R}{\partial x} \quad (12)$$

Dengan mendefinisikan debit $Q = uA$, maka diperoleh turunan parsial berikut

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = A \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial A}{\partial x} \quad (13)$$

Kemudian substitusikan Persamaan (9), (10), dan (12) ke dalam Persamaan (13) dan diatur kembali susunan persamaan tersebut, maka diperoleh

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{1}{\frac{Q}{A} \left(\frac{5}{3} - \frac{4R}{3b} \right)} \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (14)$$

Selanjutnya substitusikan Persamaan (14) ke dalam Persamaan (5) dan diatur kembali susunan persamaan tersebut, maka diperoleh

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \alpha \frac{\partial Q}{\partial x} + \beta = 0 \quad (15)$$

dengan

$$\alpha = 2 \frac{Q}{A} + \frac{\frac{gA}{b} \frac{Q^2}{A^2}}{\frac{Q}{A} \left(\frac{5}{3} - \frac{4R}{3b} \right)} \quad (16)$$

$$\beta = gA(S_f - S_0) \quad (17)$$

Selanjutnya, sebarang fungsi f dan turunan-turunan parsialnya dari persamaan (1) dan (15) didiskritkan dengan metode beda hingga eksplisit (langkah maju untuk waktu dan langkah mundur untuk ruang), diperoleh

$$Q_i^{j+1} = Q_i^j - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\alpha_i^j) (Q_i^j - Q_{i-1}^j) - \beta_i^j \Delta t \quad (18)$$

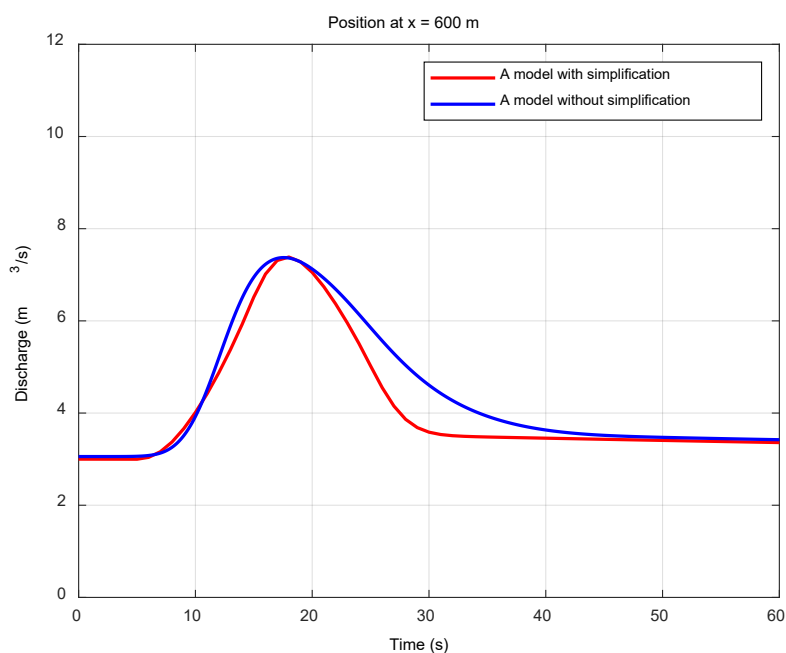
$$A_i^{j+1} = A_i^j - \frac{\Delta t}{\Delta x} (Q_i^{j+1} - Q_{i-1}^{j+1}) \quad (19)$$

$$\alpha_i^j = \left(2 \frac{Q_i^j}{A_i^j} + \frac{\frac{gA_i^j}{b} - \frac{Q_i^{j2}}{A_i^{j2}}}{\frac{Q_i^j}{A_i^j} \left(\frac{5}{3} - \frac{4R_i^j}{3b} \right)} \right) \quad (20)$$

$$\beta_i^j = gA_i^j \left((S_f)_i^j - S_0 \right) \quad (21)$$

Skema beda hingga (18) dan (19) digunakan untuk simulasi penelusuran aliran pada kanal dengan penampang berbentuk persegi panjang.

Sebelum diimplementasikan, skema numerik yang dihasilkan perlu divalidasi dengan skema numerik yang dipilih dari literatur [12].



Gambar 2. Perbandingan antara debit dari persamaan Saint Venant dan model yang disederhanakan untuk pengamatan di $x = 600$ m.

Hasil validasi (Gambar 2) menunjukkan bahwa skema numerik yang diusulkan memiliki kesesuaian yang baik sedangkan perbedaan kecil yang terjadi dapat ditolerir karena skema numerik yang diusulkan mempertimbangkan penyederhanaan.

