Limits: Journal of Mathematics and Its Applications
E-ISSN: 2579-8936
P-ISSN: 1829-605X
Vol. 20, No. 2, Juli 2023, 241-253
DOI: http://dx.doi.org/10.12962/limits.v20i2.16359

Dimensi Metrik Amalgamasi Graf Theta

Des Welyyanti [1*], Alifaziz Arsyad [2], Lyra Yulianti [3]
[1,2,3,]Program Studi S1 Matematika,
[1,2,3]Departemen Matematika dan Sains Data, FMIPA, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia
e-mail: [1*]wely@sci.unand.ac.id, [2]afasarsyad31@gmail.com, [3]lyra@sci.unand.ac.id

Diajukan: 9 Maret 2023, Diperbaiki: 11 April 2023, Diterima: 27 Juni 2023

Abstrak

Misalkan $G = (V, E)$ adalah suatu graf terhubung dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Misalkan u dan v adalah titik-titik dalam graf terhubung G, panjang lintasan terpendek dari u ke v pada G dinotasikan $d(u, v)$. Jika $W = \{w_1, w_2, \cdots, w_k\}$ suatu himpunan terurut dari titik-titik dalam graf terhubung G dan titik $v \in V(G)$, maka representasi dari titik v terhadap W, dinotasikan $r(v|W)$ adalah $r(v|W) = (d(v, w_1), d(v, w_2), \cdots, d(v, w_k))$. Jika $r(v|W)$ untuk setiap titik $v \in V(G)$ berbeda, maka W dinamakan himpunan pembeda dari G. Himpunan pembeda dengan kardinalitas minimum dinamakan himpunan pembeda minimum, dan kardinalitas dari himpunan pembeda minimum dinamakan dimensi metrik (metric dimension) dari G, dinotasikan dim (G). Pada penelitian ini dibahas tentang dimensi metrik amalgamasi graf Theta.

Kata Kunci: Dimensi metrik, himpunan pembeda, amalgamasi, graf Theta.

Abstract

Let $G = (V, E)$ be a connected graph with vertex set $V(G)$ and edge set $E(G)$. Define u and v as two vertices in a connected graph G. The length of the shortest path from u to v of G is denoted by $d(u, v)$. If $W = \{w_1, w_2, \cdots, w_k\}$ an ordered set from vertices of G connected graph and vertex $v \in V(G)$, then representation of vertex v with respect to W, denoted by $r(v|W)$ is $r(v|W) = (d(v, w_1), d(v, w_2), \cdots, d(v, w_k))$. If $r(v|W)$ have distinct representation, then W is called the resolving set of G. The resolving set with minimum cardinality is called minimun resolving set, and the cardinality from minimun resolving set is called the metric dimension of G, denoted by $dim\ (G)$. In this paper, we discuss about metric dimension for amalgamation of theta graph.

***Keywords**: Metric dimension, resolving set, amalgamation, Theta graph.*

1 Pendahuluan

Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf terhubung, dengan $V(G)$ adalah himpunan titik dan $E(G)$ himpunan sisi. Salah satu kajian dalam teori graf yang dibahas dalam penelitian ini adalah dimensi metrik. Istilah dimensi metrik pertama kali diperkenalkan oleh Harary dan Melter[1]. Pada tahun 2000, Chartrand dkk[2] juga membahas tentang dimensi metrik. Jarak antara dua titik u dan v didefinisikan sebagai lintasan terpendek dari titik u ke v di G, dinotasikan $d(u, v)$. Jika diberikan suatu himpunan terurut $W = \{w_1, w_2, \cdots, w_k\} \subseteq V(G)$, maka representasi titik v terhadap W adalah $r(v|W) = (d(v, w_1), d(v, w_2), \cdots, d(v, w_k))$. Jika $r(v|W)$ untuk setiap titik

$v \in V(G)$ berbeda, maka W disebut himpunan pembeda. Kardinalitas minimum dari himpunan pembeda disebut dimensi metrik dari G, yang dinotasikan $dim(G)$.

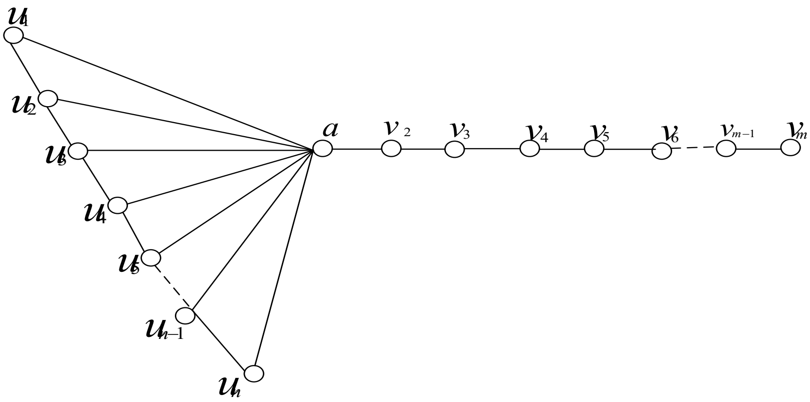
Seiring dengan kemajuan ilmu pengetahuan dan teknologi, telah diperoleh beberapa hasil terkait penentuan dimensi metrik dari beberapa graf. Beberapa hasil dimensi metrik yang telah diperoleh diantaranya yaitu, graf lingkaran[3], graf kipas[4], graf roda[5], graf bipartit beraturan[6], graf kepingan Salju[7], dan *Subdivided-thorn Graph*[8]. Kemudian, beberapa hasil terkait operasi penjumlahan graf yang telah diperoleh diantaranya adalah Suhud dkk[9] yang memperoleh dimensi metrik graf kincir pola $K_1 + mK_3$ untuk $m \geq 2$. Selanjutnya, Putra dkk[10] menentukan dimensi metrik dari graf $W_n + C_n$ untuk $n \in \{3,4\}$. Pada tahun yang sama Utomo dan Novian[11]memperoleh dimensi metrik graf yang merupakan hasil amalgamasi n buah graf lengkap K_m, untuk $n \geq 4$ dan $m \geq 4$, yang dinotasikan dengan graf $Amal\{nK_m | n \geq 4, m \geq 4\}$. Selanjutnya, Riyandho dkk[12]memperoleh dimensi metrik dari graf kincir pola $K_1 + mK_4$ untuk $m \geq 2$.

