Limits: Journal of Mathematics and Its Applications
E-ISSN: 2579-8936
P-ISSN: 1829-605X
Vol. 20, No. 3, Nopember 2023, 341-354
DOI: http://dx.doi.org/10.12962/limits.v20i3.17054

Penentuan Harga Opsi Bermuda Menggunakan Simulasi Monte Carlo Reduksi *Antithetic Variates*

Donny Citra Lesmana[1] *, Reinhart Hasudungan Sinaga[2], Cahya Rila Hadiva[3], Muthia Rasya Salsabilla[4], Hindana Dzulfa Pratiwi[5], Aufa Shahnazdiza Salsabila[6], Ravasya Nugraha[7]
[1,2,3,4,5,6,7]Departemen Matematika, IPB University, Bogor Indonesia
e-mail:donnylesmana@apps.ipb.ac.id

Diajukan: 7 Juni 2023, Diperbaiki: 5 Nopember 2023, Diterima: 9 Nopember 2023

Abstrak

Opsi merupakan produk derivatif yang popular di kalangan investor pada industri keuangan. Hal ini terjadi karena perdagangan opsi menawarkan potensi profit yang tinggi disertai fleksibilitasnya dalam pengelolaan risiko keuangan. Salah satu jenis opsi yang menarik perhatian adalah opsi Bermuda. Opsi Bermuda adalah opsi yang memberikan keleluasaan bagi pemegang opsi untuk menggunakan haknya pada waktu tertentu selama opsi belum kadaluarsa. Penentuan harga opsi Bermuda menjadi suatu tantangan terutama karena melibatkan struktur *payoff* yang kompleks. Oleh karena itu, penelitian ini ditujukan untuk membandingkan dua metode simulasi yang umum digunakan, yakni simulasi Monte Carlo standar dan simulasi Monte Carlo dengan teknik reduksi variansi *antithetic variates*, sehingga didapatkan metode yang lebih efektif dalam menilai harga opsi Bermuda. Hasil penelitian menunjukkan bahwa metode simulasi Monte Carlo dengan *antithetic variates* memberikan hasil yang lebih akurat dan tingkat eror yang lebih rendah dibandingkan dengan metode Monte Carlo standar. Dengan demikian, metode ini terbukti lebih efektif dalam menilai harga opsi Bermuda.
Kata Kunci: opsi Bermuda, simulasi Monte Carlo, reduksi variansi, *antithetic variates*

Abstract

Options are derivative products that are popular among investors in the financial industry. This happens because options trading offers high profit potential along with flexibility in managing financial risk. One type of option that attracts attention is the Bermudan option. Bermudan options are options that give the option holder the freedom to exercise their rights at a certain time as long as the option has not expired. Pricing Bermudan options is a challenge primarily because they involve complex payoff structures. Therefore, this research is aimed at comparing two commonly used simulation methods, namely standard Monte Carlo simulation and Monte Carlo simulation with antithetic variate techniques, so as to obtain a more effective method in determining Bermudan option prices. The research results show that the Monte Carlo simulation method with antithetic variates provides more accurate results and a lower error rate compared to the standard Monte Carlo method. Thus, this method has proven to be more effective in determining Bermuda option prices.
***Keywords**: Bermudan option price, Monte Carlo simulation, variance reduction, antithetic variates*

1 Pendahuluan

Berinvestasi adalah salah satu pilihan yang dapat dilakukan untuk mengembangkan kekayaan seseorang. Dalam berinvestasi, terdapat risiko yang harus dihadapi oleh para investor.

Seiring berkembangnya ilmu dan teknologi, beberapa produk keuangan dirancang untuk mengelola risiko dan meminimalisasi kerugian. Produk derivatif adalah salah satu produk keuangan yang menjadi alternatif untuk mengatasi risiko dalam dunia keuangan. Oleh karena itu, produk derivatif semakin marak digunakan di kalangan investor.

Penggunaan produk derivatif semakin berkembang dengan berbagai alasan, seperti tingginya tingkat volatilitas pasar, sebagai komplementer pengoptimal portofolio aset keuangan, dan adopsi teknologi yang semakin cepat. Berdasarkan penelitian yang dilakukan oleh [1], penggunaan produk derivatif dapat memberikan berbagai manfaat bagi investor, seperti meningkatkan likuiditas, mengurangi risiko, dan meningkatkan pengembalian (*return*) investasi. Namun, penggunaan produk derivatif juga memiliki risiko, seperti risiko keuangan, risiko kredit, dan risiko operasional. Produk derivatif dapat dibedakan berdasarkan proses transaksinya. Beberapa produk derivatif yang banyak diperjualbelikan antara lain: opsi, kontrak berjangka, dan *swap*.

Opsi merupakan produk derivatif yang paling populer dan sering digunakan para investor ketika berinvestasi saham, sebab opsi mampu mengelola risiko sekaligus memiliki potensi keuntungan yang tinggi. Opsi adalah sekuritas derivatif yang memberikan hak kepada pemegangnya untuk membeli atau menjual aset dasar pada harga tertentu (yang disebut harga *strike*) dan dalam periode tertentu [2]. Selain itu, opsi memiliki sifat yang fleksibel bila dilihat dari jenisnya yang terdapat di pasaran. Salah satunya adalah opsi Bermuda yang termasuk dalam opsi eksotik.

