

# Model Predator Prey Leslie Gower dengan Respon Crowley Martin dan Prey Terinfeksi serta Faktor Ketakutan

Miswanto<sup>1\*</sup>, Nunik Suroiyah<sup>2</sup>, Windarto<sup>3</sup>

<sup>1,2,3</sup> Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Airlangga

\*Corresponding author: [miswanto@fst.unair.ac.id](mailto:miswanto@fst.unair.ac.id)

*Diajukan: 13 Agustus 2023, Diperbaiki: 21 Oktober 2023, Diterima: 26 Oktober 2023*

## Abstrak

Ekosistem adalah suatu sistem yang terdiri dari organisme hidup dan lingkungannya yang seringkali terjadi interaksi antara makhluk hidup dengan lingkungannya, atau makhluk hidup yang satu dengan makhluk hidup yang lain. Sebagai contoh interaksi antara predator dengan prey, yaitu singa dengan rusa, ular dengan tikus, burung elang dengan ular dan lain-lain. Pada interaksi antara predator prey seringkali nampak adanya prey yang terinfeksi. Hal ini berdampak adanya penyebaran penyakit oleh prey terinfeksi. Penelitian ini mengkaji model predator prey Leslie Gower fungsi respon Crowley Martin dengan prey terinfeksi serta adanya faktor ketakutan. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode analitik dan simulasi numerik. Metode analitik digunakan untuk mengkaji eksistensi titik setimbang dan analisis kestabilan titik setimbang model, sedangkan metode simulasi numerik digunakan untuk mendukung hasil metode analitik. Berdasarkan hasil analitik diperoleh dua titik setimbang yang cenderung stabil asimtotis, yaitu titik setimbang kepunahan prey terinfeksi dan predator ( $E_1$ ) dan titik setimbang kepunahan predator ( $E_2$ ). Sedangkan titik setimbang kepunahan prey terinfeksi ( $E_3$ ) dan titik setimbang koeksistensi ( $E_4$ ) tidak diperoleh secara analitik. Oleh karena analisis kestabilannya menggunakan bidang fase. Hasil simulasi numerik menunjukkan bahwa keempat titik setimbang, yaitu  $E_1, E_2, E_3$ , dan  $E_4$  cenderung stabil asimtotis.

**Kata Kunci:** Ekosistem, Model Predator-Prey Leslie Gower, Fungsi Respon Crowley Martin, Kestabilan.

## Abstract

*An ecosystem is a system consisting of living organisms and their environment, where interactions often occur between living creatures and their environment, or one living creature and another living creature. For example, interactions between predators and prey, namely lions and deer, snakes and mice, eagles and snakes and so on. In interactions between predator prey, infected prey often appears. This results in the spread of disease by infected prey. This research examines Leslie Gower's predator prey model, Crowley Martin's response function to infected prey and the presence of fear factors. The methods used in this research are analytical methods and numerical simulations. Analytical methods are used to study the existence of equilibrium points and analyze the stability of model equilibrium points, while numerical simulation methods are used to support the results of analytical methods. Based on the analytical results obtained, two equilibrium points tend to be asymptotically stable, namely the equilibrium point for extinction of infected prey and predators ( $E_1$ ) and the equilibrium point for extinction of predators ( $E_2$ ). Meanwhile, the equilibrium point of extinction of infected prey ( $E_3$ ) and the equilibrium point of coexistence ( $E_4$ ) are not obtained analytically. Such that, the stability analysis uses the phase plane. The numerical simulation results show that the four equilibrium points, namely  $E_1, E_2, E_3$  and  $E_4$  tend to be asymptotically stable.*

**Keywords:** *Ecosystems, Leslie Gower Predator-Prey Models, Crowley Martin Response Functions, Stability.*

## 1 Pendahuluan

Biosfer dikenal sebagai wilayah di permukaan bumi yang sesuai untuk lingkungan hidup organisme. Makhluk hidup memerlukan kondisi tertentu untuk menunjang kehidupan mereka seperti oksigen, air, mineral dan unsur hara lainnya yang terdapat dalam biosfer. Kehidupan makhluk hidup terbentuk dari beberapa level perkembangan yaitu spesies, populasi, komunitas dan ekosistem. Ekosistem merupakan lingkungan tempat terjadinya interaksi antara komponen biotik dan komponen abiotik [1]. Dalam suatu ekosistem, untuk melangsungkan hidup spesies memiliki peran yang berbeda-beda sesuai dengan kebutuhan. Salah satu contohnya adalah spesies satwa yang memiliki kebutuhan khas pakan yang disukai. Kebutuhan tersebut menyebabkan munculnya interaksi mangsa-memangsa. Hubungan mangsa-memangsa yang spesifik tersebut disebut rantai makanan [2].

Interaksi merupakan bagian paling sederhana dari suatu rantai makanan, misalnya interaksi antara mangsa dan pemangsa. Interaksi antarorganisme dimana satu organisme memangsa organisme lain disebut predasi. Organisme yang memangsa disebut predator, sedangkan organisme yang dimangsa disebut prey. Hubungan antara predator dan prey mempengaruhi kelimpahan organisme dalam suatu ekosistem [3]. Populasi mangsa mempunyai persediaan makanan yang tersedia cukup di dalam lingkungannya, sedangkan pada populasi pemangsa memiliki makanan yang bergantung pada jumlah mangsa. Apabila populasi mangsa terbatas maka untuk populasi pemangsa akan menurun sesuai dengan jumlah proporsi mangsanya [4].

