Limits: Journal of Mathematics and Its Applications
E-ISSN: 2579-8936
P-ISSN: 1829-605X
Vol. 21, No. 1, Maret 2024, 53-69
DOI: http://dx.doi.org/10.12962/limits.v21i1.16757

Generalisasi Submodul Prima Bertingkat dan Modul Multiplikasi Bertingkat

Komang Abri Perwira Jaya Artama [1 *], Sutopo [2]
[1,2]Program Studi Magister Matematika Universitas Gadjah Mada Yogyakarta
Kota Yogyakarta, Daerah Istimewa Yogyakarta, Indonesia
e-mail : [1*]k.abri.perwira@mail.ugm.ac.id

Diajukan: 13 Mei 2023, Diperbaiki: 15 Januari 2024, Diterima: 15 Maret 2024

Abstrak

Diberikan grup G dengan elemen satuan e, ring bertingkat R tipe G dengan elemen identitas 1_R, dan modul bertingkat M atas ring bertingkat R tipe G. Pada artikel ini, dibahas mengenai submodul prima lemah bertingkat yang akan digunakan untuk membangun konsep modul multiplikasi kuasi bertingkat. Modul M disebut modul multiplikasi kuasi bertingkat jika untuk setiap submodul prima lemah bertingkat N di M, dapat dinyatakan sebagai $N = IM$ untuk suatu ideal bertingkat I di R. Selain itu, dibahas juga mengenai submodul 2-*absorbing* bertingkat yang digunakan untuk membangun konsep modul multiplikasi *absorbing* bertingkat. Modul M disebut modul multiplikasi *absorbing* bertingkat jika untuk setiap submodul 2-*absorbing* bertingkat N di M, dapat dinyatakan $N = IM$ untuk suatu ideal bertingkat I di R. Penelitian ini sudah pernah dilakukan oleh Abu-Dawwas dkk. pada tahun 2022. Peneliti menambahkan beberapa sifat pada submodul prima lemah bertingkat untuk menyelidiki kelas modul multiplikasi kuasi bertingkat kedepannya.
Kata Kunci : submodul prima lemah bertingkat, submodul 2-*absorbing* bertingkat, modul multiplikasi kuasi bertingkat, modul multiplikasi *absorbing* bertingkat.

Abstract

Given group G with unity element e, graded ring R tipe G with identiy element 1_R, and graded module M over graded ring R type G. In this article, discussed about graded weakly prime submodules that will be used to build graded quasi multiplication modules concept. Module M is said to be graded quasi multiplication modules if for every graded weakly prime submodule N of M, $N = IM$ for some graded ideal I of R. In addition, also discussed about graded 2-absorbing submodules that will be used to build graded absorbing multiplication modules concept. Module M is said to be graded absorbing multiplication modules if for every graded 2-absorbing submodule N of M, $N = IM$ for some graded ideal I of R. This research has been conduced by Abu-Dawwas et.al in 2022. The researchers added several properties to the graded weakly prime submodules to investigate the graded quasi multiplication modules class in the future.
***Keyword**: graded weakly prime submodules, graded 2-absorbing submodules, graded quasi multiplication modules, graded absorbing multiplication modules.*

1 Pendahuluan

Ring yang digunakan pada keseluruhan tulisan ini adalah ring komutatif dengan elemen identitas 1_R (elemen identitas ring R) dan grup G dengan elemen satuan e. Ring bertingkat merupakan salah satu jenis ring bentuk khusus. Suatu ring R disebut ring bertingkat tipe G apabila terdapat keluarga subgrup terhadap operasi penjumlahan, katakan $\{ R_g \mid g \in G \}$ yang memenuhi $R = \bigoplus_{g\in G} R_g$ dan $R_g R_h \subseteq R_{gh}$ untuk setiap $g, h \in G$. Elemen-elemen $h(R) = \cup_{g\in G} R_g$ disebut elemen homogen ring bertingkat R dan elemen tak nol $r \in R_g$ disebut elemen homogen derajat g atau dapat ditulis $\deg(r) = g$. Tingkatan (*grading*) ring R adalah keluarga subgrup-subgrup R terhadap penjumlahan dengan indeks elemen grup G yaitu $\{R_g \mid g \in G\}$. Subring S disebut subring bertingkat apabila memuat semua elemen homogen penyusunnya atau $S = \bigoplus_{g\in G} S \cap R_g$. Setiap subring bertingkat pasti merupakan subring, tetapi sebaliknya belum tentu berlaku. Lebih lanjut, beberapa sifat ring bertingkat ini dibahas pada [1] dan [2]

Pada modul, dikenal juga istilah modul bertingkat. Misalkan R ring bertingkat tipe G, modul M atas ring R disebut modul bertingkat tipe G apabila terdapat keluarga subgrup terhadap operasi pejumlahan, katakan $\{ M_g \mid g \in G \}$ yang memenuhi $M = \bigoplus_{g\in G} M_g$ dan $R_g M_h \subseteq M_{gh}$. Elemen-elemen $h(M) = \cup_{g\in G} M_g$ disebut elemen homogen modul bertingkat M dan elemen tak nol $m \in R_g$ disebut elemen homogen derajat g atau dapat ditulis $\deg(r) = g$. Setiap $m \in M$ dapat direpresentasikan tungggal sebagai $m = \sum_{g\in G} x_g$ sebanyak berhingga $x_g \in M_g$. Elemen tak nol x_g pada penjumlahan tersebut disebut komponen homogen elemen m. Tingkatan (*grading*) modul M adalah keluarga subgrup-subgrup M terhadap penjumlahan dengan indeks elemen grup G yaitu $\{M_g \mid g \in G\}$. Submodul N disebut submodul bertingkat apabila semua komponen homogen elemen-elemen N atau dengan kata lain $N = \bigoplus_{g\in G} N \cap M_g$. Seperti pada ring bertingkat, setiap submodul belum tentu submodul bertingkat. Lebih lanjut, beberapa sifat pada modul bertingkat dibahas pada [1] dan [3]. Selanjutnya, suatu modul bertingkat disebut modul multiplikasi bertingkat apabila setiap submodul bertingkat N dapat dinyatakan sebagai $N = IM$ untuk suatu ideal bertingkat I di ring R. Sifat-sifat modul multiplikasi bertingkat lebih lanjut dibahas pada [4].

Beberapa sifat dapat diamati pada submodul bertingkat. Salah satunya adalah submodul prima bertingkat, suatu submodul sejati N disebut submodul prima bertingkat apabila untuk setiap $r \in h(R)$ dan $m \in h(R)$ dengan sifat $rm \in N$ berakibat $m \in N$ atau $r \in (N :_R M)$. Pada [5], Abu-Dawwas dan Refai membangun konsep modul multiplikasi lemah bertingkat menggunakan submodul prima bertingkat. Suatu R-modul M disebut modul multiplikasi lemah bertingkat apabila setiap submodul prima bertingkat N dapat dinyatakan sebagai $N = IM$ untuk suatu ideal prima bertingkat I di ring R. Modul multiplikasi lemah bertingkat ini merupakan generalisasi modul multiplikasi bertingkat. Berdasarkan hal tersebut, dapat diselidiki berbagai sifat yang ada pada modul multiplikasi lemah bertingkat.