Opsi Bermuda adalah jenis opsi yang memberikan hak untuk membeli atau menjual aset dasar pada tanggal-tanggal tertentu di masa depan dengan variasi pada tanggal-tanggal pelaksanaan yang diizinkan. Opsi Bermuda merupakan jenis opsi eksotik yang lebih kompleks daripada opsi Eropa karena memiliki beberapa waktu eksekusi dan jumlah variabel yang lebih banyak [3]. Dalam menentukan harga opsi Bermuda, diperlukan teknik numerik yang efektif dan akurat. Simulasi Monte Carlo menjadi teknik yang populer digunakan dalam penentuan harga opsi, terutama opsi eksotik, seperti opsi Bermuda. Namun, metode simulasi Monte Carlo memiliki kekurangan, yakni dibutuhkan jumlah simulasi yang banyak untuk mendapatkan hasil yang akurat. Dalam penggunaan metode simulasi Monte Carlo, ketika banyaknya periode waktu harga saham meningkat, standar eror juga cenderung tetap. Oleh karena itu, dalam penelitian ini digunakan teknik reduksi variansi untuk meningkatkan konvergensi dari skema yang digunakan dalam simulasi Monte Carlo [4][5].

Dalam penelitian yang dilakukan oleh [4] mengenai penentuan harga opsi Asia menggunakan simulasi Monte Carlo dengan teknik reduksi variansi, seperti reduksi variansi *antithetic variates*, didapatkan hasil bahwa teknik tersebut efektif mempercepat tingkat kekonvergenan. Pada penelitian ini dilakukan penghitungan harga opsi Bermuda menggunakan simulasi Monte Carlo standar dan simulasi Monte Carlo reduksi variansi *antithetic variates* yang umumnya diterapkan pada opsi Eropa.

Selain itu, akan ditunjukkan pula kinerja simulasi Monte Carlo standar dan simulasi Monte Carlo dengan teknik reduksi variansi *antithetic variates* dalam penentuan harga opsi Bermuda. Penelitian ini akan memberikan gambaran efektivitas dan eror dari masing-masing metode. Selanjutnya juga akan diperiksa kekonsistenan masing-masing metode dalam mengestimasi harga opsi sesuai dengan teori harga opsi. Penelitian ini dilakukan menggunakan data penutupan harga saham Marvel Technology Inc. (MRVL), dan hasil dari kedua metode tersebut akan dibandingkan untuk mendapatkan pemahaman yang lebih mendalam tentang pendekatan yang paling sesuai dalam menentukan harga opsi Bermuda.

2 Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan data harian harga saham MRVL selama periode waktu 1 Januari 2022 hingga 1 Januari 2023. Data harga saham ini diperoleh melalui situs *Yahoo Finance* (finance.yahoo.com) yang menyediakan data pasar keuangan yang luas dan terkini. Dalam penelitian ini, data harian saham Marvel Technology Inc. digunakan sebagai dasar untuk analisis dan evaluasi terkait harga saham tersebut.

Tingkat bunga bebas risiko yang digunakan mengacu pada tingkat bunga bebas risiko Amerika Serikat yang dapat diakses dari situs *fred.stlouisfed.org*. Pada penelitian ini, nilai tingkat bunga bebas risiko yang digunakan merupakan rata-rata tingkat bunga bebas risiko pada periode 1 Januari–25 Mei 2023, yaitu sebesar 3.59% per tahun.

2.1 Uji Normalitas

Pada uji normalitas, akan dilakukan pengecekan mengenai sebaran data apakah mengikuti distribusi normal atau tidak. Data berdistribusi normal diperlukan sebagai syarat pemenuhan asumsi model dalam penelitian ini yang menggunakan model Black-Scholes, yaitu log-*return* saham menyebar normal [3]. *Return* saham dihitung menggunakan persamaan sebagai berikut:

$$R(t) = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) = \ln(S_t) - \ln(S_{t-1}). \tag{1}$$

Dalam konteks penentuan harga opsi dengan menggunakan model Black-Scholes, $S_t$adalah harga saham pada waktu-t dan S_{t-1} adalah harga saham pada waktu ke-$(t-1)$, sedangkan volatilitas saham (dalam artian pergerakan harga saham yang besar atau kecil dalam periode tertentu) biasanya dianggap konstan. Dalam persamaan Black-Scholes, volatilitas diasumsikan tetap sepanjang masa hidup opsi [3].