Amalgamasi graf merupakan suatu operasi pada graf. Misalkan $\{G_1, G_2, \cdots, G_t\}$ untuk $i \in \{1,2,\cdots,t\}$, $t \geq 2$ adalah kumpulan hingga graf dari graf terhubung tak trivial dan $v_{0,i}$ adalah sebuah titik dari graf G_i yang dinamakan titik terminal. Graf amalgamasi dinotasikan dengan $Amal\{G_i, v_{0,i}\}$ adalah suatu graf yang berasal dari graf $G_1, G_2, \cdots, G_t$ dengan cara mengidentifikasi titik-titik terminal dari $\{G_1, G_2, \dots, G_t\}$ tersebut sedemikian sehingga $v_{0,1} = v_{0,2} = \cdots = v_{0,t}$. Simanjuntak dkk[13] menemukan teorema yang mengaitkan dimensi metrik pada suatu graf *G* dengan amalgamasi dari graf tersebut sebagai berikut.

Teorema 1[13]. Untuk $\mathrm{m} \in \mathbb{N}$, $\mathrm{m} \geq 2$, misalkan $\{\mathrm{G}_1, \mathrm{G}_2, \cdots, \mathrm{G}_\mathrm{m}\}$ adalah kumpulan graf terhubung sebarang nontrivial, dan setiap G_j memiliki titik terminal a_j, untuk $1 \leq \mathrm{j} \leq \mathrm{m}$. Misalkan c sebagai titik baru yang berasal dari identifikasi semua titik terminal. Jika $\mathrm{G} := \mathrm{Amal}\{\mathrm{G}_1, \mathrm{G}_2, \cdots, \mathrm{G}_\mathrm{m}, \mathrm{c}\}$, maka

$$\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{m}} \dim(\mathrm{G}_\mathrm{i}) - \mathrm{m} \leq \dim(\mathrm{G}) \leq \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{m}} \dim(\mathrm{G}_\mathrm{i}) + \mathrm{m} - 1.$$

Misalkan F_n adalah graf kipas dengan $n+1$ titik dan $V(F_n) = \{u_0, u_1, u_2, u_3, \dots, u_n\}$. Misalkan P_m adalah graf lintasan dengan m titik dan $V(P_m) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_m\}$. Graf $Amal(F_n P_m)$ adalah graf amalgamasi dari graf kipas F_n dan lintasan P_m dengan mengidentifikasi titik u_0 dan v_i pada graf kipas F_n dan lintasan P_m, menjadi titik baru yaitu titik a. Graf $Amal(F_n P_m)$ dapat dilihat pada Gambar 1.



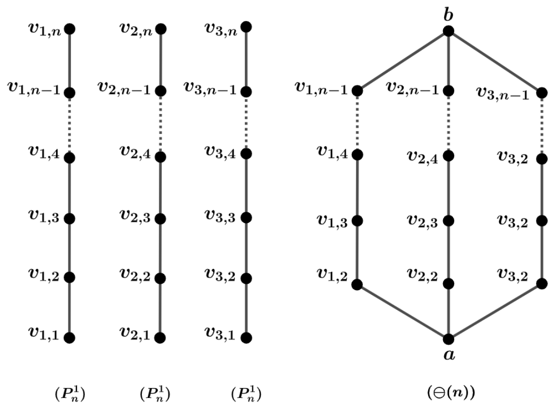
Gambar 1. Graf $Amal(F_nP_m)$

Misalkan terdapat tiga graf lintasan dengan n titik, untuk $n \geq 3$, dinotasikan P_n^1, P_n^2 dan P_n^3, himpunan titik dan himpunan sisi sebagai berikut.

$$V(P_n^k) = \{v_{k,i} | 1 \leq k \leq 3, 1 \leq i \leq n\},$$

$$E(P_n^k) = \{v_{k,j}v_{k,(j+1)} | 1 \leq k \leq 3, 1 \leq j \leq n-1\}$$

Graf Theta yang dinotasikan dengan $\Theta(n)$, adalah graf yang dibentuk dengan cara melakukan operasi amalgamasi titik terhadap titik-titik $v_{k,1}$, untuk $1 \leq k \leq 3$ menjadi satu titik baru, namakan titik a. Selanjutnya, lakukan operasi amalgamasi titik terhadap titik-titik $v_{k,n}$, untuk $1 \leq k \leq 3$ menjadi satu titik baru, namakan titik b. Ilustrasi graf P_n^1, P_n^2, P_n^3 dan $\Theta(n)$ diberikan pada Gambar 2.