Konsep submodul prima bertingkat ini dapat diperlemah dan diperumum. Apabila submodul prima bertingkat ini diperlemah maka akan menghasilkan konsep baru yaitu submodul prima lemah bertingkat yang sudah dibahas pada [6]. Sedangkan, apabila submodul prima bertingkat ini diperumum akan menghasilkan konsep submodul 2-*absorbing* bertingkat yang sudah dibahas pada [7], [8] dan [9]. Berdasarkan konsep-konsep baru yang muncul dari submodul prima bertingkat dengan memperlemah dan memperumum sifatnya, memunculkan ide untuk membangun konsep baru seperti pada saat membangun konsep modul multiplikasi lemah bertingkat. Hal ini yang dilakukan pada penelitian [9], namun masih ada beberapa sifat yang dapat diselidiki seperti pada Proposisi 8, Proposisi 10, dan Proposisi 12.

2 Metode Penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian studi literatur yang mengkaji generalisasi pada modul multiplikasi bertingkat. Metode penelitian ini terdiri dari tiga langkah yaitu: 1. Melakukan kajian terhadap submodul prima bertingkat. 2. Mempelajari modul multiplikasi bertingkat sebagai objek pengamatannya. 3. Menggeneralisasi modul multiplikasi bertingkat melalui konsep kajian submodul prima bertingkat.

3 Pembahasan dan Hasil

Penelitian ini menyajikan beberapa hasil, meliputi beberapa sifat terkait submodul prima lemah dan beberapa hasil yang sudah diperoleh pada literatur [9].

3.1. Submodul Prima Lemah Bertingkat

Pada bagian ini, membahas konsep submodul prima lemah bertingkat yang merupakan perlemahan sifat submodul prima bertingkat. Berikut definisinya berdasarkan [6].

Definisi 1. *Diberikan ring bertingkat R tipe G, modul bertingkat M atas R, dan submodul sejati N di M. Submodul N disebut submodul prima lemah bertingkat jika untuk setiap $r \in h(R)$ dan $m \in h(M)$ dengan sifat $0_M \neq rm \in N$ berakibat $m \in N$ atau $r \in (N :_R M)$.*

Cukup jelas bahwa setiap submodul prima bertingkat merupakan submodul prima lemah bertingkat. Tetapi, belum tentu berlaku sebaliknya. Berikut contoh yang membahas hal tersebut.

Contoh 2. Diberikan modul $\mathbb{Z}_{12}$ atas $\mathbb{Z}$. Mengunakan tingkatan trivial dapat dipandang $\mathbb{Z}$ sebagai ring bertingkat tipe $\mathbb{Z}$ dan modul bertingkat $\mathbb{Z}_{12}$ atas $\mathbb{Z}$. Cukup jelas bahwa $\{\bar{0}\}$ di $\mathbb{Z}_{12}$ merupakan submodul prima lemah bertingkat berdasarkan definisinya tetapi bukan submodul prima bertingkat. Hal ini dikarenakan terdapat $\bar{8} \in \mathbb{Z}_{12}$ dan $3 \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $3 \cdot \bar{8} = \bar{0}$ tetapi $\bar{8} \notin \{\bar{0}\}$ dan $3 \notin \left(\{\bar{0}\} :_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{12}\right) = 12\mathbb{Z}$.

Selanjutnya, diberikan ring bertingkat R tipe G dan modul bertingkat M atas R. Didefinisikan himpunan bagian $Z_G(M)$ sebagai berikut

$$Z_G(M) = \{m \in h(M) \mid rm = 0_M \text{ untuk setiap tak nol } r \in h(R)\}.$$

Berikut beberapa hasil yang diperoleh dari [1] terkait submodul prima lemah bertingkat.

Teorema 3. *Diberikan modul bertingkat M atas ring bertingkat R tipe G. Jika $Z_G(M) = \{0_M\}$, maka setiap submodul prima lemah bertingkat merupakan submodul prima bertingkat.*

Bukti. Diketahui $Z_G(M) = \{0_M\}$. Diambil sebarang submodul prima lemah bertingkat N, akan dibuktikan N submodul prima bertingkat. Ambil sebarang $s \in h(R)$ dan $m \in h(M)$ dengan sifat $sm \in N$. Jika $sm \neq 0_M$, maka diperoleh $m \in N$ atau $s \in (N:_R M)$ karena N submodul prima lemah bertingkat. Jika $sm = 0_M$, maka diperoleh bahwa $s = 0_R \in (N:_R M)$ atau $m = 0_M \in N$ karena $Z_G(M) = \{0_M\}$. Jadi, N submodul prima bertingkat. ■

Diberikan ring bertingkat R dan ideal maksimal bertingkat P. Ring R disebut ring kuasi lokal bertingkat jika hanya P ideal maksimal di R yang pada umumnya dinotasikan (R, P).

Teorema 4. *Diberikan ring kuasi lokal bertingkat (R, P) dan modul bertingkat M atas R. Jika $PM = \{0_M\}$, maka setiap submodul bertingkat sejati di M merupakan submodul prima lemah bertingkat.*

Bukti. Diketahui $PM = \{0_M\}$. Diambil sebarang submodul bertingkat sejati N di M, akan dibuktikan N submodul prima lemah bertingkat. Diambil sebarang $s \in h(R)$ dan $x \in h(M)$ sedemikian sehingga $0_M \neq sx \in N$. Andaikan s bukan unit di R, karena (R, P) ring kuasi lokal bertingkat berakibat $s \in P$. Dari sini, diperoleh bahwa $sx \in PM = \{0_M\}$ sehingga $sx = 0_M$ dan terjadi kontradiksi. Haruslah s unit di R sehingga $x \in N$. Jadi, terbukti bahwa N submodul prima lemah bertingkat di M. ■

Teorema 5. *Diberikan daerah integral kuasi lokal bertingkat (R, P) dan modul bertingkat M atas R. Jika $P^2 = \{0_M\}$, maka setiap submodul bertingkat sejati di M merupakan submodul prima lemah bertingkat.*

Bukti. Diketahui $P^2 = \{0_R\}$. Diambil sebarang submodul sejati N di M, akan dibuktikan N submodul prima lemah bertingkat. Diambil sebarang $s \in h(R)$ dan $x \in h(M)$ sedemikian sehingga $0_M \neq sx \in N$. Andaikan s bukan unit di R, karena (R, P) ring kuasi lokal bertingkat berakibat $s \in P$. Dari sini, diperoleh bahwa $s^2 \in P^2 = \{0_R\}$ sehingga $s^2 = 0_R$. Karena R daerah integral, berakibat $s = 0_R$. Diperoleh bahwa $sx = 0_M$ dan terjadi kontradiksi. Haruslah s unit di R sehingga $x \in N$. Jadi, N submodul prima lemah bertingkat. ■

Teorema 6. *Diberikan modul bertingkat M atas ring bertingkat R tipe G dengan $Z_G(M) = \{0_M\}$. Jika N submodul prima lemah bertingkat, maka $(N:_R M)$ ideal prima lemah bertingkat.*