2.2 Volatilitas *Return* Saham

Volatilitas saham merupakan gambaran fluktuasi harga saham dari waktu ke waktu. Misalkan nilai volatilitas tahunan dari *return* saham dinotasikan dengan σ. Volatilitas dihitung menggunakan Persamaan (2), dengan standar deviasi *return* saham data harian dinotasikan dengan s, sehingga diperoleh Persamaan (3). *Return* saham pada waktu ke-i dinotasikan dengan u_i, dan $\bar{u}$ adalah rata-rata *return* saham dalam periode yang telah ditentukan. Jika menggunakan data harian, nilai Δt dihitung menggunakan data banyaknya hari perdagangan, sehingga $\Delta t = \frac{1}{252}$ [3]. Volatilitas tahunan dapat dihitung dengan menggunakan persamaan berikut:

$$\sigma = \frac{s}{\sqrt{\Delta t}} \tag{2}$$

dengan s merupakan standar deviasi *return* dan dihitung dengan formula:

$$s = \sqrt{\frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k}(u_i - \bar{u})^2} \tag{3}$$

dengan u_i adalah nilai *return* pada hari ke-i dan $\bar{u}$ adalah nilai rata-rata *return*.

2.3 Penentuan Harga Opsi Bermuda

Opsi Bermuda merupakan tipe opsi nonstandar dari tipe opsi Amerika. Opsi ini dapat digunakan hanya pada waktu tertentu [6]. Waktu untuk melakukan eksekusi opsi telah ditentukan sebelumnya sehingga pemegang opsi tidak dapat mengeksekusi secara bebas sebelum masa opsi berakhir [7].

Opsi Bermuda terdiri atas dua jenis, yaitu opsi *call* dan opsi *put*, dengan fungsi *payoff* yang berbeda untuk masing-masing jenis opsi.

1. *Payoff* opsi *call* Bermuda

$$C_{t_k} = \max\left[S_{t_k} - K, 0\right];\ t_k \leq T \tag{4}$$

dengan C_{t_k} sebagai fungsi *payoff* opsi *call* yang dieksekusi pada waktu t_k dengan $t_k \leq T$.

2. *Payoff* opsi *put* Bermuda

$$P_{t_k} = \max\left[K - S_{t_k}, 0\right];\ t_k \leq T \tag{5}$$

dengan P_{t_k} sebagai fungsi *payoff* opsi *put* yang dieksekusi pada waktu t_k dengan $t_k \leq T$.

Fungsi *payoff* juga dapat diartikan sebagai nilai opsi pada titik simpul dalam metode binomial n-langkah [8]. Harga opsi Bermuda berada di antara harga opsi Eropa dan opsi Amerika karena pemegang opsi dapat mengeksekusi haknya pada waktu-waktu yang telah ditentukan sebelumnya, dimana waktu eksekusi ini lebih banyak dibandingkan dengan waktu eksekusi pada opsi Eropa namun tetap tidak sebanyak waktu mengeksekusi pada opsi Amerika [9]. Pada penelitian ini, periode untuk eksekusi opsi Bermuda dilakukan secara bulanan dengan $t_k = \frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \ldots, \frac{11}{12}$.

2.4 Simulasi Monte Carlo *Antithetic Variates*

Algoritma dasar dalam menentukan harga opsi Bermuda menggunakan teknik *antithetic variates* dapat dilakukan sebagai berikut:

1. Tentukan nilai parameter model, yaitu harga saham awal (S_0), *strike price* (K), banyaknya simulasi yang dilakukan (M), tingkat bunga bebas risiko (r), waktu hingga jatuh tempo opsi (T), volatilitas harga saham (σ) dan waktu untuk *early exercise* (t_k) dengan $t_k \leq T$.
2. Bangkitkan sebanyak M variabel acak ε_i yang menyebar normal baku dan tetapkan variabel acak $\tau_i = -\varepsilon_i$.
3. Simulasikan harga saham pada waktu t untuk simulasi ke-i menggunakan persamaan berikut:
$$S_t^{i+} = S_{t-1}^{i+} \exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \varepsilon_i \sigma \sqrt{\Delta t}\right] \quad (6a)$$
$$S_t^{i-} = S_{t-1}^{i-} \exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \tau_i \sigma \sqrt{\Delta t}\right] \quad (6b)$$
4. Hitung nilai sekarang dari *payoff* opsi *call* dengan mengalikannya dengan faktor diskonto sebagai berikut:
$$C_i^+ = e^{-rt^*} \max\left[S_{t^*}^{i+} - K, 0\right] \quad (7a)$$
$$C_i^- = e^{-rt^\sim} \max\left[S_{t^\sim}^{i-} - K, 0\right] \quad (7b)$$
$$C_i = \frac{C_i^+ + C_i^-}{2} \quad (7c)$$
dengan $t^* = \arg_{t_k}\left(\max\left\{S_{t_k}^{i+}\right\}\right)$ dan $t^\sim = \arg_{t_k}\left(\max\left\{S_{t_k}^{i-}\right\}\right)$.
5. Hitung nilai sekarang dari *payoff* opsi *put*, menggunakan rumus sebagai berikut:
$$P_i^+ = e^{-rt^*} \max\left[K - S_{t^*}^{i+}, 0\right] \quad (8a)$$
$$P_i^- = e^{-rt^\sim} \max\left[K - S_{t^\sim}^{i-}, 0\right] \quad (8b)$$
$$P_i = \frac{P_i^+ + P_i^-}{2}$$
dengan $t^* = \arg_{t_k}\left(\min\left\{S_{t_k}^{i+}\right\}\right)$ dan $t^\sim = \arg_{t_k}\left(\min\left\{S_{t_k}^{i-}\right\}\right)$. (8c)
6. Hitung harga opsi *call* (C) dan opsi *put* (P) dengan menghitung rata-rata C_i dan P_i untuk setiap iterasi-i (i = 1, 2, …, M) menggunakan persamaan berikut:
$$C = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} C_i \quad (9)$$
$$P = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} P_i \quad (10)$$