3 Hasil dan Pembahasan

Skema numerik dari model yang disederhanakan akan diaplikasikan pada permasalahan penelusuran aliran air di kanal prisma. Dengan memanfaatkan data debit yang masuk ke dalam kanal prisma, maka di daerah hilir akan diamati perubahan perilaku debit. Adapun beberapa komponen umum yang digunakan untuk simulasi numerik sebagai berikut: panjang kanal yang tinjau $L = 2000$ m, lebar kanal konstan $b = 5$ m, kemiringan dasar kanal $S_0 = 0.0005$, koefisien Manning $n = 0.0138$, percepatan gravitasi $g = 9.81$, langkah ruang $\Delta x = 1$, langkah waktu $\Delta t = 0.1$ dan simulasi dilakukan selama 60 satuan waktu, $T = 60$.

Pemaparan selanjutnya adalah simulasi penelusuran aliran air pada saluran prisma akibat variasi hidrograf aliran yang masuk yaitu hidrograf berbentuk triangular dan kurvatur. Kemudian

menyelidiki perilaku variabel aliran air yang akan diamati berupa debit pada lokasi tertentu di daerah hilir, misalnya pada $x = 600$ m.

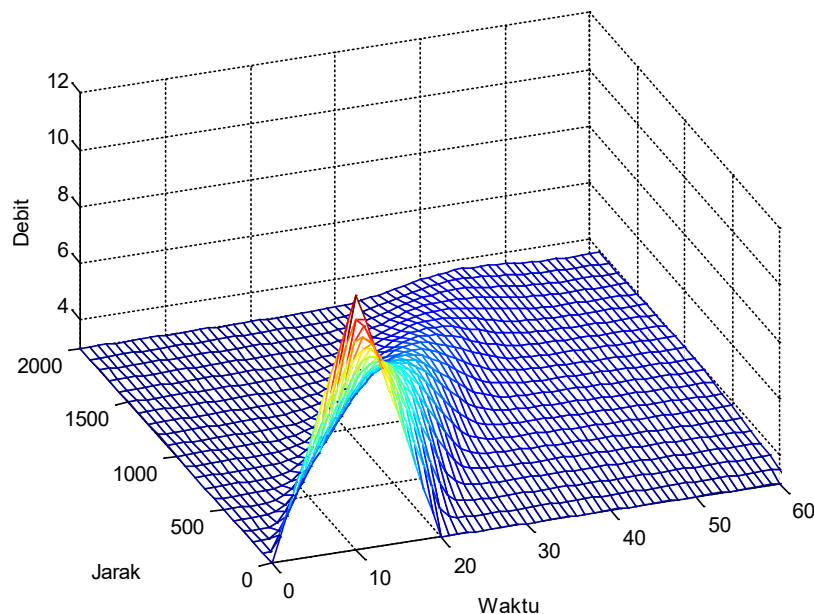
3.1 Hidrograf Masuk berbentuk segitiga

Sebuah kanal prisma dengan penampang berbentuk persegi panjang dialiri air dari arah hulu. Dari arah hulu tercatat hidrograf berbentuk segitiga masuk ke dalam kanal dengan data sebagai berikut,

$$Q(0, t) = \begin{cases} 3 + \frac{9}{10}t & \text{jika } 0 \leq t < 10 \\ 12 - \frac{9}{10}(t - 10) & \text{jika } 10 \leq t < 20 \\ 3 & \text{jika } t \geq 20 \end{cases} \quad (22)$$

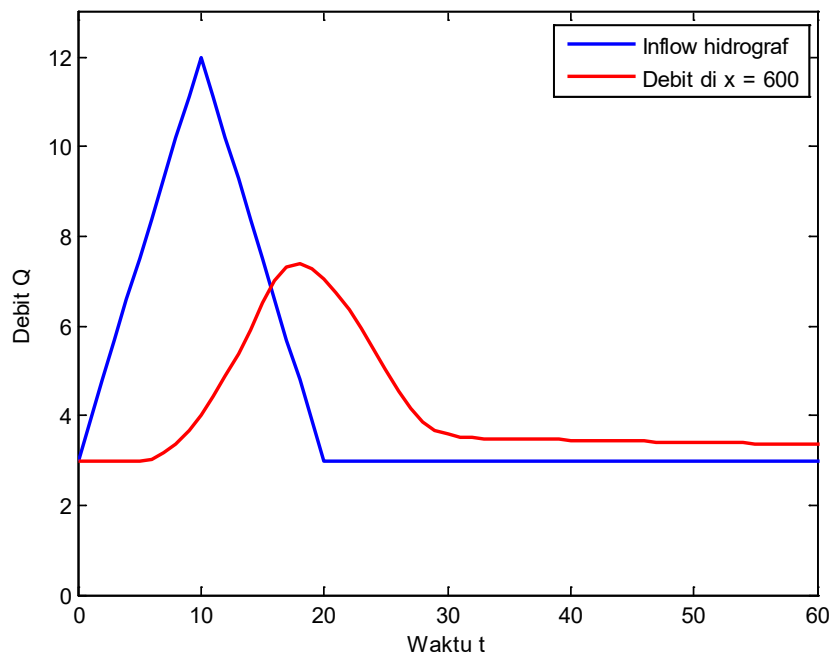
dengan kondisi awalnya adalah $Q(x, 0) = 3, A(x, 0) = 3$.