Bukti. Diketahui N submodul prima bertingkat. Diambil sebarang $a \in (N:_R M)$, artinya $am \in N$. Karena $a \in R$, artinya $a = \sum_{g \in G} a_g$. Diambil sebarang $m \in M$, diperhatikan bahwa $am = a \sum_{g \in G} a_g \in N$. Karena N submodul bertingkat, diperoleh bahwa $a_g m \in N$ untuk setiap $g \in G$. Dari sini, diperoleh bahwa $a_g M \subseteq N$ untuk setiap $g \in G$ atau dengan kata lain $a_G \in (N:_R M)$ untuk setiap $g \in G$. Jadi, $(N:_R M)$ ideal bertingkat di R. Selanjutnya, akan dibuktikan $(N:_R M)$ ideal prima lemah bertingkat. Diambil sebarang $a, b \in h(R)$ dengan sifat $0_R \neq ab \in (N:_R M)$. Diperoleh bahwa $abM \subseteq N$. Karena N submodul prima lemah bertingkat, artinya $N \neq M$ sedemikian sehingga terdapat $m \in M \setminus N$ dan $g \in G$ sedemikian sehingga $m_g \notin N$. Perhatikan bahwa $abm_g \in abM \subseteq N$. Jika $abm_g = 0_M$, maka $m_g \in Z_G(M) = \{0_M\}$ sehingga $m_g = 0_M$ dan kontradiksi dengan $m_g \notin N$. Dari sini, diperoleh, $0_M \neq abm_g \in N$. Karena N submodul prima lemah bertingkat, $bm_g \in N$ atau $a \in (N:_R M)$. Jika $bm_g \in N$, maka $b \in (N:_R M)$ atau $m_g \in N$. Karena $m_g \notin N$, diperoleh bahwa $b \in (N:_R M)$. Jadi, $(N:_R M)$ ideal prima lemah bertingkat di ring R. ■

Pembahasan berikut terkait hasil yang diperoleh pada penelitian ini. Sebelumnya, akan dibahas terkait homomorfisma bertingkat terlebih dahulu. Homomorfisma modul merupakan suatu pemetaan yang mengawetkan operasi kedua modul tersebut. Lebih lanjut, homomorfisma modul bertingkat mengawetkan operasi kedua modul serta tingkatannya yang dikenalkan oleh Nastasecu dan Oystaeyen (1982) pada [1].

Definisi 7. *Diberikan modul bertingkat M dan M' atas ring R bertipe G dan pemetaan $f: M \to M'$. Pemetaan f disebut homomorfisma modul bertingkat derajat k apabila f homomorfisma R-modul dan $f(M_g) \subseteq M'_{g \star k}$ untuk setiap $g \in G$. Lebih lanjut, apabila homomorfisma modul bertingkat tanpa derajat maka homomorfisma modul bertingkat f berderajat e dengan e elemen netral grup G.*

Hasil yang diperoleh dalam penelitian ini adalah sifat submodul prima lemah masih dipertahankan pada prapetanya oleh homomorfisma bertingkat.

Proposisi 8. *Diberikan modul bertingkat M dan M' atas ring R bertipe G dan homomorfisma bertingkat $f: M \to M'$. Jika K' submodul prima lemah bertingkat di M' dan f injektif, maka $f^{-1}(K')$ submodul prima lemah bertingkat di M.*

Bukti. Cukup jelas bahwa $f^{-1}(K')$ submodul bertingkat di M. Diambil sebarang $r \in h(R)$ dan $m \in h(M)$ dengan sifat $0_M \neq rm \in f^{-1}(K')$. Dari sini, diperoleh bahwa $f(rm) \in K'$. Karena f injektif dan $rm \neq 0_M$, diperoleh bahwa $f(rm) \neq 0_{M'}$. Perhatikan bahwa K' submodul prima lemah bertingkat di M' dan berlaku $0_{M'} \neq f(rm) = rf(m) \in K'$, sehingga diperoleh $f(m) \in K'$

atau $r \in (K' :_R M') \subseteq (f^{-1}(K') :_R M)$. Akibatnya, $m \in f^{-1}(K')$ atau $r \in (f^{-1}(K') :_R M)$. Jadi, terbukti bahwa $f^{-1}(K')$ merupakan submodul prima lemah bertingkat di M.■

Contoh 9. Diberikan grup $G = \mathbb{Z}_2$, ring $R = \mathbb{Z}$, dan modul $M = \mathbb{Q}[i], M' = \mathbb{R}[i]$. Dapat dipandang R-modul M dan R-modul M' merupakan modul bertingkat tipe G dengan tingkatan berikut

$$R_0 = \mathbb{Z} \text{ dan } R_1 = \{0\}$$
$$M_0 = \mathbb{Q} \text{ dan } M_1 = i\mathbb{Q}$$
$$M'_0 = \mathbb{R} \text{ dan } M'_1 = i\mathbb{R}.$$

Dibentuk pemetaan $f: M \to M'$ dengan sifat untuk setiap $x \in \mathbb{Q}[i]$, berlaku $f(x) = x$. Cukup jelas bahwa f homomorfisma modul bertingkat yang bersifat injektif. Diperhatikan bahwa $K = \{0\}$ submodul prima lemah di M', berdasarkan Proposisi 8, diperoleh bahwa $f^{-1}(K') = \{0\}$ submodul prima lemah bertingkat di M.

Proposisi berikutnya membahas syarat cukup agar hasil peta submodul prima lemah bertingkat oleh homomorfisma modul bertingkat merupakan submodul prima lemah bertingkat.

Proposisi 10. *Diberikan modul bertingkat M dan M' atas ring R bertipe G dan homomorfisma bertingkat $f: M \to M'$. Jika f surjektif dan K submodul prima lemah bertingkat sedemikian sehingga $ker(f) \subseteq K$ maka $f(K)$ submodul prima lemah bertingkat.*

Bukti. Cukup jelas bahwa $f(K)$ merupakan submodul bertingkat di M'. Ambil sebarang $r \in h(R)$ dan $m' \in h(M')$ dengan sifat $0_{M'} \neq rm' \in f(K)$. Karena f surjektif, terdapat $m \in M$ sedemikian sehingga $f(m) = m'$. Dari sini, diperoleh bahwa $rf(m) = f(k)$ untuk suatu $k \in K$. Perhatikan bahwa

$$rf(m) = f(k) \Rightarrow f(rm) = f(k) \Rightarrow f(rm - k) = 0_{M'}.$$

Akibatnya, $rm - k \in \ker(f)$ sehingga $rm = k + l$ untuk suatu $l \in \ker(f)$. Karena $\ker(f) \subseteq K$ dan $k \in K$, diperoleh $rm \in K$. Misalkan $rm = 0_M$, akan berakibat $0_{M'} = f(rm) = rf(m) = rm'$ dan terjadi kontradiksi. Dari sini, diperoleh $0_M \neq rm \in K$. Karena K submodul prima lemah bertingkat, diperoleh $m \in K$ atau $r \in (K :_R M) \subseteq (f(K) :_R M')$. Akibatnya, $f(m) = m' \in f(K)$ atau $r \in (f(K) :_R M')$. Jadi, terbukti bahwa $f(K)$ submodul prima lemah bertingkat di M'.■

Contoh 11. Diberikan grup $G = \mathbb{Z}_2$, ring $R = \mathbb{Z}$, dan modul $M = \mathbb{Z}, M' = \mathbb{Z}_6$. Dapat dipandang R-modul M dan R-modul M' merupakan modul bertingkat tipe G dengan tingkatan berikut

$$R_0 = \mathbb{Z} \text{ dan } R_1 = \{0\}$$
$$M_0 = \mathbb{Z} \text{ dan } M_1 = \{0\}$$
$$M'_0 = \mathbb{Z}_6 \text{ dan } M'_1 = \{\bar{0}\}.$$

Dibentuk pemetaan $f: M \to M'$ dengan sifat untuk setiap $n \in \mathbb{Z}$, berlaku $f(n) = \bar{n}$. Cukup jelas bahwa f homomorfisma modul bersifat surjektif. Perhatikan bahwa

$$\ker(f) = \{n \in \mathbb{Z} \mid f(n) = \bar{0}\} = 6\mathbb{Z}.$$

Selanjutnya, $K = 3\mathbb{Z}$ merupakan submodul prima lemah bertingkat. Berdasarkan Proposisi 10, karena $\ker(f) = 6\mathbb{Z} \subseteq K = 3\mathbb{Z}$ diperoleh bahwa $f(3\mathbb{Z}) = \{\bar{0}, \bar{3}\}$ merupakan submodul prima lemah di $M' = \mathbb{Z}_6$.