2.5 *Mean Absolute Error* (MAE)

Mean absolute error dihitung dengan menggunakan persamaan berikut :

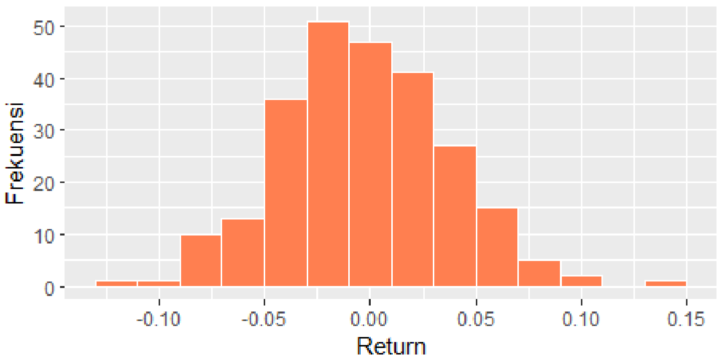
$$\text{MAE} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|y_i - \hat{y}_i| \tag{11}$$

dengan n adalah jumlah data, y_i adalah nilai aktual, dan $\hat{y}_i$ sebagai nilai prediksi.

3 Hasil dan Pembahasan

3.1 Uji Normalitas

Dalam uji normalitas menggunakan uji Shapiro-Wilk, diperoleh *p-value* sebesar 0.57130 yang lebih besar dari taraf signifikansi 0.05. Hal ini menunjukkan bahwa data *log-return* saham MRVL mengikuti distribusi normal. Untuk memberikan gambaran lebih lanjut, berikut adalah histogram dari *log-return* harga penutupan saham MRVL.



Gambar 1. Histogram *log-return* harga penutupan saham MRVL

Histogram pada Gambar 1 mendukung kesimpulan bahwa sebaran *log-return* harga penutupan saham MRVL mengikuti sebaran normal. Hal ini dapat dilihat dari karakteristik grafik yang menyerupai kurva normal dengan puncak tertinggi terletak di tengah dan ekor yang simetris di kedua sisi. Distribusi normal menunjukkan bahwa fluktuasi harga saham MRVL cenderung tersebar secara merata dan tidak menunjukkan adanya *skewness* atau kurtosis yang signifikan.

3.2 Volatilitas *Return* Saham

Volatilitas dari *return* saham MRVL dihitung dengan menggunakan Persamaan (2). Dari *return* saham diperoleh nilai standar deviasi sebesar 0.03978 dan Panjang sub-interval waktu dalam satu tahun (Δt) adalah 1/252 hari, maka diperoleh nilai volatilitas tahunan *return* saham sebesar 0.63 atau 63%. Nilai volatilitas yang relatif tinggi menunjukkan bahwa saham memiliki fluktuasi harga yang cukup besar. Dalam hal ini, *return* harga penutupan saham MRVL cenderung bergerak dengan variasi yang signifikan dalam jangka waktu yang diberikan.

3.3 Penghitungan Harga Opsi Bermuda dan *Mean Absolute Error* Simulasi Monte Carlo Standar dan *Antithetic Variates*

Pada dasarnya, simulasi Monte Carlo digunakan sebagai pendekatan numerik untuk memperkirakan nilai harapan dari suatu variabel acak. Dalam penelitian ini, metode tersebut digunakan untuk menduga harga opsi *call* dan opsi *put* Bermuda dengan iterasi sebanyak 25600 kali. Harga opsi yang dihitung menggunakan 25600 simulasi digunakan sebagai solusi eksak. Hal ini dilakukan untuk mengevaluasi sejauh mana hasil simulasi pada iterasi lainnya mendekati harga opsi Bermuda sebenarnya. Hasil dari simulasi tersebut menampilkan harga opsi *call* dan opsi *put* seperti yang tertera pada Tabel 1 dan Tabel 2.