Perubahan fisiologis terkait pertumbuhan karena kehadiran predator, dan sebagai prey harus selalu waspada terhadap kemungkinan serangan dari predator disebut efek ketakutan [5]. Facco dkk. melakukan percobaan pada burung pipit (*Melospiza melodia*) selama masa perkembangbiakannya tanpa adanya predasi secara langsung dengan menggunakan pagar listrik dan menemukan bahwa terdapat 40% pengurangan jumlah keturunan karena resiko predasi [6]. Suraci dkk. juga melakukan percobaan memanipulasi ketakutan buatan terhadap karnivora (serigala, beruang hitam) pada mesokarnivora (rakun) dengan melakukan pengulangan selama sebulan dan menemukan bahwa rasa takut mempengaruhi perilaku mencari makan mesokarnivora (lebih rendah 66%) dan menguntungkan prey mesokarnivora [7].

Peranan matematika telah memberikan pengaruh yang sangat besar terhadap kemajuan pengetahuan dan teknologi. Model matematika termasuk salah satu bagian dari perkembangan tersebut. Hampir semua permasalahan di dunia nyata dapat digambarkan ke dalam model matematika, salah satunya adalah tentang model dinamis rantai makanan tiga spesies [8]. Model predator-prey pertama kali dikenalkan oleh Lotka pada tahun 1925 dan Voltera pada tahun 1926, sehingga model ini juga disebut model Lotka-Voltera. Namun model ini hanya melibatkan

predator dan prey sehat saja, sedangkan pada beberapa ekosistem terdapat populasi yang terinfeksi atau tidak sehat. Xiao dan Chen mengkaji model predator-prey dengan adanya prey yang terinfeksi, dengan spesies yang terinfeksi atau tidak sehat akan bersikap kurang aktif dan bisa ditangkap dengan lebih mudah oleh predator [9]. Lafferty dan Morris mengkaji model predator prey dengan adanya parasit. Parasit berfungsi untuk menularkan penyakit ke mangsa sehingga mangsa mudah ditangkap oleh predator [10].

Salah satu komponen yang dapat mempengaruhi model mangsa pemangsa adalah fungsi respon. Fungsi respon menggambarkan interaksi antara mangsa dan pemangsa yang dipengaruhi jumlah mangsa yang dikonsumsi oleh setiap pemangsa per satuan waktu [11]. Pada tahun 1989, Crowley dan Martin mengusulkan fungsi respon yang mirip dengan fungsi respon Beddington-DeAngelis, fungsi respon ini menjelaskan adanya gangguan timbal balik predator pada kepadatan mangsanya. Fungsi respon ini dapat dipandang sebagai modifikasi dari fungsi respon Beddington-DeAngelis [12].

Berdasarkan uraian di atas, maka penulis tertarik untuk mengkaji model matematika predator-prey Leslie Gower yang merujuk pada model yang ditulis oleh Ibarra dan Flores [13]. Pada penelitian ini, penulis memodifikasi fungsi respon Holling II menjadi fungsi respon Crowley Martin dan menambahkan populasi prey terinfeksi serta adanya efek ketakutan pada pertumbuhan prey rentan. Pada penelitian ini, akan dilakukan analisis kestabilan titik setimbang model matematika predator-prey Leslie Gower dengan fungsi respon Crowley Martin dan adanya populasi prey terinfeksi serta faktor ketakutan. Berdasarkan hasil analitik kemudian dilakukan simulasi numerik dan interpretasi hasil simulasi.

## 2 Model Matematika

Pada bagian ini disajikan hasil konstruksi model matematika predator-prey Leslie-Gower dengan fungsi respon Crowley Martin dan adanya populasi prey terinfeksi serta faktor ketakutan. Pada model ini populasi akan dibagi menjadi tiga variabel yaitu populasi prey rentan ( $x_1$ ), prey terinfeksi ( $x_2$ ), dan predator ( $y$ ). Berikut ini diberikan definisi dari masing-masing variabel dan parameter yang digunakan pada penelitian ini:

Tabel 1. Variabel Model

Variabel	Keterangan
$x_1(t)$	Jumlah populasi prey rentan pada saat t
$x_2(t)$	Jumlah populasi prey terinfeksi pada saat t
$y(t)$	Jumlah populasi predator pada saat t

Tabel 2. Deskripsi Parameter Model

Parameter	Keterangan	Satuan
$r$	Laju pertumbuhan intrinsik populasi prey rentan	$\frac{1}{\text{waktu}}$
$\gamma_1$	Besarnya faktor ketakutan prey rentan terhadap predator	$\frac{1}{\text{populasi}}$
$k$	Ukuran maksimum populasi prey rentan yang dapat didukung oleh lingkungan	populasi
$\beta$	Laju interaksi populasi prey rentan dengan prey terinfeksi	$\frac{1}{\text{populasi} \cdot \text{waktu}}$
$\alpha_1$	Laju interaksi prey rentan dengan predator	$\frac{1}{\text{populasi} \cdot \text{waktu}}$
$\alpha_2$	Laju interaksi prey terinfeksi dengan predator	$\frac{1}{\text{populasi} \cdot \text{waktu}}$
$a$	Waktu penanganan predator terhadap prey rentan	$\frac{1}{\text{populasi}}$
$b$	Besarnya gangguan predator terhadap prey rentan	$\frac{1}{\text{populasi}}$
$c$	Waktu penanganan predator terhadap prey terinfeksi	$\frac{1}{\text{populasi}}$
$d$	Besarnya gangguan predator terhadap prey terinfeksi	$\frac{1}{\text{populasi}}$
$\mu$	Kematian alami populasi	$\frac{1}{\text{waktu}}$
$s$	Laju pertumbuhan populasi predator	$\frac{1}{\text{waktu}}$
$\gamma_2$	Ukuran kuantitas mangsa sebagai makanan bagi predator	—