Selanjutnya, hasil yang diperoleh ini dapat digunakan untuk menyelidiki sifat-sifat yang ada pada modul multiplikasi kuasi bertingkat kedepannya. Proposisi berikut membahas syarat cukup agar setiap submodul sejati bertingkat merupakan submodul prima lemah bertingkat.

Proposisi 12. *Diberikan modul bertingkat M atas ring R bertipe G. Jika J ideal maksimal bertingkat dengan $J \subseteq (0_M :_R M)$ maka setiap submodul sejati di modul bertingkat M atas R/J merupakan submodul prima lemah bertingkat.*

Bukti. Perhatikan bahwa M modul atas R dan J ideal maksimal di R dengan sifat $J \subseteq (0_M :_R M)$, dapat didefinisikan pergandaan skalar " $\circ$ " sebagai berikut

$$\circ : R/J \times M \to M$$
$$(r + J) \circ m \to rm.$$

Cukup jelas bahwa pergandaan skalar " $\circ$ " di atas bersifat tertutup. Perhatikan bahwa untuk sebarang $r_1 + J, r_2 + J \in R/J$ dan $m_1, m_2 \in M$ dengan sifat $r_1 + J = r_2 + J$ dan $m_1 = m_2$ berlaku

$$(r_1 + J) \circ m_1 = r_1 m_1 \text{ dan } (r_2 + J) \circ m_2 = r_2 m_2.$$

Dari sini, diperoleh bahwa $r_1 m_1 = r_2 m_1$ karena $m_1 = m_2$ sehingga $r_1 m_1 - r_2 m_1 = (r_1 - r_2) m_1$. Dapat diperhatikan bahwa $(r_1 - r_2) m_1 \in JM = \{0_M\}$. Akibatnya, $(r_1 + J) \circ m_1 = r_1 m_1 = r_2 m_2 = (r_2 + J) \circ m_2$. Jadi, operasi pergandaan skalar " $\circ$ " *well-defined* sehingga dapat dipandang modul M atas R/J. Selain itu, menggunakan tingkatan trivial dapat dipandang M modul bertingkat atas R/J tipe G. Selanjutnya, akan dibuktikan setiap submodul sejati bertingkat di M atas R/J merupakan submodul prima lemah bertingkat. Diambil sebarang N submodul sejati bertingkat di M atas R/J, akan dibuktikan bahwa N submodul prima lemah bertingkat. Diambil sebarang $r + J \in h(R/J)$ dan $m \in h(M)$ dengan sifat $0_M \neq (r + J) \circ m \in N$. Karena J ideal maksimal di R, diperoleh bahwa R/J merupakan lapangan sehingga $r + J$ unit di R/J. Akibatnya, $m \in N$. Jadi, N submodul prima lemah bertingkat.■

Contoh 13. Diberikan grup $G = \mathbb{Z}_2$, ring $R = \mathbb{Z}$, dan modul $M = \mathbb{Z}_5$ sehingga R-modul M merupakan modul bertingkat tipe G. Perhatikan bahwa $J = 5\mathbb{Z}$ merupakan ideal maksimal di $\mathbb{Z}$ dan memenuhi $J = 5\mathbb{Z} \subseteq 5\mathbb{Z} = (0 :_R M)$. Dari sini, diperoleh bahwa R/J=$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$=$\mathbb{Z}_5$. Berdasarkan Proposisi 12, diperoleh bahwa setiap submodul sejati bertingkat di $\mathbb{Z}_5$ atas $\mathbb{Z}_5$ merupakan submodul prima lemah bertingkat.

3.2. Modul Multiplikasi Kuasi Bertingkat

Pada bagian ini, akan dibahas mengenai konsep modul multiplikasi kuasi bertingkat yang merupakan perlemahan modul multiplikasi lemah bertingkat. Konsep modul multiplikasi kuasi bertingkat ini sendiri dibangun menggunakan konsep submodul prima lemah bertingkat. Berikut definisi modul multiplikasi kuasi bertingkat secara formal menurut [9].

Definisi 14. *Diberikan modul bertingkat M atas ring bertingkat R tipe G. Modul M disebut modul multiplikasi kuasi bertingkat jika untuk setiap submodul prima lemah N di M, dapat dinyatakan sebagai $N = IM$ untuk suatu ideal bertingkat I di R.*

Berikut beberapa hasil yang diperoleh pada penelitian [9].

Teorema 15. *Diberikan modul bertingkat M atas ring bertingkat R tipe G. Modul M merupakan modul multiplikasi kuasi bertingkat jika dan hanya jika untuk setiap submodul prima lemah N di M, dapat dinyatakan sebagai $N = (N:_R M)M$.*

Bukti. ($\Rightarrow$) Diketahui M modul multiplikasi kuasi bertingkat. Diambil sebarang submodul prima lemah bertingkat N di M. Karena M modul multiplikasi kuasi bertingkat, diperoleh $N = IM$ untuk suatu ideal bertingkat I di R. Dari sini, diperoleh

$$N \subseteq IM \subseteq (N:_R M)M \subseteq N$$

Sehingga $N = (N:_R M)M$.

($\Leftarrow$) Cukup jelas karena $(N:_R M)$ merupakan ideal bertingkat di R. ■

Teorema 16. *Setiap modul multiplikasi kuasi bertingkat merupakan modul multiplikasi lemah.*

Bukti. Misalkan M modul multiplikasi kuasi bertingkat. Diambil sebarang submodul prima bertingkat N. Cukup jelas bahwa N merupakan submodul prima lemah bertingkat, sehingga $N = (N:_R M)M$. Karena N submodul prima bertingkat, $(N:_R M)$ ideal prima bertingkat. Jadi, M merupakan modul multiplikasi lemah bertingkat. ■

Teorema 17. *Diberikan modul multiplikasi lemah bertingkat M. Jika $Z_G(M) = \{0_M\}$, maka M merupakan modul multiplikasi kuasi bertingkat.*

Bukti. Diambil sebarang submodul prima lemah bertingkat N di M. Perhatikan bahwa $Z_G(M) = \{0_M\}$, sehingga N submodul prima berdasarkan Teorema 3. Karena M modul multiplikasi lemah bertingkat, artinya $N = IM$ untuk suatu ideal prima bertingkat I di R. Jadi, M modul multiplikasi kuasi bertingkat. ■

3.3. Submodul 2-*absorbing* Bertingkat

Pada bagian ini, akan dibahas mengenai konsep submodul 2-*absorbing* bertingkat yang merupakan perumunan submodul prima bertingkat. Berikut definisi submodul 2-*absorbing* bertingkat secara formal menurut [7], [8] dan [9].

Definisi 18. *Diberikan modul bertingkat M atas ring bertingkat R tipe G. Submodul sejati N disebut submodul 2-absorbing bertingkat jika $a, b \in h(R)$ dan $m \in h(M)$ dengan $abm \in N$ berakibat $am \in N$ atau $bm \in N$ atau $ab \in (N :_R M)$.*

Definisi 19. *Diberikan modul bertingkat M atas ring bertingkat R tipe G. Modul bertingkat M disebut modul 2-absorbing bertingkat jika submodul $\{0_M\}$ merupakan submodul 2-absorbing bertingkat.*

Berdasarkan definisi di atas, cukup jelas bahwa setiap submodul prima bertingkat merupakan submodul 2-*absorbing* bertingkat. Tetapi, konversnya belum tentu berlaku. Berikut diberikan contohnya.