Tabel 1. Harga Opsi *Call* Bermuda beserta *Absolute Error* Simulasi Monte Carlo Standar dan *Antithetic Variates*

Jumlah Iterasi	**Harga Opsi *Call* (USD)**		***Absolute Error***	
	Monte Carlo Standar	**Monte Carlo *Antithetic Variate***	**Monte Carlo Standar**	**Monte Carlo *Antithetic Variate***
800	7.78146	7.82888	0.30476	0.36333
1600	8.03490	7.79753	0.55820	0.33198
3200	7.77130	7.36727	0.29460	0.09828
6400	7.49965	7.38924	0.02295	0.07631
12800	7.50036	7.45475	0.02366	0.01080

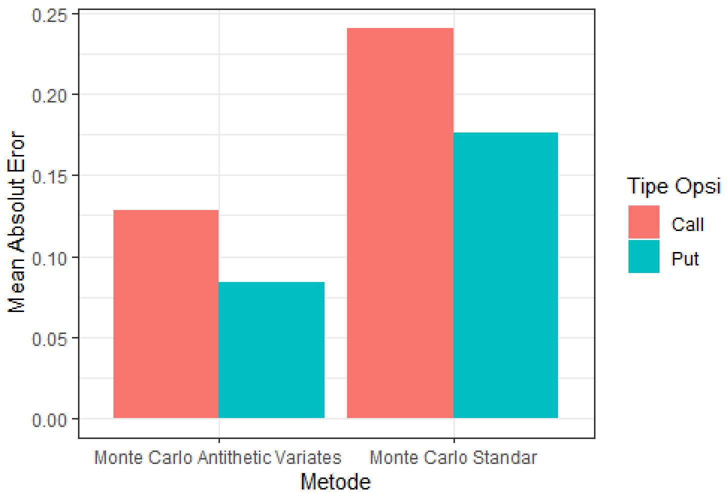
Berdasarkan harga opsi pada Tabel 1, opsi *call* Bermuda yang diperoleh melalui simulasi Monte Carlo standar memiliki hampiran terbaik pada harga $7.47670, sedangkan dengan simulasi Monte Carlo *antithetic variates* diperoleh hampiran terbaik pada harga $7.46555. Selain itu, dari Tabel 1 diperoleh nilai *mean absolute error* (MAE) pada simulasi Monte Carlo standar untuk opsi *call* sebesar 0.24084, sedangkan pada simulasi Monte Carlo *antithetic variates* diperoleh MAE sebesar 0.17614. Hasil ini menunjukkan bahwa penggunaan simulasi Monte Carlo *antithetic variates* lebih optimal dalam penghitungan opsi *call* Bermuda. Selanjutnya, disajikan hasil penghitungan harga opsi *put* Bermuda pada Tabel 2

Tabel 2. Harga Opsi *Put* Bermuda beserta *Absolute Error* Simulasi Monte Carlo Standar dan *Antithetic Variates*

Jumlah Iterasi	**Harga Opsi *Put* (USD)**		***Absolute Error***	
	Monte Carlo Standar	**Monte Carlo *Antithetic Variate***	**Monte Carlo Standar**	**Monte Carlo *Antithetic Variate***
800	5.15282	4.93441	0.02789	0.21533
1600	4.94367	4.87569	0.38366	0.15661
3200	4.72433	4.75457	0.17452	0.03549
6400	4.76138	4.72545	0.04483	0.00637
12800	4.79705	4.72418	0.00777	0.00510

Berdasarkan harga opsi yang terdapat pada Tabel 2, opsi *put* Bermuda dalam simulasi Monte Carlo standar memiliki hampiran terbaik pada harga $4.76916, sementara dalam simulasi Monte Carlo *antithetic variates* diperoleh hampiran terbaik pada harga $4.71908. Selain itu, dari Tabel 2, diperoleh penghitungan MAE untuk harga opsi *put* dengan simulasi Monte Carlo standar sebesar 0.12773, sedangkan dengan simulasi Monte Carlo *antithetic variates* diperoleh MAE sebesar 0.08378. Serupa dengan penghitungan harga opsi call, hasil ini menunjukkan bahwa penggunaan simulasi Monte Carlo *antithetic variates* lebih optimal dalam penghitungan opsi *put* Bermuda.

Berdasarkan Tabel 1 dan Tabel 2, hasil menunjukkan bahwa semakin banyak iterasi yang digunakan, maka solusi hampiran cenderung semakin mendekati solusi eksak. Selain itu, hasil penghitungan harga opsi *call* dan opsi *put* Bermuda menggunakan simulasi Monte Carlo standar dan *antithetic variates* sesuai dengan teori penentuan harga opsi, yaitu harga opsi Bermuda lebih tinggi daripada harga opsi Eropa dan lebih rendah daripada harga opsi Amerika. Selanjutnya, disajikan grafik perbandingan *mean absolute error* (MAE) pada Gambar 2.



Gambar 2. Perbandingan MAE simulasi Monte Carlo Standar dan *Antithetic Variates*

Dari Gambar 2, terlihat bahwa simulasi Monte Carlo dengan teknik *antithetic variates* memiliki MAE yang lebih kecil dibandingkan dengan Monte Carlo standar. Hal ini menunjukkan bahwa metode *antithetic variates* lebih baik dalam menghasilkan estimasi yang lebih baik dan stabil dengan mengurangi variasi hasil simulasi. Dengan demikian, simulasi Monte Carlo dengan *antithetic variates* dianggap lebih baik dan disukai dalam analisis harga opsi karena dapat meningkatkan presisi dan mengurangi kesalahan prediksi.