Gambar 2. Graf P_n^1, P_n^2, P_n^3 dan $\Theta(n)$

Himpunan titik dan himpunan sisi pada graf Theta sebagai berikut.

$$V(\Theta(n)) = \{a, b\} \cup \{v_{k,l} | 1 \leq k \leq 3, 2 \leq l \leq n-1\},$$

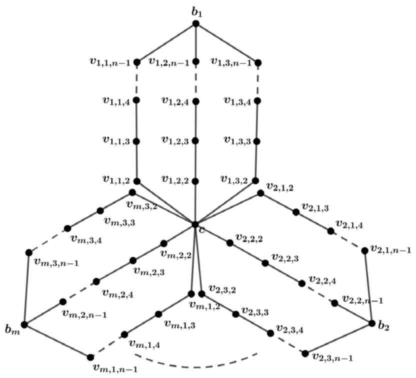
$$E(\Theta(n)) = \{v_{k,p}v_{k,(p+1)} | 1 \leq k \leq 3, 2 \leq p \leq n-2\} \cup \{av_{k,2} | 1 \leq k \leq 3\} \cup \{bv_{k,n-1} | 1 \leq k \leq 3\}.$$

Diberikan m buah graf Theta dengan n titik, untuk $m \geq 2$ dan $n \geq 3$. Identifikasi titik a_j, untuk $1 \leq j \leq m$, menjadi titik baru, namakan titik c. Selanjutnya akan dilakukan operasi amalgamasi terhadap m buah graf Theta, Notasikan dengan $H = Amal\{m\Theta(n)|m \geq 2, n \geq 3\}$. Himpunan titik dan sisi pada graf H adalah sebagai berikut.

$$V(H) = \{c, b_j|1 \leq j \leq m\} \cup \{v_{j,k,l}|1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq 3, 2 \leq l \leq n-1,\},$$

$$E(H) = \{v_{j,k,p}v_{j,k,(p+1)}|1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq 3, 2 \leq p \leq n-2\}$$
$$\cup \ \{cv_{j,k,2}|1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq 3\} \cup \{b_j v_{j,k,n-1}|1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq 3\}.$$

Graf $H = Amal\{m\Theta(n)|m \geq 2, n \geq 3\}$ dapat dilihat pada Gambar 3.



Gambar 3. Graf $H = Amal\{m\Theta(n)|m \geq 2, n \geq 3\}$

2 Metode Penelitian

Langkah-langkah yang dilakukan untuk menentukan dimensi metrik amalgamasi graf Theta (H) adalah sebagai berikut. Untuk menunjukkan bahwa *dim(H) = k-1*, akan ditentukan batas atas dan batas bawah untuk dimensi metrik graf *H*. Batas atas *dim(H)* ditentukan dengan cara mengkonstruksi suatu himpunan pembeda *W* dengan |*W*| = *k-1*, sedemikian sehingga dari setiap titik *u* di *V(H)*, mempunyai representasi yang berbeda. Batas bawah *dim(H)* ditentukan dengan menunjukkan bahwa untuk setiap kemungkinan himpunan pembeda *W** dengan |*W**| = *k-2*, akan selalu terdapat minimal dua titik dengan representasi yang sama.

3 Hasil dan Pembahasan

Teorema berikut memberikan dimensi metrik graf Theta yang dinotasikan dengan $\Theta(n)$.

Teorema 2. Misalkan n adalah bilangan bulat, dengan $n \geq 3$. Jika $Amal(F_n P_m)$ adalah graf amalgamasi dari graf kipas F_n dan lintasan P_m maka $dim\big(Amal(F_n P_m)\big) = \text{n} - 2$.

Bukti. Misalkan graf $Amal(F_n P_m)$ adalah graf amalgamasi dari graf kipas F_n dan lintasan P_m dengan $V(Amal(F_n P_m)) = \{a, u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, v_2, v_3, \dots, v_m\}$. Akan ditunjukkan $dim\big(\Theta(n)\big) = \text{n} - 2$. Tanpa mengurangi perumuman, pilih himpunan $W = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_n\} \backslash \left\{u_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, u_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}\right\}$.

Akan dibuktikan W adalah himpunan pembeda. Representasi semua titik pada $V(Amal(F_nP_m))$ sebagai berikut.

$r(u_1|W) = (0,1,2,2,2,2,\dots,2,2,2)$

$r(u_2|W) = (1,0,1,2,2,2,\dots,2,2,2)$

$r(u_3|W) = (2,1,0,1,2,2,\dots,2,2,2)$

$\vdots$

$r\left(u_{\frac{\lfloor n \rfloor}{2}}|W\right) = (2,2,\dots,1,2,2,\dots,2,2,2)$

$r\left(u_{\frac{\lfloor n \rfloor}{2}+1}|W\right) = (2,2,\dots,2,1,2,\dots,2,2,2)$

$\vdots$

$r(u_{n-1}|W) = (2,2,2,2,2,2,\dots,1,0,1)$

$r(u_n|W) = (2,2,2,2,2,2,\dots,2,1,0)$

$r(v_2|W) = (2,2,2,2,2,2,\dots,2,2,2)$

$r(v_3|W) = (3,3,3,3,3,3,\dots,3,3,3)$

$\vdots$

$r(v_m|W) = (m,m,m,m,m,m,\dots,m,m,m)$

$r(a) = (1,1,1,1,1,1,\dots,1,1,1)$

Karena setiap titik pada $Amal(F_nP_m)$ memiliki representasi yang berbeda, maka W adalah himpunan pembeda, akibatnya $dim\big(Amal(F_nP_m)\big) \le \mathrm{n}-2$. Selanjutnya, akan ditunjukan bahwa untuk setiap W^* dengan $|W^*| = \mathrm{n}-3$, berlaku W^* bukan himpunan pembeda. Artinya, akan selalu terdapat minimal dua titik dengan representasi yang sama terhadap W^*. Perhatikan beberapa kasus berikut:

Kasus 1. Jika $W^* = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_n\} \backslash \left\{u_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}, u_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+1}, u_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+2}\right\}$, maka diperoleh

$$r\left(u_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+1}\middle|W^*\right) = r(v_2|W^*).$$

Kasus 2. Jika $W^* = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_n\} \backslash \{u_{n-2}, u_{n-1}, u_n\}$, maka diperoleh

$$r(u_{n-1}|W^*) = r(v_2|W^*).$$

Kasus 3. Jika $W^* = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_n\} \backslash \{u_1, u_2, u_3\}$, maka diperoleh

$$r(u_2|W^*) = r(v_2|W^*).$$

Akibatnya, $dim\big(Amal(F_nP_m)\big) \ge \mathrm{n}-2$. Jadi, $dim\big(Amal(F_nP_m)\big) = \mathrm{n}-2$. ■

Teorema 3. Misalkan n adalah bilangan bulat, dengan $n \ge 3$. Jika $\Theta(n)$ adalah graf Theta, maka $dim(\Theta(n)) = 3$.

Bukti. Diberikan graf $\Theta(n)$ dengan himpunan titik $V(\Theta(n)) = \{a,b\} \cup \{v_{k,l} | 1 \le k \le 3, 2 \le l \le n-1\}$. Akan ditunjukkan $dim(\Theta(n)) = 3$. Tanpa mengurangi perumuman, pilih himpunan $W = \{v_{1,2}, v_{2,2}, v_{3,2}\} \in V(\Theta(n))$. Akan dibuktikan $W = \{v_{1,2}, v_{2,2}, v_{3,2}\}$ adalah himpunan pembeda. Perhatikan representasi semua titik $V(\Theta(n))$ sebagai berikut.

1. Representasi titik a terhadap W, diperoleh sebagai berikut.

$$r(a|W) = (1,1,1).$$

2. Representasi titik $v_{i,j}$, untuk setiap $1 \leq i \leq 3$, $2 \leq j \leq n-1$ terhadap W. Diperoleh sebagai berikut.

$$r(v_{1,2}|W) = (0,2,2),$$
$$r(v_{2,2}|W) = (2,0,2),$$
$$r(v_{3,2}|W) = (2,2,0),$$
$$r(v_{1,3}|W) = (1,3,3),$$
$$r(v_{2,3}|W) = (3,1,3),$$
$$r(v_{3,3}|W) = (3,3,1),$$
$$r(v_{1,4}|W) = (2,4,4),$$
$$r(v_{2,4}|W) = (4,2,4),$$
$$r(v_{3,4}|W) = (4,4,2),$$
$$\vdots$$
$$r(v_{1,n-2}|W) = (n-4, n-2, n-2),$$
$$r(v_{2,n-2}|W) = (n-2, n-4, n-2),$$
$$r(v_{3,n-2}|W) = (n-2, n-2, n-4),$$
$$r(v_{1,n-1}|W) = (n-3, n-1, n-1),$$
$$r(v_{2,n-1}|W) = (n-1, n-3, n-1),$$
$$r\left(v_{3,n-1}|W\right) = (n-1, n-1, n-3).$$

3. Representasi titik b terhadap W, diperoleh sebagai beriku.

$$r(b|W) = (n-2, n-2, n-2).$$

Karena setiap titik pada $\Theta(n)$ memiliki representasi yang berbeda, maka W adalah himpunan pembeda, akibatnya $dim(\Theta(n)) \leq 3$. Selanjutnya, akan ditunjukan bahwa untuk setiap W^* dengan $|W^*| = 2$, berlaku W^* bukan himpunan pembeda. Artinya, akan selalu terdapat minimal dua titik dengan representasi yang sama terhadap W^*. Perhatikan beberapa kasus berikut. Misalkan $W^* = \{\alpha, \beta\}$

Kasus 1. Jika $W^* = \{\alpha, \beta\}$, maka berlaku $\alpha \in \{a, b\}$, $\beta \in \{v_{i,j} | 1 \leq i \leq 3, 2 \leq j \leq n-1\}$. Akan selalu terdapat titik $v_{r,s}$, dengan $1 \leq r \leq 3, r \neq i, 2 \leq s \leq n-1$, yang mempunyai representasi yang sama dengan representasi titik $v_{x,y}$, dengan $1 \leq x \leq 3, x \neq r, i, 2 \leq y \leq n-1, y = s$. Tanpa mengurangi perumuman misalkan $W^* = \{a, v_{1,2}\}$, diperoleh representasi titik $v_{2,2}$ dan $v_{3,2}$ terhadap W^* sebagai berikut.

$$r(v_{2,2}) = (1,2) = r(v_{3,2}).$$

Kasus 2. Jika $W^* = \{\alpha, \beta\}$, maka berlaku $\alpha \in \{v_{i,j} | 1 \leq i \leq 3, 2 \leq j \leq n-1\}$, $\beta \in \{v_{k,j} | 1 \leq k \leq 3, k \neq i, 2 \leq j \leq n-1\}$. Perhatikan beberapa subkasus berikut:

Subkasus 2.1 $n = 3$.

Ambil satu titik sebarang di himpunan titik $v_{i,j}$ dan $v_{k,j}$, akan selalu terdapat representasi titik yang sama pada titik a dan b.

Subkasus 2.2 $n > 3$, n genap.

1. Misalkan $W^* = \{v_{i,j}, v_{k,j}\}$, dengan $j \leq \frac{n}{2}$. Akan selalu terdapat titik $v_{x,y}$, dengan $1 \leq x \leq 3$,

$x \neq i, k, 2 \leq y \leq n-1$, yang mempunyai representasi yang sama dengan representasi titik b.