Contoh 20. Diberikan modul bertingkat $\mathbb{Z}_6$ atas ring bertingkat $\mathbb{Z}_6$ bertipe $\mathbb{Z}$ menggunakan tingkatan trivial. Submodul $\{\bar{0}\}$ merupakan submodul 2-*absorbing* bertingkat berdasarkan tabel berikut ini.

Tabel 1. Tabel Pembuktian

$\mathbb{Z}_6$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\mathbb{Z}_6$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{1}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{3}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{5}$

Tetapi, submodul $\{\bar{0}\}$ bukan merupakan submodul prima bertingkat. Hal ini dikarenakan, terdapat $\bar{2} \in h(\mathbb{Z}_6)$ dan $\bar{3} \in h(\mathbb{Z}_6)$ dengan sifat $\bar{2} \cdot \bar{3} = \bar{0}$ tetapi $\bar{3} \neq \bar{0}$ dan $\bar{2} \notin (\{\bar{0}\} :_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_6)$.

Berikut beberapa hasil yang diperoleh pada penelitian [9] terkait submodul 2-*absorbing* bertingkat.

Proposisi 21. *Diberikan modul bertingkat M atas ring bertingkat R tipe G, J ideal bertingkat di R, dan N submodul 2-absorbing bertingkat di M. Jika $r \in h(R)$ dan $m \in h(M)$ sedemikian sehingga $Jrm \subseteq N$, maka berlaku $rm \in N$ atau $Jr \subseteq (N :_R M)$ atau $J_g m \subseteq N$ untuk suatu $g \in G$.*

Bukti. Diambil sebarang $r \in h(R)$ dan $m \in h(M)$ dengan sifat $Jrm \subseteq N$. Misalkan $rm \notin N$ dan $Jr \nsubseteq (N :_R M)$, artinya terdapat $s \in J$ sedemikian sehingga $sr \notin (N :_R M)$. Karena J ideal bertingkat, artinya terdapat $g \in G$ dan $s_g \in J \cap R_g$ sedemikian sehingga $s_g r \notin (N :_R M)$. Dari sini, diperoleh bahwa $s_g \in h(R)$ sedemikian sehingga $s_g rm \in N$ yang berakibat $s_g m \in N$ karena N submodul 2-*absorbing* bertingkat. Akan dibuktikan $J_g m \subseteq N$ untuk suatu $g \in G$. Diambil sebarang $x_g \in J_g$, cukup jelas bahwa $s_g + x_g \in J \cap R_g$ dan $s_g + x_g \in h(R)$. Perhatikan bahwa $(s_g + x_g)rm \in N$, karena N submodul 2-*absorbing* bertingkat diperoleh bahwa $(s_g + x_g)m \in N$ atau $(s_g + x_g)r \in (N:_R M)$. Jika $(s_g + x_g)m \in N$ dan $s_g m \in N$, maka $x_g m \in N$. Selanjutnya, jika $(s_g + x_g)r \in (N:_R M)$ dan $s_g r \notin (N:_R M)$ maka $x_g r \notin (N:_R M)$ tetapi $x_g rm \in N$ yang berakibat $x_g m \in M$. Jadi, diperoleh bahwa $J_g m \subseteq N$ untuk suatu $g \in G$. ■

Lema 22. *Diberikan modul bertingkat M atas ring bertingkat R tipe G, submodul bertingkat L di M, dan submodul N di M dengan sifat $L \subseteq N$. Submodul N merupakan submodul bertingkat di M jika dan hanya jika N/L submodul bertingkat di M/L.*

Bukti. (⇒) Diketahui N submodul bertingkat di M. Cukup jelas bahwa N/L submodul di M/L. Diambil sebarang $x + L \in N/L$. Karena $x \in N$, artinya $x = \sum_{g \in G} x_g$ dengan $x_g \in N$ untuk setiap $g \in G$ dan $(x + L)_g \in N/L$ untuk setiap $g \in G$. Jadi, terbukti bahwa N/L submodul bertingkat di M/L.

(⇐) Diketahui bahwa N/L submodul bertingkat di M/L. Ambil sebarang $x \in N$. Karena M modul bertingkat, diperoleh bahwa $x = \sum_{g \in G} x_g$ dengan $x_g \in M_g$ untuk setiap $g \in G$. Dari sini, diperoleh

$$\sum_{g \in G} (x + L)_g = \sum_{g \in G} (x_g + L) = \sum_{g \in G} x_g + L = x + L \in N/L.$$

Karena N/L submodul bertingkat, diperoleh $x_g + L \in N/L$ untuk setiap $g \in G$ yang berakibat $x_g \in N$ untuk setiap $g \in G$. Jadi, terbukti N submodul bertingkat di M. ■

Teorema 23. *Diberikan modul bertingkat M atas ring bertingkat R tipe G, submodul bertingkat L di M, dan submodul N di M dengan sifat $L \subseteq N$. Submodul N merupakan submodul 2-absorbing bertingkat di M jika dan hanya jika N/L submodul 2-absorbing bertingkat di M/L.*

Bukti. (⇒) Diketahui N submodul 2-*absorbing* bertingkat di M. Berdasarkan Lema 22, diketahui N/L submodul bertingkat di M/L. Diambil sebarang $x, y \in h(R)$ dan $m + L \in h(M/L)$ dengan sifat $xy(m + L) \in N/L$. Dari sini, diperoleh bahwa $xym \in N$. Karena N submodul 2-*absorbing* bertingkat, maka $xm \in N$ atau $ym \in N$ atau $xy \in (N:_R M)$. Akibatnya, $x(m + L) \in N/L$ atau $y(m + L) \in N/L$ atau $xy \in (N/L:_R M/L)$. Jadi, terbukti bahwa N/L submodul 2-*absorbing* bertingkat di M/L.

(⇐) Diketahui bahwa N/L submodul 2-*absorbing* bertingkat di M/L. Berdasarkan Lema 22, diketahui N submodul bertingkat di M. Ambil sebarang $x, y \in h(R)$ dan $m \in h(M)$ sedemikian sehingga $xym \in N$. Dari sini, dapat diperoleh $m + L \in h(M/L)$ sehingga $xy(m + L) \in N/L$. Karena N/L submodul 2-*absorbing* bertingkat, diperoleh $x(m + L) \in N/L$ atau $y(m + L) \in N/L$

atau $xy \in (N/L:_R M/L)$. Akibatnya, $xm \in N$ atau $ym \in N$ atau $xy \in (N:_R M)$. Jadi, terbukti N submodul 2-*absorbing* bertingkat di M. ■

Akibat 24. *Diberikan modul bertingkat M atas ring bertingkat R tipe G dan submodul bertingkat L di M. Submodul L merupakan submodul 2-absorbing bertingkat di M jika dan hanya jika M/L modul 2-absorbing bertingkat atas R.*

Proposisi 25. *Diberikan modul bertingkat M dan M' atas ring bertingkat R tipe G dan homomorfisma bertingkat $f: M \to M'$. Jika K' submodul 2-absorbing bertingkat di M' maka $f^{-1}(K)$ submodul 2-absorbing bertingkat di M.*