Selanjutnya untuk mempermudah penulisan, maka notasi  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  dan  $y(t)$  ditulis menjadi  $x_1$ ,  $x_2$ , dan  $y$ . Notasi tersebut menyatakan jumlah populasi pada saat  $t$ , sehingga:

$$x_1(0), x_2(0), y(0) \geq 0$$

Semua parameter tersebut diasumsikan bernilai positif, yaitu:

$$r, \gamma_1, K, \beta, \alpha_1, \alpha_2, a, b, c, d, \mu, s, \gamma_2 > 0$$

Adapun model matematikanya adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{rx_1}{1 + \gamma_1 y} \left(1 - \frac{x_1}{k}\right) - \beta x_1 x_2 - \frac{\alpha_1 x_1 y}{(1 + ax_1)(1 + by)} \\ \frac{dx_2}{dt} &= \beta x_1 x_2 - \frac{\alpha_2 x_2 y}{(1 + cx_2)(1 + dy)} - \mu x_2 \\ \frac{dy}{dt} &= sy \left(1 - \frac{y}{\gamma_2(x_1 + x_2)}\right) - \mu y \end{aligned} \quad (1)$$

### 3 Hasil dan Pembahasan

Pada bab ini dibahas keterbatasan solusi, titik setimbang dan analisis kestabilan titik setimbang model. Pertama-tama akan dikaji keterbatasan solusi model.

#### 3.1 Keterbatasan Solusi

Teorema 1: Semua solusi dari model predator prey (1) dengan nilai awal di  $R_+^3$  terbatas untuk semua  $t \geq 0$ .

Bukti: Misalkan  $(x_1(t), x_2(t), y(t))$  adalah solusi dari model (1). Karena

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{rx_1}{1 + \gamma_1 y} \left(1 - \frac{x_1}{k}\right) - \beta x_1 x_2 - \frac{\alpha_1 x_1 y}{(1 + ax_1)(1 + by)} \leq rx_1 \left(1 - \frac{x_1}{k}\right).$$

Maka diperoleh:

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = K.$$

Misalkan:  $W = x_1 + x_2 + y$ , then

$$\begin{aligned} \dot{W} &= \dot{x}_1 + \dot{x}_2 + \dot{y} \\ &= \frac{rx_1}{1 + \gamma_1 y} \left(1 - \frac{x_1}{k}\right) - \frac{\alpha_1 x_1 y}{(1 + ax_1)(1 + by)} - \frac{\alpha_2 x_2 y}{(1 + cx_2)(1 + dy)} - \mu x_2 \\ &\quad + sy \left(1 - \frac{y}{\gamma_2(x_1 + x_2)}\right) - \mu y \\ \dot{W} &\leq \frac{rx_1}{1 + \gamma_1 y} \left(1 - \frac{x_1}{k}\right) - \mu x_2 + sy - \mu y \leq rx_1 \left(2 - \frac{x_1}{k}\right) - rx_1 - \mu x_2 - (\mu - s)y, \end{aligned}$$

ambil  $\sigma = \min\{r, \mu, \mu - \delta\}$  dan diasumsikan  $\mu > \delta$ , maka diperoleh:

$$\dot{W} + \sigma W \leq 2k,$$

dengan menggunakan pertidaksamaan diferensial maka untuk semua  $t \geq 0$ , diperoleh:

$$0 \leq W(t) \leq \frac{2K}{\sigma} + \left(W(0) - \frac{2K}{\sigma}\right) e^{-\sigma t}.$$

Hal ini berarti untuk semua  $t \rightarrow \infty$  diperoleh:

$$0 \leq W(t) \leq \frac{2K}{\sigma}.$$

Sehingga diperoleh bahwa solusi model (1) terbatas dalam  $R_+^3$  untuk semua  $t \geq 0$ . ■

#### 3.2 Titik Setimbang Model

Keadaan setimbang adalah suatu kondisi ketika laju perubahan populasi sama dengan 0. Model matematika predator-prey Leslie-Gower dengan fungsi respon Crowley Martin dan adanya populasi prey terinfeksi serta faktor ketakutan, mempunyai titik setimbang jika:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dx_2}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0.$$

Sistem persamaan (1) mempunyai empat titik setimbang yaitu:

- a. Titik setimbang kepunahan prey terinfeksi dan predator yaitu  $E_1 = (k, 0, 0)$ .
- b. Titik setimbang kepunahan predator, yaitu  $E_2 = \left(\frac{\mu}{\beta}, \frac{r(\beta k - \mu)}{\beta^2 k}, 0\right)$ .  
Karena semua parameter bernilai positif, maka titik setimbang  $E_2$  ada jika  $\beta k > \mu$ .
- c. Titik setimbang kepunahan prey terinfeksi ( $E_3$ ) sulit ditentukan secara analitik. Oleh karena itu, analisis kestabilannya menggunakan bidang fase.
- d. Titik setimbang koeksistensi ( $E_4$ ) juga sulit ditentukan secara analitik. Oleh karena itu analisis kestabilan dari titik setimbang ini menggunakan bidang fase.