2. Misalkan $W^* = \{v_{i,j}, v_{k,j}\}$, dengan $j > \frac{n}{2}$. Akan selalu terdapat titik $v_{x,y}$, dengan $1 \leq x \leq 3, x \neq i, k, 2 \leq y \leq n-1$, yang mempunyai representasi yang sama dengan representasi titik a.

Subkasus 2.3 $n > 3$, n ganjil.

1. Misalkan $W^* = \{v_{i,j}, v_{k,j}\}$, dengan $j < \lceil\frac{n}{2}\rceil$. Akan selalu terdapat titik $v_{x,y}$, dengan $1 \leq x \leq 3, x \neq i, k, 2 \leq y \leq n-1$, yang mempunyai representasi yang sama dengan representasi titik b.
2. Misalkan $W^* = \{v_{i,j}, v_{k,j}\}$, dengan $j = \lceil\frac{n}{2}\rceil$. Akan selalu terdapat representasi titik yang sama pada titik a dan b.
3. Misalkan $W^* = \{v_{i,j}, v_{k,j}\}$, dengan $j > \lceil\frac{n}{2}\rceil$. Akan selalu terdapat titik $v_{x,y}$, dengan $1 \leq x \leq 3, x \neq i, k, 2 \leq y \leq n-1$, yang mempunyai representasi yang sama dengan representasi titik a.

Kasus 3. Jika $W^* = \{\alpha, \beta\}$, maka berlaku $\alpha \in \{v_{i,j} | 1 \leq i \leq 3, 2 \leq j \leq n-1\}$, $\beta \in \{v_{x,y} | 1 \leq x \leq 3, x \neq i, 2 \leq y \leq n-1, y \neq j$. Tanpa mengurangi perumuman, misalkan $W^* = \{v_{1,2}, v_{2,3}\}$, diperoleh representasi titik $\{v_{1,n-1}, v_{3,n-3}\}$ terhadap W^* sebagai berikut.

$$r(v_{1,n-1}|W) = (n-3, n-3) = r(v_{3,n-3}|W).$$

Kasus 4. Jika $W^* = \{\alpha, \beta\}$, maka berlaku $\alpha \in \{v_{i,j} | 1 \leq i \leq 3, 2 \leq j \leq n-1\}$, $\beta \in \{v_{i,k} | 1 \leq i \leq 3, 2 \leq k \leq n-1, k \neq j\}$ Akan selalu terdapat titik $v_{r,s}$, dengan $1 \leq r \leq 3, r \neq i, 2 \leq s \leq n-1$, yang mempunyai representasi yang sama dengan representasi titik $v_{x,y}$, dengan $1 \leq x \leq 3, x \neq r, i, 2 \leq y \leq n-1, y = s$. Tanpa mengurangi perumuman, misalkan $W^* = \{v_{1,2}, v_{1,3}\}$, diperoleh representasi titik $\{v_{2,2}, v_{3,2}\}$ terhadap W^*.

$$r(v_{2,2}|W) = (2,3) = r(v_{3,2}|W).$$

Dari empat kasus di atas, karena terdapat representasi titik yang sama terhadap W^*, maka terbukti W^* bukan himpunan pembeda bagi graf Theta. Akibatnya, $dim(\Theta(n)) \geq 3$. Jadi, $dim(\Theta(n)) = 3$. ■

Teorema berikut memberikan dimensi metrik amalgamasi graf Theta yang dinotasikan sebagai graf H.

Teorema 4. Misalkan graf $H = Amal\{m\Theta(n) | m \geq 2, n \geq 3\}$, maka $dim(H) = 3m - 1$.

Bukti. Akan dibuktikan $\dim(H) = 3m - 1$. Pilih himpunan $W \left\{v_{i,j,2} \middle| 1 \leq i \leq m-1, 1 \leq j \leq 3\right\}$

$\cup \{v_{m,1,2}, v_{m,2,2}\}$, dengan $W \subseteq V(H)$ dan $|W| = 3m - 1$. Notasikan representasi setiap titik graf H terhadap W sebagai $r(v|W) = (d(v, v_{1,1,2}), d(v, v_{1,2,2}), d(v, v_{1,3,2}), d(v, v_{2,1,2}), d(v, v_{2,2,2}), d(v, v_{2,3,2}), \cdots, d(v, v_{m-1,1,2})$, $d(v, v_{m-1,2,2}), d(v, v_{m-1,3,2}), d(v, v_{m,1,2}), d(v, v_{m,2,2}))$, untuk setiap $v \in V(H)$. Perhatikan representasi semua titik $V(H)$ terhadap W sebagai berikut.

1. Representasi titik c terhadap W, diperoleh sebagai berikut.
$$r(c|W) = (1,1,1,1,1,1,1,1,1, \cdots, 1,1,1,1,1).$$
2. Representasi titik $v_{j,k,l}$ untuk setiap $1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq 3, 2 \leq l \leq n - 1$ terhadap W, diperoleh representasi titik sebagai berikut.