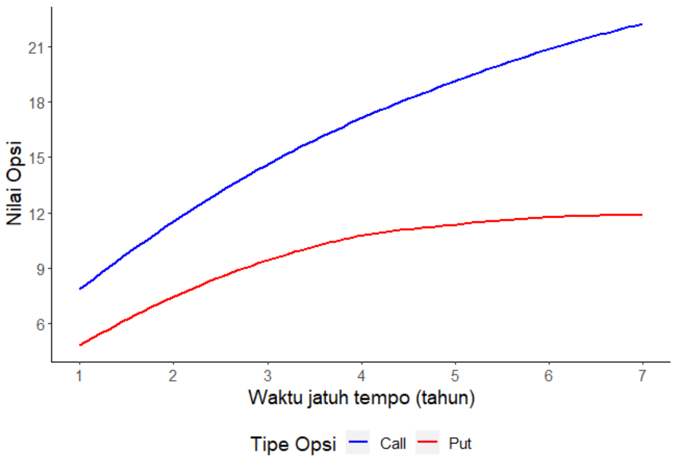
3.4 Analisis Faktor-Faktor yang Mempengaruhi Harga Opsi Menggunakan Simulasi Monte Carlo *Antithetic Variates*

Nilai opsi dipengaruhi oleh beberapa faktor, antara lain harga *underlying asset*, waktu jatuh tempo, *strike price*, volatilitas, dan tingkat bunga bebas risiko. Pada penelitian ini akan dilihat pengaruh faktor-faktor tersebut terhadap pergerakan harga opsi *call* dan opsi *put* tipe Bermuda.

Tabel 3. Pengaruh Waktu Jatuh Tempo terhadap Harga Opsi Bermuda

***T* (tahun)**	**Opsi *Call* (USD)**	**Opsi *Put* (USD)**
1	7.82888	4.93441
2	11.62468	7.13530
3	14.64278	9.83143
4	17.04667	10.63081
5	19.24218	11.22635
6	20.64924	11.64736
7	22.32665	11.93866

Tabel 3 menunjukkan bahwa semakin lama waktu jatuh tempo (T), maka harga opsi *call* dan opsi *put* Bermuda cenderung semakin meningkat. Periode jatuh tempo yang lebih lama memberikan waktu yang lebih lama pula untuk pergerakan harga saham sehingga meningkatkan nilai opsi *call* dan opsi *put*. Hubungan tersebut digambarkan pada Gambar 3.

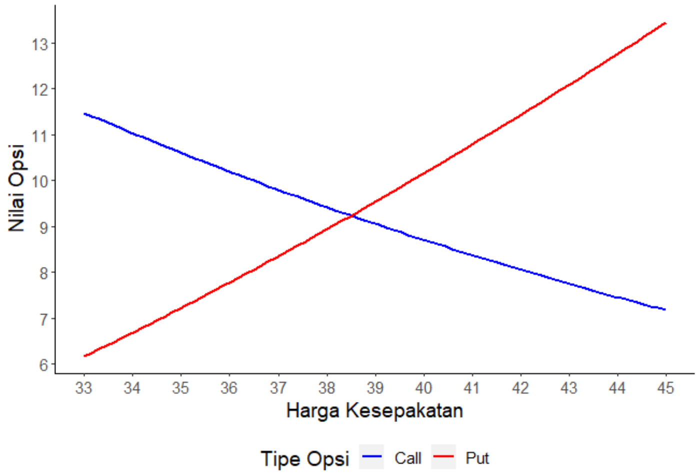


Gambar 3. Grafik Pengaruh Waktu Jatuh Tempo terhadap Harga Opsi Bermuda

Tabel 4. Pengaruh *Strike Price* terhadap Harga Opsi Bermuda

Strike Price	**Opsi *Call* (USD)**	**Opsi *Put* (USD)**
33	11.47541	6.16982
34	11.03011	6.68916
35	10.60217	7.22586
36	10.19136	7.77969
37	9.79729	8.35026
38	9.41934	8.93695
39	9.05685	9.53910
40	8.70979	10.15668
41	8.37692	10.78845
42	8.05692	11.43309
43	7.75022	12.09104
44	7.45610	12.76156
45	7.17439	13.44448

Tabel 4 menunjukkan bahwa harga opsi *call* dan *put* secara umum berubah seiring dengan perubahan *strike price*. Pada simulasi Monte Carlo *antithetic variates*, terlihat tren umum bahwa harga opsi *call* menurun seiring dengan kenaikan harga kesepakatan (*strike price*), sementara harga opsi *put* meningkat seiring dengan kenaikan harga kesepakatan (*strike price*). Perubahan ini mencerminkan hubungan yang diharapkan antara harga kesepakatan (*strike price*) dan harga opsi dalam model opsi Bermuda. Hubungan tersebut digambarkan pada Gambar 4.