### 3.3 Analisis Kestabilan Titik Setimbang Model

Model predator-prey Leslie-Gower dengan fungsi respon Crowley Martin dan prey terinfeksi serta faktor ketakutan berbentuk sistem persamaan diferensial nonlinear autonomous. Oleh karena itu, analisis kestabilannya menggunakan pendekatan linearisasi disekitar titik setimbang. Adapun metode linearisasi menggunakan matriks Jacobian. Matriks Jacobian dari model (1) adalah:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{df_1}{dx_1} & \frac{df_1}{dx_2} & \frac{df_1}{dy} \\ \frac{df_2}{dx_1} & \frac{df_2}{dx_2} & \frac{df_2}{dy} \\ \frac{df_3}{dx_1} & \frac{df_3}{dx_2} & \frac{df_3}{dy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{pmatrix},$$

dengan

$$\begin{aligned} A &= \frac{r(1-\frac{x_1}{k})}{1+\gamma_1 y} - \frac{rx_1}{(1+\gamma_1 y)k} - \beta x_2 - \frac{\alpha_1 y}{(1+ax_1)(1+by)} + \frac{\alpha_1 x_1 ya}{(1+ax_1)(1+by)^2} \\ B &= -\beta x_1 \\ C &= -\frac{rx_1(1-\frac{x_1}{k})\gamma_1}{(1+\gamma_1 y)^2} - \frac{\alpha_1 x_1}{(1+ax_1)(1+by)} + \frac{\alpha_1 x_1 yb}{(1+ax_1)(1+by)^2} \\ D &= \beta x_2 \\ E &= \beta x_1 - \frac{\alpha_2 y}{(1+cx_2)(1+dy)} + \frac{\alpha_2 x_2 yc}{(1+cx_2)^2(1+dy)} - \mu \\ F &= -\frac{\alpha_2 x_2}{(1+cx_2)(1+dy)} + \frac{\alpha_2 x_2 yd}{(1+cx_2)(1+dy)^2} \\ G &= \frac{sy^2}{\gamma_2(x_1+x_2)^2} \\ H &= \frac{sy^2}{\gamma_2(x_1+x_2)^2} \\ I &= s \left(1 - \frac{y}{\gamma_2(x_1+x_2)}\right) - \frac{sy}{\gamma_2(x_1+x_2)} - \mu. \end{aligned}$$

### 3.3.1 Analisis Kestabilan pada Titik Setimbang Kepunahan Prey Terinfeksi dan Predator

*Teorema 1: Titik setimbang  $E_1$  stabil jika  $\beta k < \mu$  dan  $s < \mu$ .*

Bukti: Matrik Jacobian dari titik setimbang  $E_1(k, 0, 0)$  adalah:

$$J_{E_1} = \begin{pmatrix} -r & -\beta k & -\frac{\alpha_1 k}{1 + ak} \\ 0 & \beta k - \mu & 0 \\ 0 & 0 & s - \mu \end{pmatrix}$$

Berdasarkan matriks Jacobian ( $J(E_1)$ ) di atas diperoleh persamaan karakteristik, yaitu:

$$(\lambda + r_1)(\lambda - \beta k + \mu)(\lambda - s + \mu) = 0.$$

Hal ini berarti, nilai eigennya adalah  $\lambda_1 = -r$ ,  $\lambda_2 = \beta k - \mu$  dan  $\lambda_3 = s - \mu$ . Sehingga titik setimbang  $E_1$  stabil asimtotis jika:  $\beta k < \mu$  dan  $s < \mu$ . ■

### 3.3.2 Analisis Kestabilan pada Titik Setimbang Kepunahan Predator

Matrik Jacobian dari titik setimbang kepunahan predator ( $E_2$ ) adalah sebagai berikut:

$$J_{E_2} = \begin{pmatrix} r \left(1 - \frac{\mu}{k\beta}\right) - \frac{r\mu}{k\beta} - \frac{r(\beta k - \mu)}{k\beta} & -\mu & -\frac{r\mu\gamma_1(\beta k - \mu)}{\beta^2 k} - \frac{\alpha_1\mu\beta}{\beta(a\mu + \beta)} \\ \frac{r(\beta k - \mu)}{k\beta} & 0 & \frac{r\alpha_2(\beta k - \mu)}{cr(\beta k - \mu) + \beta^2 k} \\ 0 & 0 & s - \mu \end{pmatrix}$$

Berdasarkan matriks Jacobian ( $J_{E_2}$ ) di atas diperoleh persamaan karakteristik, yaitu:

$$(\lambda - s + \mu)(\beta k \lambda^2 + \mu r \lambda + \beta k \mu r - \mu^2 r) = 0 \quad (2)$$

dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz, titik setimbang kepunahan predator stabil asimtotis jika memenuhi syarat sebagai berikut:  $s < \mu$  dan  $\beta k > \mu$ .