$$r(v_{1,1,2}|W) = (0,2,2,2,2,2,2,2,2, \cdots, 2,2,2,2,2),$$
$$r(v_{1,2,2}|W) = (2,0,2,2,2,2,2,2,2, \cdots, 2,2,2,2,2),$$
$$r(v_{1,3,2}|W) = (2,2,0,2,2,2,2,2,2, \cdots, 2,2,2,2,2),$$
$$r(v_{2,1,2}|W) = (2,2,2,0,2,2,2,2,2, \cdots, 2,2,2,2,2),$$
$$r(v_{2,2,2}|W) = (2,2,2,2,0,2,2,2,2, \cdots, 2,2,2,2,2),$$
$$r(v_{2,3,2}|W) = (2,2,2,2,2,0,2,2,2, \cdots, 2,2,2,2,2),$$
$$r(v_{3,1,2}|W) = (2,2,2,2,2,2,0,2,2, \cdots, 2,2,2,2,2),$$
$$r(v_{3,2,2}|W) = (2,2,2,2,2,2,2,0,2, \cdots, 2,2,2,2,2),$$
$$r(v_{3,2,2}|W) = (2,2,2,2,2,2,2,2,0, \cdots, 2,2,2,2,2),$$
$$\vdots$$
$$r(v_{m-1,1,2}|W) = (2,2,2,2,2,2,2,2,2, \cdots, 0,2,2,2,2),$$
$$r(v_{m-1,2,2}|W) = (2,2,2,2,2,2,2,2,2, \cdots, 2,0,2,2,2),$$
$$r(v_{m-1,3,2}|W) = (2,2,2,2,2,2,2,2,2, \cdots, 2,2,0,2,2),$$

$$r(v_{m,1,2}|W) = (2,2,2,2,2,2,2,2,2, \cdots, 2,2,2,0,2),$$
$$r(v_{m,2,2}|W) = (2,2,2,2,2,2,2,2,2, \cdots, 2,2,2,2,0),$$
$$r(v_{m,3,2}|W) = (2,2,2,2,2,2,2,2,2, \cdots, 2,2,2,2,2),$$
$$r(v_{1,1,3}|W) = (1,3,3,3,3,3,3,3,3, \cdots, 3,3,3,3,3),$$
$$r(v_{1,2,3}|W) = (3,1,3,3,3,3,3,3,3, \cdots, 3,3,3,3,3),$$
$$r(v_{1,3,3}|W) = (3,3,1,3,3,3,3,3,3, \cdots, 3,3,3,3,3),$$
$$r(v_{2,1,3}|W) = (3,3,3,1,3,3,3,3,3, \cdots, 3,3,3,3,3),$$
$$r(v_{2,2,3}|W) = (3,3,3,3,1,3,3,3,3, \cdots, 3,3,3,3,3),$$
$$r(v_{2,3,3}|W) = (3,3,3,3,3,1,3,3,3, \cdots, 3,3,3,3,3),$$
$$r(v_{3,1,3}|W) = (3,3,3,3,3,3,1,3,3, \cdots, 3,3,3,3,3),$$

$$r(v_{3,2,3}|W) = (3,3,3,3,3,3,3,1,3,\cdots,3,3,3,3,3),$$

$$r(v_{3,2,3}|W) = (3,3,3,3,3,3,3,3,1,\cdots,3,3,3,3,3),$$

$$\vdots$$

$$r(v_{m-1,1,3}|W) = (3,3,3,3,3,3,3,3,3,\cdots,1,3,3,3,3),$$

$$r(v_{m-1,2,3}|W) = (3,3,3,3,3,3,3,3,3,\cdots,3,1,3,3,3),$$

$$r(v_{m-1,3,3}|W) = (3,3,3,3,3,3,3,3,3,\cdots,3,3,1,3,3),$$

$$r(v_{m,1,3}|W) = (3,3,3,3,3,3,3,3,3,\cdots,3,3,3,1,3),$$

$$r(v_{m,2,3}|W) = (3,3,3,3,3,3,3,3,3,\cdots,3,3,3,3,1),$$

$$r(v_{m,3,3}|W) = (3,3,3,3,3,3,3,3,3,\cdots,3,3,3,3,3),$$

$$r(v_{1,1,4}|W) = (2,4,4,4,4,4,4,4,4,\cdots,4,4,4,4,4),$$

$$r(v_{1,2,4}|W) = (4,2,4,4,4,4,4,4,4,\cdots,4,4,4,4,4),$$

$$r(v_{1,3,4}|W) = (4,4,2,4,4,4,4,4,4,\cdots,4,4,4,4,4),$$

$$r(v_{2,1,4}|W) = (4,4,4,2,4,4,4,4,4,\cdots,4,4,4,4,4),$$

$$r(v_{2,2,4}|W) = (4,4,4,4,2,4,4,4,4,\cdots,4,4,4,4,4),$$

$$r(v_{2,3,4}|W) = (4,4,4,4,4,2,4,4,4,\cdots,4,4,4,4,4),$$

$$r(v_{3,1,4}|W) = (4,4,4,4,4,4,2,4,4,\cdots,4,4,4,4,4),$$

$$r(v_{3,2,4}|W) = (4,4,4,4,4,4,4,2,4,\cdots,4,4,4,4,4),$$

$$r(v_{3,2,4}|W) = (4,4,4,4,4,4,4,4,2,\cdots,4,4,4,4,4),$$

$$\vdots$$

$$r(v_{m-1,1,4}|W) = (4,4,4,4,4,4,4,4,4,\cdots,2,4,4,4,4),$$

$$r(v_{m-1,2,4}|W) = (4,4,4,4,4,4,4,4,4,\cdots,4,2,4,4,4),$$

$$r(v_{m-1,3,4}|W) = (4,4,4,4,4,4,4,4,4,\cdots,4,4,2,4,4),$$

$$r(v_{m,1,4}|W) = (4,4,4,4,4,4,4,4,4,\cdots,4,4,4,2,4),$$

$$r(v_{m,2,4}|W) = (4,4,4,4,4,4,4,4,4,\cdots,4,4,4,4,2),$$

$$r(v_{m,3,4}|W) = (4,4,4,4,4,4,4,4,4,\cdots,4,4,4,4,4),$$

$$r(v_{1,1,n-1}|W) = (n-3, n-1, n-1, n-1, n-1, n-1, n-1, n-1, n-1, \cdots, n-1, n-1, n-1, n-1, n-1),$$