Hasil simulasi perubahan variabel aliran air berupa outflow hidrograf di sepanjang kanal prisma dapat dilihat pada Gambar 3. Gambar tersebut memperlihatkan animasi pergerakan debit ke arah hilir selama waktu $0 < t \leq 60$ akibat adanya inflow hidrograf berbentuk segitiga yang masuk ke dalam kanal prisma selama waktu $0 < t \leq 20$.



Gambar 3. Profil debit akibat adanya inflow hidrograf berbentuk segitiga

Dari gambar tampak bahwa debit yang masuk ke dalam badan kanal akan berpropagasi ke arah hilir untuk setiap satuan waktunya dengan kuantitas debit yang semakin lama semakin menyusut hingga pengaruh inflow hidrograf hilang. Inflow hidrograf tersebut akan mengalami peredaman sepanjang kanal karena pengaruh gesekan antara air dengan dasar dan dinding kanal sehingga semakin jauh dari sumber debit maka semakin besar penyusutan debitnya.



Gambar 4. Perbandingan antara inflow hidrograf berbentuk segitiga dengan debit di $x = 600$ yang menunjukkan adanya penurunan puncak debit.

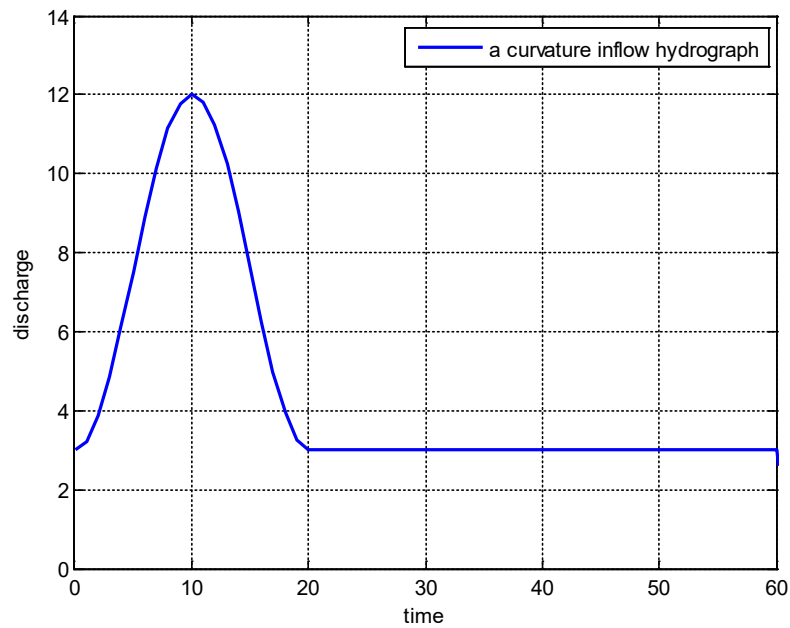
Pada Gambar 4 disajikan inflow hidrograf berbentuk segitiga dan sebuah outflow hidrograf yang diamati di lokasi yang berjarak 600 dari hulu. Dari gambar tampak bahwa debit maksimum mengalami penyusutan dari $Q = 12 \text{ m}^3/\text{det}$ menjadi $Q = 7.38 \text{ m}^3/\text{det}$ dan waktu terjadinya debit maksimum juga bergeser dari $t = 10$ detik menjadi $t = 18$ detik. Dari Gambar tampak bahwa semakin jauh jaraknya dari hulu maka akan semakin besar penyusutan debit maksimumnya dan semakin besar pula pergeseran waktunya.