## 4 Simulasi Numerik dan Interpretasi

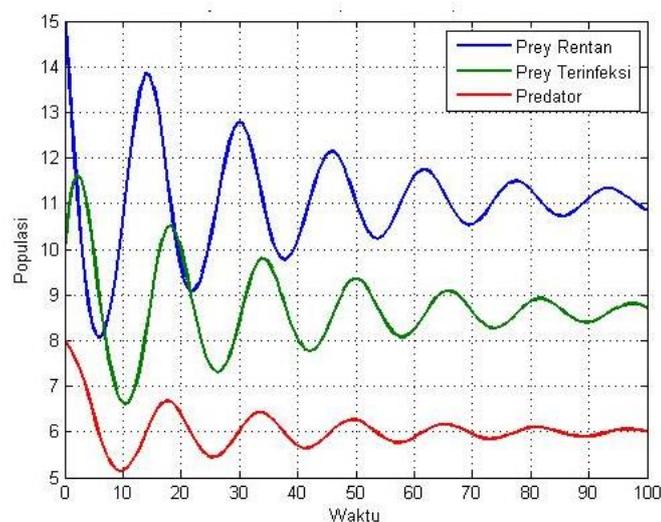
Pada sub bab ini dibahas mengenai simulasi numerik dan bidang fase dari hasil analitik. Pertama-tama dibahas simulasi numerik laju perubahan populasi terhadap waktu ( $t$ ). Nilai awal populasi adalah  $(x_1(0), x_2(0), y(0)) = (15, 10, 8)$  untuk  $t = 0$  sampai  $t = 100$  dalam satuan hari, sedangkan nilai parameter disajikan pada Tabel 3 sebagai berikut:

Tabel 3. Nilai Parameter Model

Parameter	Nilai	Sumber
$r$	0.95	Asumsi
$k$	100	Asumsi
$\beta$	0.035	Asumsi
$\alpha_1$	0.002	Asumsi
$\alpha_2$	0.04	Asumsi
$a$	0.008	Asumsi
$b$	0.2	Asumsi

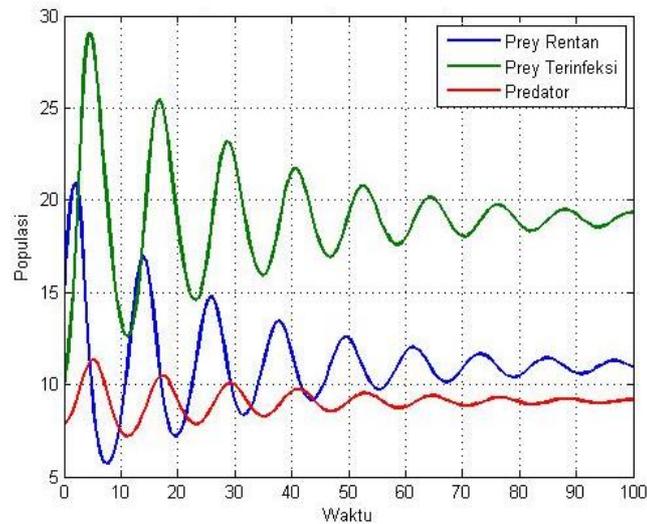
Parameter	Nilai	Sumber
$c$	0.8	Asumsi
$d$	0.005	Asumsi
$\mu$	0.38	Asumsi
$s$	0.85	Asumsi
$\gamma_1$	0.3	Asumsi
$\gamma_2$	0.55	Asumsi

Hasil simulasi numerik dinamika model predator-prey leslie-gower dengan fungsi respon Crowley Martin dan adanya prey terinfeksi serta faktor ketakutan disajikan pada Gambar 1 berikut ini:



**Gambar 1.** Laju Perubahan Populasi Terhadap Waktu

Gambar 1 di atas menunjukkan laju perubahan populasi terhadap waktu selama 100 hari. Berdasarkan gambar tersebut terlihat bahwa laju pertumbuhan populasi prey rentan dan prey terinfeksi pertumbuhannya tetap berada di atas laju pertumbuhan populasi predator. Hal ini disebabkan bahwa pertumbuhan predator, dipengaruhi oleh jumlah kepadatan populasi prey rentan dan prey terinfeksi dan penurunan populasi predator dikarenakan adanya kematian alami sebesar  $\mu$ . Laju pertumbuhan prey juga dipengaruhi oleh faktor ketakutan prey terhadap predator dan laju pertumbuhan predator juga dipengaruhi oleh kepadatan populasi prey. Gambar 2 di bawah ini menunjukkan faktor yang mempengaruhi laju pertumbuhan populasi dengan  $\gamma_1 = 0.03$ .



**Gambar 2.** Pengaruh  $\gamma_1$  Pada Perubahan Populasi Terhadap Waktu

Berdasarkan Gambar 2 di atas, terlihat bahwa predator lebih banyak dibandingkan dengan populasi prey. Hal ini disebabkan dengan semakin kecil faktor ketakutan ( $\gamma_1$ ), dapat menyebabkan pertumbuhan populasi prey rentan semakin membesar tetapi hal ini menyebabkan persaingan prey rentan semakin besar sehingga kematian populasi prey rentan juga membesar atau pertumbuhan populasi prey rentan semakin kecil. Pertumbuhan populasi prey rentan juga mempengaruhi populasi prey terinfeksi, yaitu dengan populasi prey rentan semakin kecil menyebabkan populasi prey terinfeksi juga semakin mengecil.