$$r(v_{1,2,n-1}|W) = (n-1, n-3, n-1, n-1, n-1, n-1, n-1, n-1, n-1, \cdots, n-1, n-1, n-1, n-1, n-1),$$

$$r(v_{1,3,n-1}|W) = (n-1, n-1, n-3, n-1, n-1, n-1, n-1, n-1, n-1, \cdots, n-1, n-1, n-1, n-1, n-1),$$

$$r(v_{2,1,n-1}|W) = (n-1, n-1, n-1, n-3, n-1, n-1, n-1, n-1, n-1, \cdots, n-1, n-1, n-1, n-1, n-1),$$
$$r(v_{2,2,n-1}|W) = (n-1, n-1, n-1, n-1, n-3, n-1, n-1, n-1, n-1, \cdots, n-1, n-1, n-1, n-1, n-1),$$
$$r(v_{2,3,n-1}|W) = (n-1, n-1, n-1, n-1, n-1, n-3, n-1, n-1, n-1, \cdots, n-1, n-1, n-1, n-1, n-1),$$
$$r(v_{3,1,n-1}|W) = (n-1, n-1, n-1, n-1, n-1, n-1, n-3, n-1, n-1, \cdots, n-1, n-1, n-1, n-1, n-1),$$
$$r(v_{3,2,n-1}|W) = (n-1, n-1, n-1, n-1, n-1, n-1, n-1, n-3, n-1, \cdots, n-1, n-1, n-1, n-1, n-1),$$
$$r(v_{3,2,n-1}|W) = (n-1, n-1, n-1, n-1, n-1, n-1, n-1, n-1, n-3, \cdots, n-1, n-1, n-1, n-1, n-1),$$
$$\vdots$$
$$r(v_{m-1,1,n-1}|W) = (n-1, n-1, n-1, n-1, n-1, n-1, n-1, n-1, n-1, \cdots, n-3, n-1, n-1, n-1, n-1),$$
$$r(v_{m-1,2,n-1}|W) = (n-1, n-1, n-1, n-1, n-1, n-1, n-1, n-1, n-1, \cdots, n-1, n-3, n-1, n-1, n-1),$$
$$r(v_{m-1,3,n-1}|W) = (n-1, n-1, n-1, n-1, n-1, n-1, n-1, n-1, n-1, \cdots, n-1, n-1, n-3, n-1, n-1),$$
$$r(v_{m,1,n-1}|W) = (n-1, n-1, n-1, n-1, n-1, n-1, n-1, n-1, n-1, \cdots, n-1, n-1, n-1, n-3, n-1),$$
$$r(v_{m,2,n-1}|W) = (n-1, n-1, n-1, n-1, n-1, n-1, n-1, n-1, n-1, \cdots, n-1, n-1, n-1, n-1, n-3),$$
$$r(v_{m,3,n-1}|W) = (n-1, n-1, n-1, n-1, n-1, n-1, n-1, n-1, n-1, \cdots, n-1, n-1, n-1, n-1, n-1).$$

3. Representasi titik b_j, untuk setiap $1 \leq j \leq m$ terhadap W, diperoleh representasi titik sebagai berikut.

$$r(b_1|W) = (n-2, n-2, n-2, n+1, n+1, n+1, n+1, n+1, n+1, \cdots, n+1, n+1, n+1, n+1, n+1),$$
$$r(b_2|W) = (n+1, n+1, n+1, n-2, n-2, n-2, n+1, n+1, n+1, \cdots, n+1, n+1, n+1, n+1, n+1),$$

$$r(b_3|W) = (n+1, n+1, n+1, n+1, n+1, n+1, n-2, n-2, n-2, \cdots, n+1, n+1, n+1, n+1, n+1),$$

$$\vdots$$

$$r(b_{m-1}|W) = (n+1, n+1, n+1, n+1, n+1, n+1, n+1, n+1, n+1, \cdots, n-2, n-2, n-2, n+1, n+1),$$

$$r(b_m|W) = (n+1, n+1, n+1, n+1, n+1, n+1, n+1, n+1, n+1, \cdots, n+1, n+1, n+1, n-2, n-2).$$

Karena setiap representasi titik graf H terhadap W berbeda, maka W adalah himpunan pembeda. Akibatnya, $dim(H) \leq 3m - 1$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $dim(H) \geq 3m - 1$. Misalkan $dim(H) = 3m - 2$ dan W^* adalah himpunan pembeda lain graf H. Untuk menentukan batas bawah dari graf H akan digunakan prinsip pigeonhole. Misalkan terdapat m buah graf $\Theta(n)$ untuk $m \geq 2$ dan $n \geq 3$ yang masing-masingnya diilustrasikan sebagai kotak, dan titik-titik sebagai himpunan pembeda atau $W^* \in V(H)$ diilustrasikan sebagai objek.

Berdasarkan Teorema 2, jika $\Theta(n)$ adalah graf Theta, maka $dim(\Theta(n)) = 3$. Dengan menggunakan prinsip pigeonhole, jika $3m - 2$ objek ditempatkan pada m kotak, maka terdapat paling sedikit satu kotak atau lebih yang memuat kurang dari tiga objek. Misalkan $\Theta(n)^*$ adalah graf $\Theta(n)$ yang merupakan subgraf dari graf H yang memiliki kurang dari tiga titik sebagai himpunan pembeda. Misalkan himpunan pembeda $\Theta(n)^*$ tersebut $W_1^* \subseteq W^*$. Perhatikan representasi titik $v_{i,j,2} \in \Theta(n)^*$ terhadap W_1^*. Akan ditentukan beberapa kasus berikut.