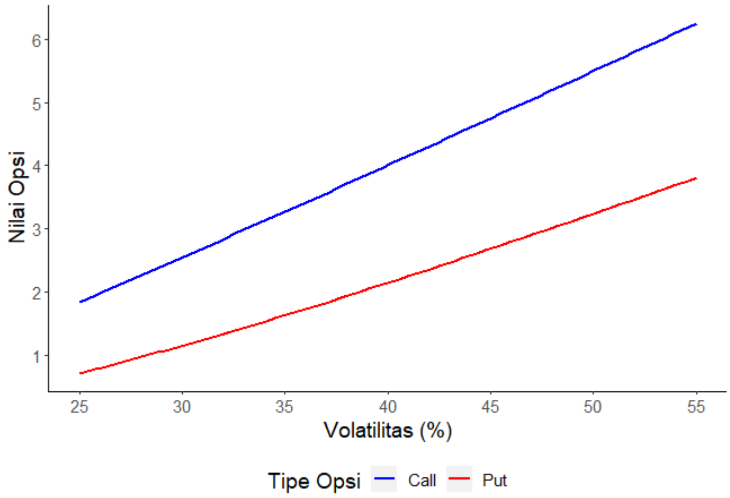


Gambar 4. Grafik Pengaruh *Strike Price* terhadap Harga Opsi Bermuda

Tabel 5. Pengaruh Volatilitas terhadap Harga Opsi Bermuda

Volatilitas	**Opsi *Call* (USD)**	**Opsi *Put* (USD)**
25%	1.84562	0.70726
30%	2.54621	1.14082
35%	3.26972	1.62508
40%	4.00686	2.14339
45%	4.75202	2.68358
50%	5.50159	3.23968
55%	6.25300	3.80616

Tabel 5 menunjukkan bahwa pada simulasi Monte Carlo *antithetic variates*, harga opsi *call* dan opsi *put* cenderung naik seiring dengan kenaikan volatilitas. Hal ini sesuai dengan teori dimana volatilitas merupakan ukuran risiko dari investasi pada saham [3]. Volatilitas meningkat mengartikan risiko meningkat sehingga harga opsi akan ikut meingkat. Perubahan ini mencerminkan hubungan yang diharapkan antara volatilitas dan harga opsi dalam model opsi Bermuda. Hubungan tersebut juga ditampilkan pada Gambar 5.

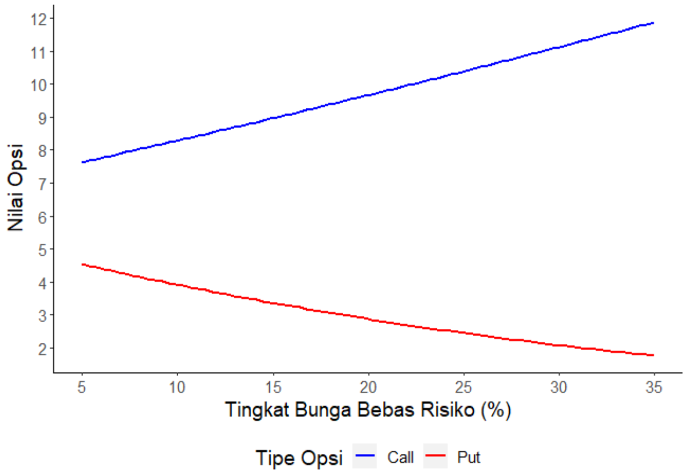


Gambar 5. Pengaruh Volatilitas terhadap Harga Opsi Bermuda

Tabel 6. Pengaruh Tingkat Bunga Bebas Risiko terhadap Harga Opsi Bermuda

r_f	**Opsi *Call* (USD)**	**Opsi *Put* (USD)**
5%	7.63442	4.53542
10%	8.28853	3.91444
15%	8.96543	3.36482
20%	9.66523	2.88089
25%	10.38515	2.45727
30%	11.12186	2.08654
35%	11.87168	1.76459

Tabel 6 menampilkan pengaruh tingkat bunga bebas risiko (r_f) terhadap harga opsi *call* dan opsi *put* jenis Bermuda menggunakan simulasi Monte Carlo *antithetic variates*. Pada Tabel 6, terlihat bahwa harga opsi *call* secara umum meningkat seiring dengan peningkatan tingkat bunga bebas risiko. Namun, harga opsi *put* cenderung menurun seiring dengan kenaikan tingkat bunga bebas risiko. Hal ini menunjukkan bahwa adanya hubungan negatif antara tingkat bunga bebas risiko dan harga opsi *put* dalam model opsi Bermuda. Ketika tingkat bunga bebas risiko meningkat, nilai waktu opsi *put* cenderung berkurang sedangkan harga opsi *put* menurun. Hubungan tersebut juga disajikan pada Gambar 6.



Gambar 6. Grafik Pengaruh Tingkat Bunga Bebas Risiko terhadap Harga Opsi

Dari hasil yang telah diperoleh, Nampak bahwa pengaruh beberapa parameter yang diamati terhadap harga opsi sejalan dengan teori mengenai harga opsi [10], [11].

3.5 Tingkat Kekonvergenan

Tingkat kekonvergenan dapat mengukur performa suatu metode numerik dalam memberikan hasil yang mendekati solusi eksak. Nilai tingkat kekonvergenan yang lebih tinggi menunjukkan tingkat akurasi yang lebih baik dan konvergensi yang lebih cepat terhadap solusi eksaknya.