Gambar 3 di bawah ini menunjukkan simulasi numerik dari kestabilan titik setimbang kepunahan prey terinfeksi dan predator. Adapun nilai awal dan nilai parameter model disajikan pada Tabel 4 dan Tabel 5 di bawah ini.

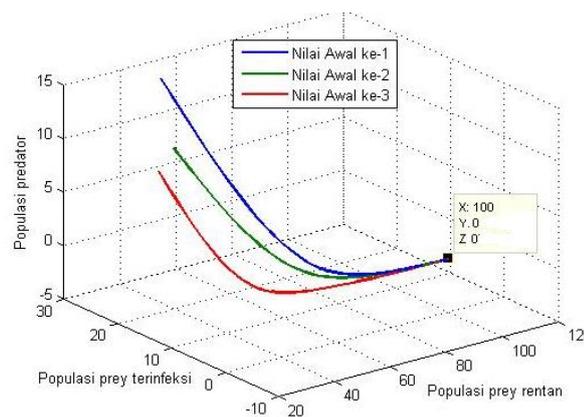
Tabel 4. Nilai Awal Populasi Model

Nilai Awal	$x_1$	$x_2$	$y$	Warna
1	45	25	15	Biru
2	40	20	10	Hijau
3	25	15	10	Merah

Tabel 5. Nilai Parameter Model

Parameter	Nilai	Sumber
$r$	0.5	Asumsi
$k$	100	Asumsi
$\beta$	0.0005	Asumsi
$\alpha_1$	0.5	Asumsi
$\alpha_2$	0.8	Asumsi
$a$	0.2	Asumsi
$b$	0.2	Asumsi
$c$	0.5	Asumsi
$d$	0.5	Asumsi
$\mu$	0.8	Asumsi
$s$	0.005	Asumsi
$\gamma_1$	0.3	Asumsi
$\gamma_2$	0.0225	Asumsi

Hasil dari simulasi numerik adalah sebagai berikut:



**Gambar 3.** Kestabilan titik setimbang kepunahan prey terinfeksi dan predator.

Pada Gambar 3 di atas, terlihat bahwa ketiga populasi menuju ke satu titik yaitu  $(100, 0, 0)$ . Hal ini berarti titik setimbang kepunahan prey terinfeksi dan predator stabil asimtotis. Karena analisis kestabilan menggunakan pendekatan linier disekitar titik setimbang, maka kestabilannya dinamakan kestabilan asimtotis secara lokal.

Selanjutnya ditunjukkan simulasi numerik dari kestabilan titik setimbang kepunahan populasi predator. Adapun nilai awal dan parameter model disajikan pada Tabel 6 dan Tabel 7 berikut ini.

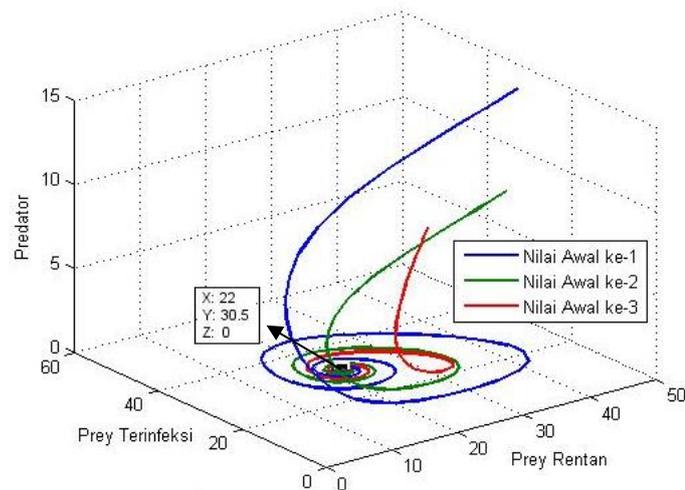
Tabel 6. Nilai Awal Populasi Model

Nilai Awal	$x_1$	$x_2$	$y$	Warna
1	45	25	15	Biru
2	40	20	10	Hijau
3	25	15	10	Merah

Tabel 7. Nilai Parameter Model

Parameter	Nilai	Sumber
$r$	0.98	Asumsi
$k$	100	Asumsi
$\beta$	0.025	Asumsi
$\alpha_1$	0.002	Asumsi
$\alpha_2$	0.001	Asumsi
$a$	0.8	Asumsi
$b$	0.2	Asumsi
$c$	0.8	Asumsi
$d$	0.65	Asumsi
$\mu$	0.55	Asumsi
$s$	0.15	Asumsi
$\gamma_1$	0.3	Asumsi
$\gamma_2$	0.5	Asumsi

Simulasi numerik dari kestabilan titik setimbang kepunahan predator ditunjukkan pada Gambar 4 di bawah ini.



**Gambar 4.** Kestabilan titik setimbang kepunahan *predator*.

Berdasarkan Gambar 4 di atas terlihat bahwa ketiga populasi cenderung menuju ke satu titik, yaitu titik  $E_2 = (22; 30.5; 0)$ , dengan kata lain titik setimbang kepunahan predator ( $E_2$ ) stabil asimtotis.

Gambar 5 di bawah ini menunjukkan kestabilan dari titik setimbang kepunahan populasi prey terinfeksi. Nilai awal dan parameter model disajikan pada Tabel 8 dan Tabel 9 berikut ini.