3.2 Hidrograf Masuk Berbentuk Kurvatur

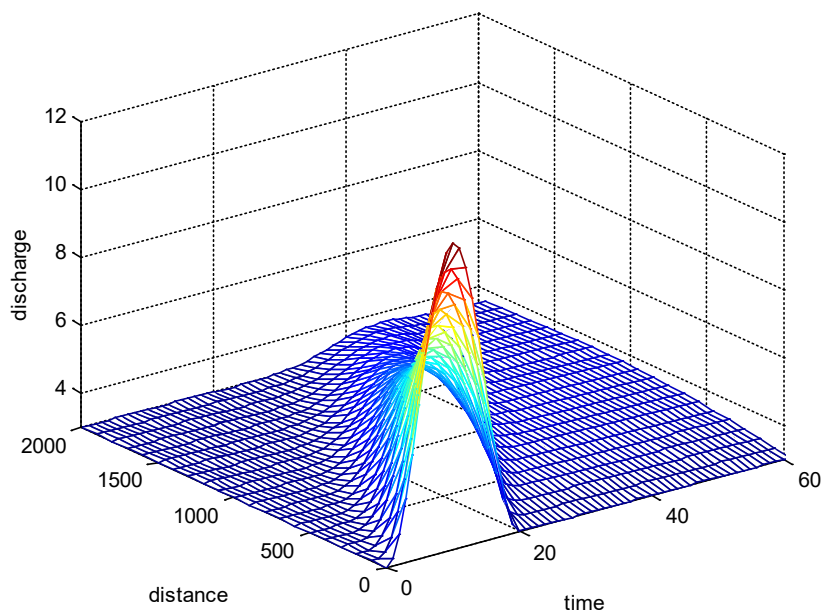
Saluran prismatic dengan penampang persegi panjang dialiri air dari arah hulu. Dari arah hulu tercatat hidrograf berbentuk kurvatur masuk ke dalam kanal dengan data sebagai berikut

$$Q(0, t) = \begin{cases} 18/4 \sin\left(\frac{\pi t}{10} - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{30}{4} & \text{jika } 0 \leq t < 10 \\ 18/4 \cos\left(\frac{1.4\pi t}{14} - \frac{\pi}{100}\right) + \frac{30}{4} & \text{jika } 10 \leq t < 20 \\ 3 & \text{jika } t \geq 20 \end{cases} \quad (23)$$

di mana kondisi awalnya adalah $Q(x, 0) = 3 \text{ m}^3/\text{det}$, $A(x, 0) = 3 \text{ m}^3/\text{det}$. Profil hidrograf yang masuk ke kanal prismatic dapat dilihat pada Gambar 5.

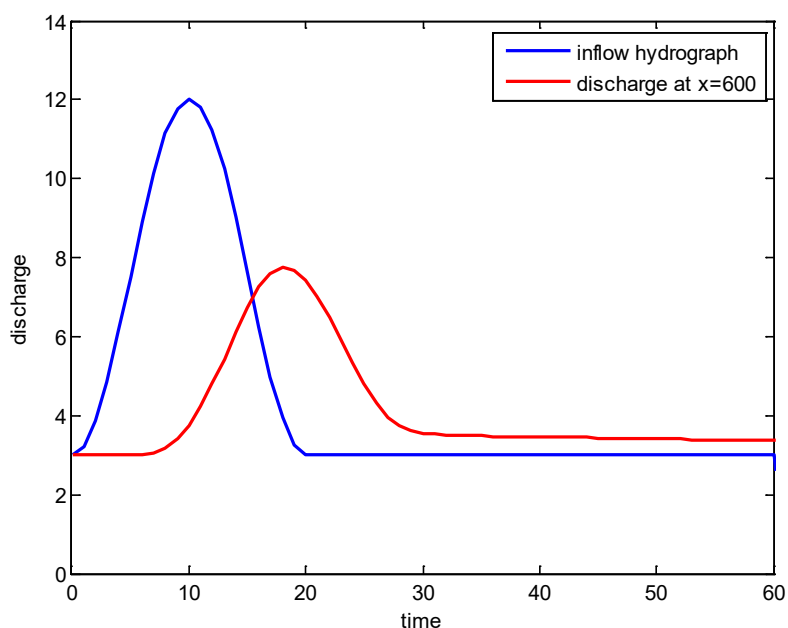


Gambar 5. Hidrograf berbentuk kurvatur yang masuk ke dalam kanal prismaatik



Gambar 6. Profil debit akibat dari hidrograf kurvatur

Gambar 5 menunjukkan besarnya debit yang akan masuk ke kanal secara bertahap selama 20 det. Awalnya debit yang masuk sebesar $Q = 3 \text{ m}^3/\text{det.}$ dan mencapai puncak $Q = 12 \text{ m}^3/\text{det.}$ pada $t = 10$, lalu berkurang hingga menjadi $Q = 3 \text{ m}^3/\text{det.}$ saat $t = 20$ det.