Tabel 7. Rasio Eror Simulasi Monte Carlo *Antithetic Variates*

M	*Error* Opsi *Call*	*Error* Opsi *Put*	Rasio *Error* Opsi *Call*	Rasio *Error* Opsi *Put*
800	0.36333	0.21533		
1600	0.33198	0.15661	1.09443	1.37494
3200	0.09828	0.03549	3.37790	4.41279
6400	0.07631	0.00637	1.28790	5.57143
12800	0.01080	0.00510	7.06574	1.24902

Pada Tabel 7 diperoleh tingkat kekonvergenan opsi *call* Bermuda sebesar 3.20649, sedangkan untuk opsi *put* Bermuda sebesar 3.15205. Hal ini menunjukkan bahwa jika simulasi diperbesar dua kali lipat, maka simulasi Monte Carlo *antithetic variates* untuk opsi *call* Bermuda akan mencapai nilai eksak sebesar 3.2 kali lebih cepat, sementara opsi *put* Bermuda akan mencapai nilai eksak 3.1 kali lebih cepat.

4 Simpulan

Dari penelitian ini dapat disimpulkan bahwa metode simulasi Monte Carlo dengan reduksi variansi *antithetic variates* adalah pendekatan yang efektif dalam mengestimasi harga opsi Bermuda dengan konvergensi yang lebih cepat. Hal ini dibuktikan dengan ukuran tingkat kekonvergenan sebesar 3.20649 untuk opsi *call* Bermuda dan 3.15205 untuk opsi *put* Bermuda.

Selain itu, metode ini mampu secara akurat menggambarkan karakteristik dan pola harga opsi, dan menjadikannya alat yang dapat diandalkan dalam menentukan harga opsi Bermuda. Penelitian ini juga menekankan pengaruh positif yang signifikan dari volatilitas dan waktu jatuh tempo dalam penilaian harga opsi Bermuda, yang sejalan dengan teori harga opsi. Oleh karena itu, metode Monte Carlo dengan reduksi variansi *antithetic variates* telah terbukti kehandalannya untuk menilai harga opsi Bermuda.

5 Daftar Pustaka

[1] D. Vo, S. Huynh, A. Vo, and D. Ha, "The Importance of the Financial Derivatives Markets to Economic Development in the World's Four Major Economies," *Journal of Risk and Financial Management*, vol. 12, no. 1, p. 35, Feb. 2019, doi: 10.3390/jrfm12010035.

[2] K. Kazmi, "A second order numerical method for the time-fractional Black–Scholes European option pricing model," *J Comput Appl Math*, vol. 418, p. 114647, Jan. 2023, doi: 10.1016/j.cam.2022.114647.

[3] J. C. Hull, *Options, Future, and Other Derivatives*, 11th ed. New Jersey: Pearson Education International, 2021.

[4] T. N. Habaib, S. Mariani, and R. Arifudin, "Penentuan Harga Opsi Asia Menggunakan Metode Simulasi Monte Carlo dengan Teknik Reduksi Variansi," *UNNES Journal of Mathematics*, vol. 7, no. 1, pp. 28–37, 2018.

[5] W. Ayudiah, D. C. Lesmana, and E. H. Nugrahani, "Penentuan Harga Opsi Sebagai Alat Lindung Nilai Petani Gabah Menggunakan Metode Monte Carlo Dan Teknik Control Variate," *Journal of Mathematics and Its Applications*, vol. 16, no. 1, pp. 39–54, 2017.

[6] M. A. Darmawan, Irwan, and S. D. Anugrawati, "Penentuan Nilai Opsi Bermuda Menggunakan Metode Trinomial," *Jurnal Siger Matematika*, vol. 3, no. 1, pp. 1–6, 2022.

[7] Z. Pan, Y. Gao, and L. Yuan, "Bermudan options pricing formulas in uncertain financial markets," *Chaos Solitons Fractals*, vol. 152, p. 111327, Nov. 2021, doi: 10.1016/j.chaos.2021.111327.

[8] A. Bendob and N. Bentouir, "Options Pricing by Monte Carlo Simulation, Binomial Tree and BMS Model: a comparative study of Nifty50 options index," *Journal of Banking and Financial Economics*, vol. 1/2019, no. 11, pp. 79–95, Apr. 2019, doi: 10.7172/2353-6845.jbfe.2019.1.4.

[9] K. in ’t Hout, “Financial Option Valuation,” in *Numerical Partial Differential Equations in Finance Explained*, London: Palgrave Macmillan UK, 2017, pp. 1–8. doi: 10.1057/978-1-137-43569-9_1.

[10] D. C. Lesmana and S. Wang, “A numerical scheme for pricing American options with transaction costs under a jump diffusion process,” *Journal of Industrial & Management Optimization*, vol. 13, no. 4, pp. 1793–1813, 2017, doi: 10.3934/jimo.2017019.

[11] D. C. Lesmana and S. Wang, “Penalty approach to a nonlinear obstacle problem governing American put option valuation under transaction costs,” *Appl Math Comput*, vol. 251, pp. 318–330, Jan. 2015, doi: 10.1016/j.amc.2014.11.060.