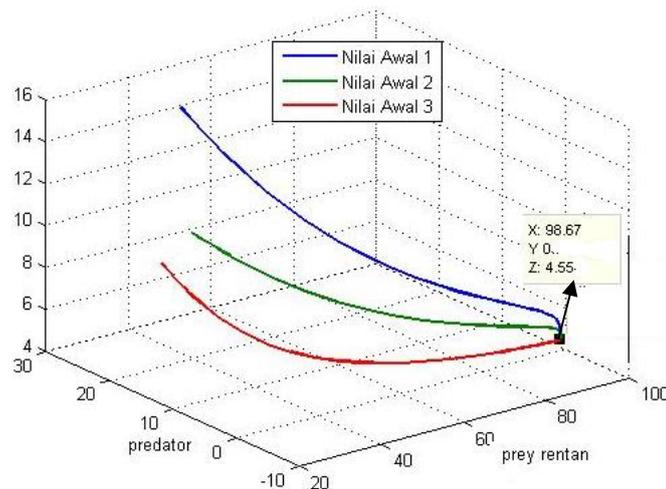
Tabel 8. Nilai Awal Populasi Model

Nilai Awal	$x_1$	$x_2$	$y$	Warna
1	45	25	15	Biru
2	40	20	10	Hijau
3	25	15	10	Merah

Tabel 9. Nilai Parameter Model

Parameter	Nilai	Sumber
$r$	0.65	Asumsi
$k$	100	Asumsi
$\beta$	0.001	Asumsi
$\alpha_1$	0.5	Asumsi
$\alpha_2$	0.4	Asumsi
$a$	0.8	Asumsi
$b$	0.6	Asumsi
$c$	0.56	Asumsi
$d$	0.45	Asumsi
$\mu$	0.55	Asumsi
$s$	0.65	Asumsi
$\gamma_1$	0.03	Asumsi
$\gamma_2$	0.3	Asumsi

Bidang fase dari kestabilan titik setimbang kepunahan predator ditunjukkan pada Gambar 5 di bawah ini.



**Gambar 5.** Kestabilan titik setimbang kepunahan prey

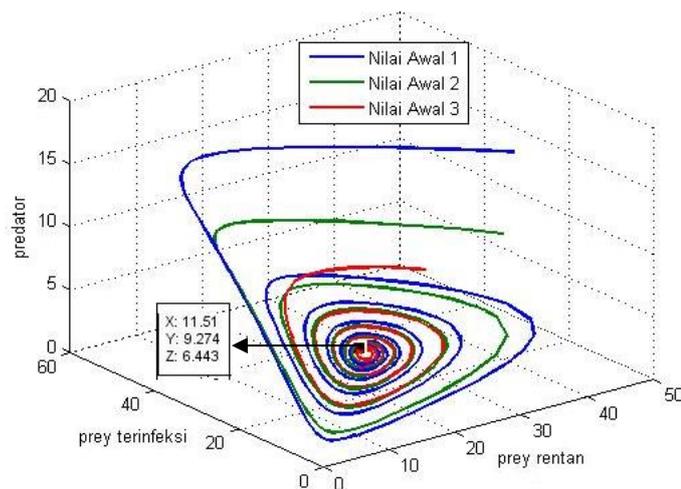
Berdasarkan Gambar 5 di atas terlihat bahwa ketiga populasi dengan nilai awal yang berbeda cenderung menuju ke satu titik, yaitu titik  $E_3 = (98.67; 0; 4.55)$ . Hal ini berarti solusi model konvergen ke titik  $E_3$  dengan kata lain titik setimbang kepunahan prey terinfeksi ( $E_3$ ) stabil asimtotis.

Berikut ini disajikan analisis kestabilan dari titik setimbang koeksistensi yang disajikan pada Gambar 6 di bawah ini. Adapun nilai awal seperti pada Tabel 8, sedangkan parameter model disajikan pada Tabel 10 berikut ini.

Tabel 10. Nilai Parameter Model

Parameter	Nilai	Sumber
$r$	0.95	Asumsi
$k$	100	Asumsi
$\beta$	0.035	Asumsi
$\alpha_1$	0.002	Asumsi
$\alpha_2$	0.04	Asumsi
$a$	0.008	Asumsi
$b$	0.2	Asumsi
$c$	0.8	Asumsi
$d$	0.005	Asumsi
$\mu$	0.38	Asumsi
$s$	0.85	Asumsi
$\gamma_1$	0.3	Asumsi
$\gamma_2$	0.55	Asumsi

Bidang fase dari kestabilan titik setimbang koeksistensi ditunjukkan pada Gambar 6 di bawah ini.



**Gambar 6.** Kestabilan titik setimbang koeksistensi

Berdasarkan Gambar 6 di atas terlihat bahwa ketiga populasi dengan nilai awal yang berbeda cenderung menuju ke satu titik, yaitu titik  $E_4 = (11.51; 9.93; 6.44)$ . Hal ini berarti solusi model konvergen ke titik  $E_4$  dengan kata lain titik setimbang koeksistensi ( $E_4$ ) cenderung stabil asimtotis secara local.