Kasus A. Terdapat dua buah graf $\Theta(n)^*$.

Misalkan pilih himpunan $W_1^* = \{v_{1,1,3}, v_{1,2,3}, v_{2,1,3}, v_{2,2,3}\}$. Representasi titik $v_{1,3,2}$ dan $v_{2,3,2}$ terhadap W_1^* sebagai berikut.

$$r(v_{1,3,2}|W_1^*) = (3,3,3,3) = r(v_{2,3,2}|W_1^*).$$

Kasus B. Terdapat satu graf $\Theta(n)^*$.

Misalkan pilih himpunan $W_1^* = \{v_{2,2,3}\}$. Representasi titik $v_{2,1,2}$ dan $v_{2,3,2}$ terhadap W_1^* sebagai berikut.

$$r(v_{2,1,2}|W_1^*) = (3,3) = r(v_{2,3,2}|W_1^*).$$

Karena terdapat representasi titik yang sama, maka terbukti W_1^* bukan himpunan pembeda bagi $\Theta(n)^*$. Karena $\Theta(n)^*$ merupakan subgraf dari H, dan $W_1^* \subseteq W^*$ dengan $|W^*| = 3m - 2$, maka W^* juga bukan himpunan pembeda bagi graf H. Akibatnya, $\dim(H) \geq 3m - 1$. Jadi, $\dim(H) = 3m - 1$. ■

4 Simpulan

Pada penelitian ini diperoleh dimensi metrik dari graf Theta $\Theta(n)$, untuk $n \geq 3$ adalah 3. Kemudian, diperoleh dimensi metrik dari amalgamasi graf Theta yang dinotasikan dengan $H = Amal\{m\Theta(n)|m \geq 2, n \geq 3\}$ adalah $3m - 1$. Selain itu, penelitian ini juga memperoleh dimensi metrik graf $Amal(F_n P_m)$ adalah *n-2*.

5 UcapanTerima Kasih

Penelitian ini didanai oleh Penelitian Riset Dasar FMIPA Universitas Andalas Tahun 2022.

6 Daftar Pustaka

[1] H. Iswadi, E. T. Baskoro, A. N. M. Salman, and R. Simanjuntak, “The resolving graph of amalgamation of cycles,” *Utilitas Mathematica*, vol. 83, 2010.

[2] G. Chartrand, C. Poisson, and P. Zhang, “Resolvability and the upper dimension of graphs,” *Computers and Mathematics with Applications*, vol. 39, no. 12, 2000, doi: 10.1016/S0898-1221(00)00126-7.

[3] G. Chartrand, L. Eroh, M. A. Johnson, and O. R. Oellermann, “Resolvability in graphs and the metric dimension of a graph,” *Discrete Appl Math (1979)*, vol. 105, no. 1–3, 2000, doi: 10.1016/S0166-218(00)00198-0.

[4] C. Hernando, M. Mora, I. M. Pelayo, C. Seara, J. Cáceres, and M. L. Puertas, “On the metric dimension of some families of graphs,” *Electron Notes Discrete Math*, vol. 22, 2005, doi: 10.1016/j.endm.2005.06.023.

[5] B Shanmukha; B Sooryanarayana; KS Harinath, “Metric dimension of wheels,” *Far East J. Appl. Math*, vol. 8, no. 3, 2002, doi: 10.1016/0969-806(95)00416-u.

[6] M. Bača, E. T. Baskoro, A. N. M. Salman, S. W. Saputro, and D. Suprijanto, “The metric dimension of regular bipartite graphs,” *Bulletin Mathematique de la Societe des Sciences Mathematiques de Roumanie*, vol. 54, no. 1, 2011.

[7] M. Rafif Fajri, L. Hadiyan Fajri, J. Ashari, A. Arsyad, and C. Author, “Eksakta Article Metric Dimension for Snowflake Graph,” *Eksakta*, vol. 23, no. 04, pp. 284–299, 2022, doi: 10.24036//eksakta/vol21-iss1/xxx.

[8] L. Yulianti, N. Narwen, and S. Hariyani, “A note on the metric dimension of subdivided thorn graphs,” *Indonesian Journal of Combinatorics*, vol. 3, no. 1, p. 34, Jun. 2019, doi: 10.19184/ijc.2019.3.1.4.

[9] S. Wahyudi, Sumarno, and Suharmadi, “Dimensi Metrik Pengembangan Graf Kincir Pola K1+M3,” *J.Math. and Its Appl.*, vol. 8, no. 2, pp. 17–22, 2011.

[10] R. Putra, L. Yulianti, and Syafrizal Sy., “Dimensi Metrik Pada Graf Wn + Cn untuk n ∈ {3, 4},” *Jurnal Matematika UNAND*, vol. 7, no. 2, pp. 165–169, 2018.

[11] T. Utomo and R. N. Dewi, “Dimensi Metrik Graf Amal(nKm),” *J. Math. and Its Appl.*, vol. 15, no. 1, pp. 71–77, 2018.

[12] Rifqi R, Narwen, and Efendi, “DIMENSI METRIK GRAF KINCIR POLA K 1 + mK4,” *Jurnal Matematika UNAND*, vol. 7, no. 3, pp. 149–153, 2019.

[13] R. Simanjuntak, S. Uttunggadewa, and S. W. Saputro, “Metric dimension for amalgamations of graphs,” in *Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)*, 2015. doi: 10.1007/978-3-319-19315-1_29.