Bukti. Cukup jelas bahwa $f^{-1}(K')$ submodul bertingkat di M. Akan dibuktikan $f^{-1}(K')$ submodul 2-*absorbing* bertingkat di M. Diambil sebarang $a, b \in h(R)$ dan $m \in h(M)$ dengan sifat $abm \in f^{-1}(K')$. Diperoleh $f(abm) = abf(m) \in K'$. Karena K' submodul 2-*absorbing* bertingkat, diperoleh $af(m) \in K'$ atau $bf(m) \in K'$ atau $ab \in (K':_R M')$. Perhatikan bahwa, $f(M) \subseteq M'$ sehingga $(K':_R M') \subseteq (f^{-1}(K'):_{\mathrm{R}} M)$. Dari sini, diperoleh bahwa $am \in f^{-1}(K')$ atau $bm \in f^{-1}(K')$ atau $ab \in (f^{-1}(K'):_{\mathrm{R}} M)$. Jadi, $f^{-1}(K')$ submodul 2-*absorbing* bertingkat. ■

Akibat 26. *Diberikan modul bertingkat M dan M' atas ring bertingkat R tipe G dan homomorfisma bertingkat $f: M \to M'$. Jika M' modul 2-absorbing bertingkat maka $ker(f)$ submodul 2-absorbing bertingkat di M.*

Akibat 27. *Diberikan modul bertingkat M atas ring bertingkat R tipe G. Jika L submodul bertingkat di M, maka setiap submodul 2-absorbing bertingkat K di M dengan sifat $L \nsubseteq K$ berlaku $K \cap L$ submodul 2-absorbing bertingkat di L.*

Proposisi 28. *Diberikan modul bertingkat M dan M' atas ring bertingkat R tipe G dan homomorfisma bertingkat $f: M \to M'$. Jika f surjektif dan K submodul 2-absorbing bertingkat di M dengan $ker(f) \subseteq K$, maka $f(K)$ submodul 2-absorbing bertingkat di M'.*

Akibat 29. *Diberikan modul bertingkat M dan M' atas ring bertingkat R tipe G dan homomorfisma bertingkat $f: M \to M'$. Jika f surjektif dan M modul 2-absorbing bertingkat maka M' modul 2-absorbing bertingkat.*

3.4. Modul Multiplikasi *Absorbing* Bertingkat

Pada bagian ini, akan dibahas mengenai konsep modul multiplikasi *absorbing* bertingkat. Konsep tersebut dibangun dari konsep submodul 2-*absorbing* bertingkat dan mengakibatkan multiplikasi *absorbing* bertingkat merupakan generalisasi dari modul multiplikasi bertingkat. Mengingat sebarang modul belum tentu memiliki submodul 2-*absorbing* bertingkat, perlu ditambahkan syarat lagi dalam membangun konsep tersebut. Berikut definisi modul multiplikasi *absorbing* bertingkat secara formal menurut [9].

Definisi 30. *Diberikan modul bertingkat M atas ring bertingkat R tipe G. Himpunan semua submodul 2-absorbing bertingkat di M dinotasikan dengan $GABSpec(M)$.*

Definisi 31. *Diberikan modul bertingkat M atas ring R bertipe G. Modul M disebut modul multiplikasi absorbing bertingkat jika $GABSpec(M) = \emptyset$ atau setiap submodul 2-absorbing bertingkat N di M dapat dinyatakan sebagai $N = IM$ untuk suatu ideal bertingkat I di R.*

Berikut beberapa hasil yang diperoleh pada penelitian [9] ini.

Proposisi 32. *Diberikan modul bertingkat M atas ring bertingkat R tipe G dan J ideal di R dengan $J \subseteq (\{0_M\}:_R M)$. Modul M merupakan modul multiplikasi absorbing bertingkat atas R jika dan hanya jika M modul multiplikasi bertingkat atas R/J.*

Teorema 33. *Diberikan M modul multiplikasi absorbing bertingkat atas R. Jika J ideal di R dan L submodul bertingkat tak nol di M sedemikian sehingga $J \subseteq (L:_R M)$, maka M/L modul multiplikasi absorbing bertingkat atas R/J.*

Bukti. Diambil sebarang N/L submodul 2-*absorbing* bertingkat di M/L. Dari sini, diperoleh bahwa N submodul 2-*absorbing* bertingkat di M. Karena M modul multiplikasi *absorbing* bertingkat atas R, diperoleh $N = (N:_R M)M$. Perhatikan bahwa $J \subseteq (L:_R M) \subseteq (N:_R M)$. Cukup jelas bahwa $N/J = (I/J)(M/L)$, karena $N = (N:_R M)M$. Jadi, terbukti M/L modul multiplikasi *absorbing* bertingkat atas R/J. ■

Akibat 34. *Diberikan M modul multiplikasi absorbing bertingkat atas ring bertingkat R tipe G. Jika M modul absorbing bertingkat atas R, maka M/L modul absorbing bertingkat atas R untuk setiap submodul bertingkat L.*

Proposisi 35. *Diberikan modul bertingkat M dan M' atas ring bertingkat R tipe G dan homomorfisma bertingkat $f: M \to M'$ yang bersifat surjektif. Jika M modul multiplikasi absorbing bertingkat, maka M' merupakan modul multiplikasi absorbing bertingkat.*

Bukti. Misalkan GABSpec(M')$\neq \emptyset$. Diambil sebarang N' submodul 2-*absorbing* bertingkat di M'. Perhatikan bahwa $f^{-1}(N')$ submodul 2-*absorbing* bertingkat di M. Dari sini, diperoleh $f^{-1}(N') = IM$ untuk ideal bertingkat I di R. Akibatnya, $N' = f\left(f^{-1}(N')\right) = f(IM) = IM'$ karena f surjektif. Jadi, modul M merupakan modul multiplikasi *absorbing* bertingkat. ■

Pembahasan berikutnya terkait sifat *absorbing* pada modul hasil bagi bertingkat. Mengingat kembali proses pembentukan modul hasil bagi. Misalkan diberikan modul M atas ring R dan himpunan *multiplicatively closed* $S \subseteq R$, dapat dibentuk ring hasil bagi dan modul hasil bagi berikut

$$S^{-1}R = \{\frac{r}{s} \mid r \in R, s \in S\}$$

$$S^{-1}M = \{\frac{m}{s} \mid m \in M, s \in S\}.$$

Sifat penting dalam pembentukan modul hasil bagi ini adalah sifat komutatif pada ring R. Pada penelitian [9], dikonstruksi modul hasil bagi pada modul bertingkat dan ditambahkan tingkatan sehingga memunculkan konsep modul hasil bagi bertingkat.

Misalkan diberikan modul bertingkat M atas ring bertingkat R bertipe G dan himpunan *multiplicatively closed* $S \subseteq h(R)$. Dapat dibentuk modul bertingkat $S^{-1}M$ atas ring $S^{-1}R$ bertipe G dengan tingkatan berikut ini.

$$(S^{-1}R)_g = \{ \frac{r}{s} \mid r \in R_h, s \in S \cap R_{hg^{-1}} \}$$

$$(S^{-1}M)_g = \{ \frac{m}{s} \mid m \in M_h, s \in S \cap R_{hg^{-1}} \}.$$

Tetapi, pada saat peneliti membuktikan bahwa $(S^{-1}R)_g$ subgrup terhadap penjumlahan tidak berlaku secara umum. Berikut penjelasan hal tersebut. Diambil sebarang $\frac{r}{s}, \frac{u}{t} \in (S^{-1}R)_g$, berdasarkan penjumlahan pada ring hasil bagi diperoleh

$$\frac{r}{s} + \frac{u}{t} = \frac{rt + us}{st}.$$

Diketahui bahwa, $r \in R_\alpha, s \in S \cap R_{\alpha g^{-1}}, u \in R_{\beta,}$ dan $t \in S \cap R_{\beta g^{-1}}$. Dari sini, diperoleh

$rt \in R_\alpha R_{\beta g^{-1}} \subseteq R_{\alpha\beta g^{-1}}$ dan $rt = tr \in R_{\beta g^{-1}} R_\alpha \subseteq R_{\beta g^{-1}\alpha}$

$us \in R_\beta R_{\alpha g^{-1}} \subseteq R_{\beta\alpha g^{-1}}$ dan $us = su \in R_{\alpha g^{-1}} R_\beta \subseteq R_{\alpha g^{-1}\beta}$

$st \in S \cap R_{\alpha g^{-1}}\, R_{\beta g^{-1}} \subseteq S \cap R_{\alpha g^{-1}\beta g^{-1}}$ dan $st = ts \in S \cap R_{\beta g^{-1}} R_{\alpha g^{-1}} \subseteq S \cap R_{\beta g^{-1}\alpha g^{-1}}$.