## 5 Simpulan

Berdasarkan hasil yang diperoleh dari pembahasan dan simulasi numerik, maka penelitian ini disimpulkan sebagai berikut:

1. Dinamika model predator-prey Leslie-Gower dengan fungsi respon Crowley Martin dan adanya prey terinfeksi serta faktor ketakutan memiliki empat titik setimbang, yaitu titik setimbang kepunahan populasi prey terinfeksi dan predator ( $E_1$ ), titik setimbang kepunahan populasi predator ( $E_2$ ) yang eksis jika  $\beta k > \mu$ , titik setimbang kepunahan prey terinfeksi ( $E_3$ ) dan titik setimbang koeksistensi ( $E_4$ ). Titik setimbang  $E_1$  cenderung stabil asimtotis jika  $\beta k < \mu$  dan  $s < \mu$ . Titik setimbang  $E_2$  cenderung stabil asimtotis jika  $s < \mu$  dan  $\beta k > \mu$ . Sedangkan titik setimbang  $E_3$  dan  $E_4$  tidak diperoleh secara analitik. Oleh karena itu analisis kestabilannya menggunakan bidang fase. Secara bidang fase kedua titik setimbang tersebut, yaitu  $E_3$  dan  $E_4$  cenderung stabil asimtotis. Dari hasil simulasi numerik juga diperoleh pengaruh faktor ketakutan, yaitu semakin kecil faktor ketakutan ( $\gamma_1$ ), dapat menyebabkan pertumbuhan populasi prey rentan semakin membesar tetapi hal ini menyebabkan persaingan prey rentan semakin besar sehingga pertumbuhan populasi prey rentan semakin kecil.
2. Hasil simulasi numerik dinamika model predator-prey Leslie-Gower dengan fungsi respon Crowley Martin dan adanya prey terinfeksi serta faktor ketakutan menunjukkan bahwa pertumbuhan populasi prey rentan mengalami kenaikan disebabkan karena adanya laju pertumbuhan secara logistik dan mengalami penurunan akibat adanya interaksi terhadap predator dan prey terinfeksi. Prey terinfeksi mengalami penurunan karena adanya laju penularan prey rentan menjadi prey terinfeksi dan menderita penyakit terinfeksi yang menyebabkan kematian. Pada populasi predator kenaikan karena adanya laju pertumbuhannya secara logistik yang dipengaruhi oleh kepadatan populasi prey rentan dan prey terinfeksi dan mengalami penurunan dikarenakan adanya kematian alami predator. Berdasarkan hasil simulasi numerik juga diperoleh bahwa keempat titik setimbang cenderung stabil asimtotis.

## 6 Ucapan Terima Kasih

Ucapan terima kasih ditujukan kepada Departemen Matematika Fakultas Sains dan Teknologi yang telah memberikan fasilitas Laboratorium Komputer untuk penelitian ini, sehingga penelitian dapat berjalan dengan baik.

## 7 Daftar Pustaka

- [1] I. Setiawan, D. Supyandi, S. Rasiska, and M. G. Judawinata, *Pertanian Postmodern*. Penebar Swadaya Grup, 2018.
- [2] M. Indrawan, R. B. Primack, and J. Supriatna, *Biologi Konservasi Edisi Revisi*. Yayasan Pustaka Obor Indonesia, 2012.

- 
- [3] H. Purnomo, *Pengantar Pengendalian Hayati*. Yogyakarta: CV Andi Offset, 2010.
- [4] M. Soleh and S. Kholipah, "Model matematika mangsa-pemangsa dengan sebagian mangsa sakit," *SITEKIN: Jurnal Sains Teknologi dan industri*, vol. 10, no. 2, 2013.
- [5] P. Samui, D. Kim, and C. Ghosh, Eds., *Integrating Disaster Science and Management Global Case Studies in Mitigation and Recovery*, 1st edition. Elsevier, 2018.
- [6] E. Facco, G. Zanette, L. Favero, and C. Bacci, "Toward the Validation of Visual Analogue Scale for Anxiety," *Anesth Prog*, vol. 58, no. 1, 2011.
- [7] J. P. Suraci, M. Clinchy, L. Dill, and D. Roberts, "Fear of large carnivores causes a trophic cascade," *Nat Commun*, vol. 7, no. 1, 2016.
- [8] W. B. Pratikno and S. Sunarsih, "Model dinamis rantai makanan tiga spesies," *Jurnal Matematika*, vol. 13, no. 3, 2012.
- [9] Y. Xiao and L. Chen, "Modeling and analysis of a predator–prey model with disease in the prey," *Math Biosci*, vol. 171, no. 1, pp. 59–82, May 2001, doi: 10.1016/S0025-5564(01)00049-9.
- [10] K. D. Lafferty and A. K. Morris, "Altered Behavior of Parasitized Killifish Increases Susceptibility to Predation by Bird Final Hosts," *Ecology*, vol. 77, no. 5, pp. 1390–1397, Jul. 1996.
- [11] S. Chakraborty, S. Pal, and N. Bairagi, "Predator–prey interaction with harvesting: mathematical study with biological ramifications," *Appl Math Model*, vol. 36, no. 9, 2012.
- [12] P. H. Crowley and E. K. Martin, "Functional Responses and Interference within and between Year Classes of a Dragonfly Population," *J North Am Benthol Soc*, vol. 8, pp. 211–221, 1989.
- [13] C. Arancibia–Ibarra and J. Flores, "Dynamics of a Leslie–Gower predator–prey model with Holling type II functional response, Allee effect and a generalist predator," *Mathematics and Computers in Simulation (MATCOM)*, vol. 188, no. C, pp. 1–22, 2021, doi: DOI: 10.1016/j.matcom.2021.03.