Gambar 7. Perbandingan antara hidrograf yang masuk dan debit pada $x = 600$ m yang menunjukkan adanya penurunan debit puncak.

Gambar 6 memperlihatkan debit yang merambat ke hilir mengalami redaman sepanjang kanal akibat pengaruh gesekan antara air dengan dasar dan dinding kanal. Sedangkan Gambar 7 memperlihatkan perbandingan antara hidrograf masuk berbentuk kurvatur dan debit yang diamati pada $x = 600$ m. Dari gambar terlihat bahwa debit maksimum mengalami penurunan dari $Q = 12 \text{ m}^3/\text{det.}$ menjadi $Q = 7,78 \text{ m}^3/\text{det.}$ dan waktu debit maksimum juga bergeser dari $t = 10 \text{ det.}$ menjadi $t = 19 \text{ det.}$

4 Simpulan

Telah dihasilkan skema numerik yang stabil untuk mencari solusi hampiran dari Persamaan Saint Venant yang berlaku pada kanal dengan penampang basah berbentuk persegi panjang. Dari model numerik tersebut kita bisa mensimulasikan perilaku aliran air di hilir kanal prismatic. Hasil simulasi menunjukkan bahwa semakin jauh dari sumber debit maka debit puncak semakin mengalami peredaman sepanjang kanal.

5 Ucapan Terima Kasih

Peneliti mengucapkan terima kasih kepada LPPM Universitas Nusantara PGRI Kediri yang telah mendukung penelitian ini melalui Penelitian Stimulus Universitas 2023.

6 Daftar Pustaka

- [1] R. Barati, S. Rahimi, and G. H. Akbari, “Analysis of dynamic wave model for flood routing in natural rivers,” *Water Sci. Eng.*, vol. 5, no. 3, pp. 243–258, 2012, doi: 10.3882/j.issn.1674-2370.2012.03.001.
- [2] E. Retsinis, E. Daskalaki, and P. Papanicolaou, “Dynamic flood wave routing in prismatic channels with hydraulic and hydrologic methods,” *J. Water Supply Res. Technol. - AQUA*, vol. 69, no. 3, pp. 276–287, 2020, doi: 10.2166/aqua.2019.091.
- [3] B. Bharali and U. K. Misra, “Investigation of Flood Routing Using Variable Parameter Kinematic Wave Model (VPKWM) for Non-Prismatic Natural Channel in an Ungauged Basin,” *J. Appl. Eng. Sci.*, vol. 10, no. 2, pp. 111–118, 2020, doi: 10.2478/jaes-2020-0017.
- [4] A. Ficchi, C. Perrin, and V. Andréassian, “Hydrological modelling at multiple sub-daily time steps: Model improvement via flux-matching,” *J. Hydrol.*, vol. 575, no. April, pp. 1308–1327, 2019, doi: 10.1016/j.jhydrol.2019.05.084.
- [5] M. Jahanbazi, I. Özgen, R. Aleixo, and R. Hinkelmann, “Development of a diffusive wave shallow water model with a novel stability condition and other new features,” *J. Hydroinformatics*, vol. 19, no. 3, pp. 405–425, 2017, doi: 10.2166/hydro.2017.108.
- [6] H. Zheng, E. Huang, and M. Luo, “Applicability of kinematic wave model for flood routing under unsteady inflow,” *Water (Switzerland)*, vol. 12, no. 9, 2020, doi: 10.3390/w12092528.
- [7] F. Zarmehi, “NUMERICAL STABILITY AND ADAPTIVE METHODS FOR SOLVING THE SAINT- VENANT EQUATIONS,” no. April, 2015.
- [8] F. P. Cunge, F. M. Verwey, and F. M. Holly, *Practical Aspects of Computational River Hydraulics*. Pitman Advanced Publishing Program, 1980.
- [9] M. H. Chaudhry, *Open-Channel Flow*. New York, USA: Springer Science+Business Media, 2008.
- [10] R. Szymkiewics, *Numerical Modeling in Open Channel Hydraulics*. Water Science and Technology Library, Springer, 2010.
- [11] M. E. Keskin and N. Ağiralioglu, “A simplified dynamic model for flood routing in rectangular channels,” *J. Hydrol.*, vol. 202, no. 1–4, pp. 302–314, 1997, doi: 10.1016/S0022-1694(97)00072-3.
- [12] B. A. Sulistyono and L. H. Wiryanto, “a Staggered Method for Numerical Flood Routing in Rectangular Channels,” *Adv. Appl. Fluid Mech.*, vol. 23, no. 2, pp. 171–179, 2019, doi: 10.17654/fm023020171.