Untuk membuktikan $\frac{r}{s} + \frac{u}{t} = \frac{rt+us}{st} \in (S^{-1}R)_g$, diperlukan grup G bersifat komutatif. Berdasarkan hal tersebut, peneliti mengadopsi tingkatan pada modul hasil bagi menggunakan [1]. Akan dijelaskan lebih lanjut oleh proposisi berikut.

Proposisi 36. *Diberikan modul bertingkat M atas ring R bertipe G. Jika $S \subseteq h(R)$ himpunan multiplicatively closed maka $S^{-1}M$ modul bertingkat atas $S^{-1}R$ tipe G dengan tingkatan*

$$(S^{-1}R)_g = \{ \frac{r}{s} \mid r \in h(R), s \in h(S), dan\ g = (deg(s))^{-1}\, deg(r) \}$$

$$(S^{-1}M)_g = \{ \frac{m}{s} \mid \mid m \in h(M), s \in h(S), dan\ g = (deg(s))^{-1}\, deg(m) \}.$$

Bukti. Cukup jelas bahwa jika $S \subseteq h(R)$ himpunan *multiplicatively closed* maka $S^{-1}M$ modul atas $S^{-1}R$. Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa $S^{-1}R$ ring bertingkat tipe G. Diambil sebarang $\frac{r}{s}, \frac{u}{t} \in (S^{-1}R)_g$, artinya $g = (\deg(s))^{-1} \deg(r) = (\deg(t))^{-1} \deg(u)$. Perhatikan bahwa

$$\frac{r}{s} + \frac{u}{t} = \frac{rt + us}{st}.$$

Dari sini, diperoleh

$$\begin{aligned}
\deg(rt) = \deg(tr) &= \deg(t)\deg(r) \\
&= \deg(t)\deg(s)\,(\deg(t))^{-1}\deg(u) \\
&= \deg(ts)\,(\deg(t))^{-1}\deg(u) \\
&= \deg(st)\,(\deg(t))^{-1}\deg(u) \\
&= \deg(s)\deg(t)\,(\deg(t))^{-1}\deg(u) \\
&= \deg(s)\deg(u) \\
&= \deg(su) \\
&= \deg(us).
\end{aligned}$$

Cukup jelas bahwa $rt + us \in h(R)$, $st \in h(S)$, dan berlaku

$$\begin{aligned}
(\deg(st))^{-1}\deg(rt+us) &= (\deg(st))^{-1}\deg(rt) \\
&= (\deg(ts))^{-1}\deg(tr) \\
&= (\deg(t)\deg(s))^{-1}\deg(t)\deg(r) \\
&= (\deg(s))^{-1}(\deg(t))^{-1}\deg(t)\deg(r) \\
&= (\deg(s))^{-1}\deg(r) \\
&= g.
\end{aligned}$$

Berdasarkan hal tersebut, diperoleh bahwa $\frac{r}{s} + \frac{u}{t} \in (S^{-1}R)_g$. Terbukti bahwa $\{(S^{-1}R)_g \mid g \in G\}$ keluarga subgrup terhadap operasi penjumlahan. Selanjutnya, diambil sebarang $\frac{r}{s} \in (S^{-1}R)_g$ dan $\frac{p}{q} \in (S^{-1}R)_h$. Artinya, $g = (\deg(s))^{-1}\deg(r)$ dan $h = (\deg(q))^{-1}\deg(p)$. Perhatikan bahwa

$$\frac{r}{s} \cdot \frac{p}{q} = \frac{rp}{sq}.$$

Cukup jelas bahwa $rp \in h(R), s \in h(S)$, dan berlaku

$$\begin{aligned}
(\deg(sq))^{-1}\deg(rp) &= (\deg(qs))^{-1}\deg(pr) \\
&= (\deg(q)\deg(s))^{-1}\deg(p)\deg(r) \\
&= (\deg(s))^{-1}(\deg(q))^{-1}\deg(p)\deg(r) \\
&= (\deg(s))^{-1}h\deg(r) \\
&= (\deg(s))^{-1}\deg(x)\deg(r) \text{ untuk suatu } x \in R_h \\
&= (\deg(s))^{-1}\deg(xr) \\
&= (\deg(s))^{-1}\deg(rx) \\
&= (\deg(q))^{-1}\deg(r)\deg(x) \\
&= gh.
\end{aligned}$$

Hal ini berakibat, $(S^{-1}R)_g(S^{-1}R)_h \subseteq (S^{-1}R)_{gh}$ untuk setiap $g, h \in G$. Cukup jelas bahwa $\bigoplus_{g\in G}(S^{-1}R)_g \subseteq S^{-1}R$. Diambil sebarang $\frac{r}{s} \in S^{-1}R$, artinya $r \in h(R)$ dan $s \in h(S) = S \in R_g$. Karena R ring bertingkat, diperoleh bahwa

$$\frac{r}{s} = \frac{\sum_{g\in G} r_g}{s} = \sum_{g\in G} \frac{r_g}{s}.$$

Perhatikan bahwa $(\deg(s))^{-1}\deg(r_g) \in G$, sehingga $S^{-1}R \subseteq \sum_{g\in G}(S^{-1}R)_g$. Karena untuk setiap $g, h \in G$ berlaku $(S^{-1}R)_g \cap (S^{-1}R)_h = \{0_R\}$, dapat diperoleh bahwa $S^{-1}R \subseteq \bigoplus_{g\in G}(S^{-1}R)_g$. Jadi, ring $S^{-1}R$ merupakan ring bertingkat tipe G. Selanjutnya, karena ring R komutatif dengan elemen identitas maka modul kiri M atas R dapat dipandang sebagai modul kanan M atas R. Secara analog dengan langkah di atas, dapat dibuktikan bahwa $S^{-1}M$ modul bertingkat atas $S^{-1}R$ tipe G.■

Contoh 37. Diberikan modul bertingkat $M = \mathbb{Z}$ atas $R = \mathbb{Z}$ bertipe $G = \mathbb{Z}_2$ dengan tingkatan trivial berikut

$$R_0 = \mathbb{Z} \text{ dan } R_1 = \{0\}$$
$$M_0 = \mathbb{Z} \text{ dan } M_1 = \{0\}.$$

Perhatikan bahwa $S = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ merupakan himpunan *multiplicatively closed*. Dari sini, diperoleh

$$S^{-1}R = \mathbb{Q}$$
$$S^{-1}M = \mathbb{Q}.$$

Berdasarkan Proposisi 34, diperoleh bahwa modul $\mathbb{Q}$ atas $\mathbb{Q}$ merupakan modul bertingkat bertipe $\mathbb{Z}_2$ dengan tingkatan

$$(S^{-1}R)_0 = \mathbb{Q} \text{ dan } (S^{-1}R)_1 = \{0\}$$
$$(S^{-1}M)_0 = \mathbb{Q} \text{ dan } (S^{-1}M)_1 = \{0\}.$$

Modul $S^{-1}M$ atas ring $S^{-1}R$ yang terbentuk di atas kedepannya disebut modul hasil bagi bertingkat. Berikut hasil pada penelitian [9], terkait modul hasil bagi bertingkat.

Teorema 38. *Diberikan modul bertingkat M atas ring bertingkat R tipe G. Jika N submodul 2-absorbing bertingkat di M, maka $S^{-1}N$ submodul 2-absorbing bertingkat di $S^{-1}M$.*

Bukti. Cukup jelas bahwa $S^{-1}N$ merupakan submodul bertingkat di $S^{-1}M$ karena N submodul bertingkat di M. Akan dibuktikan $S^{-1}N$ submodul 2-*absorbing* bertingkat di $S^{-1}M$. Diambil sebarang $a, b \in h(S^{-1}R)$ dan $m \in h(S^{-1}M)$ dengan sifat $abm \in S^{-1}N$. Dapat diperoleh $a = \frac{\alpha}{s}$, $b = \frac{\beta}{t}$, dan $m = \frac{k}{r}$ untuk suatu $\alpha, \beta \in h(R), s, t, r \in S$, dan $k \in h(M)$. Perhatikan bahwa $abm = \frac{\alpha\beta k}{str} = \frac{n}{u}$ untuk suatu $n \in N$ dan $u \in S$. Dari sini, diperoleh bahwa terdapat $v \in S$ sedemikian sehingga $vu\alpha\beta k = vstrn \in N$. Karena N submodul 2-*absorbing* bertingkat di M, diperoleh

$vu\alpha k \in N$ atau $\beta k \in N$ atau $vu\alpha\beta \in (N:_R M)$. Hal ini berakibat, $\frac{\alpha k}{sr} = \frac{vu\alpha k}{vust} \in S^{-1}N$ atau $\frac{\beta k}{tr} \in S^{-1}N$ atau $\frac{vu\alpha\beta}{vust} S^{-1}(N:_R M)$. Sehingga diperoleh $am \in S^{-1}N$ atau $bm \in S^{-1}N$ atau $ab \in S^{-1}(N:_R M)$. Selanjutnya, tinggal dibuktikan bahwa $S^{-1}(N:_R M) \subseteq (S^{-1}N:_{S^{-1}R} S^{-1}M)$. Diambil sebarang $\frac{x}{s} \in S^{-1}(N:_R M)$ yang artinya $x \in (N:_R M)$ dan $s \in S$. Dari sini, diperoleh $\frac{x}{s} \cdot \frac{m}{t} \in S^{-1}N$ untuk setiap $m \in M$ dan $s \in S$. Akibatnya, $\frac{x}{s} S^{-1}M \in S^{-1}N$. Jadi, $\frac{x}{s} \in (S^{-1}N:_{S^{-1}R} S^{-1}M)$. Hal ini berakibat $S^{-1}N$ submodul 2-*absorbing* bertingkat di $S^{-1}M$.

Akibat 39. *Jika M modul 2-absorbing bertingkat atas R, maka $S^{-1}M$ modul modul 2-absorbing bertingkat atas $S^{-1}R$.*

Berikut beberapa hasil lainnya pada penelitian [9]

Definisi 40. *Diberikan modul bertingkat M atas ring bertingkat R tipe G. Elemen $m \in M$ disebut elemen torsi terhadap elemen homogen R jika terdapat $r \in h(R)$ sedemikian sehingga $rm = 0_M$. Lebih lanjut, himpunan semua elemen torsi modul bertingkat M atas R dinotasikan dengan*

$$HT(M) = \{m \in M \mid rm = 0_M \ untuk\ suatu\ r \in h(R)\}.$$

Lema 41. *Jika M modul bertingkat atas daerah integral R tipe G, maka $HT(M)$ submodul bertingkat di M.*

Lema 42. *Diberikan modul bertingkat M atas daerah integral R tipe G. Jika $HT(M) \neq M$, maka $HT(M)$ submodul prima bertingkat di M dengan $(HT(M):_R M) = \{0_M\}$.*

Proposisi 43. *Diberikan modul bertingkat M atas daerah integral R tipe G. Jika M modul multiplikasi absorbing bertingkat, maka $HT(M) = \{0_M\}$ atau $HT(M) = M$.*

4 Simpulan

Berdasarkan penjelasan di atas, dapat disimpulkan beberapa hal sebagai berikut.

1. Prapeta submodul prima lemah bertingkat oleh suatu homomorfisma bertingkat merupakan submodul prima lemah bertingkat dengan syarat homomofisma bertingkat tersebut injektif. Peta submodul prima lemah bertingkat oleh suatu homomorfisma bertingkat merupakan submodul prima lemah bertingkat dengan syarat homomofisma bertingkat tersebut surjektif dan kernelnya termuat di dalam submodul prima lemah bertingkat tersebut.
2. Diberikan modul bertingkat M atas ring R bertipe G dan himpunan *multiplicatively closed* $S \subseteq h(R)$. Dapat dibentuk modul hasil bagi bertingkat $S^{-1}M$ atas ring $S^{-1}R$ dengan

$$(S^{-1}R)_g = \{ \frac{r}{s} \mid r \in h(R), s \in h(S), \text{dan } g = (deg(s))^{-1} deg(r) \}$$
$$(S^{-1}M)_g = \{ \frac{m}{s} \mid \mid m \in h(M), s \in h(S), \text{dan } g = (deg(s))^{-1} deg(m) \}.$$

Sifat submodul 2-*absorbing* bertingkat dipertahankan pada modul hasil bagi bertingkat.

5 Ucapan Terima Kasih

Peneliti ingin mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang terlibat dalam penelitian ini baik secara langsung maupun tidak langsung. Penulis mengucapkan terima kasih kepada para *reviewer* atas saran dan masukan demi perbaikan artikel ini.

6 Daftar Pustaka

[1] Nastasescu C, Van Oystaeyen F. Graded ring theory. New York: North-Holland Publising Company; 1982.

[2] Bland PE. Rings and their modules. New York: Walter de Gruyter; 2011.

[3] Nastasescu C, Van Oystaeyen F. Methods of graded rings. New York: Springer; 2004.

[4] Khaksari K, Jahromi FR. Multiplication graded modules. International Journal of Algebra 2013;7:17–24.

[5] Abu-Dawwas R, Refai M. Some Remarks on Graded Weak Multiplication Modules . Int J Contemp Math Sciences 2011;6:681–6.

[6] Atani SE. On graded weakly prime submodules. Int. Math. Forum, vol. 1, 2006, p. 61–6.

[7] Al-Zoubi K, Abu-Dawwas R. On graded 2-absorbing and weakly graded 2-absorbing submodules. J Math Sci Adv Appl 2014;28:45–60.

[8] Khaldoun A-Z, Rashid A-D, Çeken S. On graded 2-absorbing and graded weakly 2-absorbing ideals. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics 2019;48:724–31.

[9] Abu-Dawwas R, Saber H, Alraqad T, Jaradat R. On Generalizations of Graded Multiplication Modules. Boletim Da Sociedade Paranaensa de Matematica 2022;40:1–10.