Limits: Journal of Mathematics and Its Applications
E-ISSN: 2579-8936
P-ISSN: 1829-605X
Vol. 21, No. 1, Maret 2024, 95-102
DOI: http://dx.doi.org/10.12962/limits.v21i1.18986

Ideal Urutan pada Jumlah Langsung Leksikografik Grup Abel $\mathbb{R} \oplus_{lex} \mathbb{Z}$ dan $\mathbb{Z} \oplus_{lex} \mathbb{R}$

Eneng Riska Nuraeni[1], Imam Nugraha Albania*[2], Rizky Rosjanuardi[3], Sumanang Muhtar Gozali[4]
Jl. Dr. Setiabudhi No 229 Bandung 40154
[1,2,3,4] Program Studi Matematika FPMIPA Universitas Pendidikan Indonesia Bandung
e-mail: albania@upi.edu

Diajukan: 27 September 2023, Diperbaiki: 8 Januari 2024, Diterima: 23 Februari 2024

Abstrak

Misalkan $\Gamma_1 = \mathbb{R} \oplus_{lex} \mathbb{Z}$ dan $\Gamma_2 = \mathbb{Z} \oplus_{lex} \mathbb{R}$ adalah grup abel terurut total. Bentuk umum setiap subgrup dari Γ_1 adalah $G \oplus_{lex} n\mathbb{Z}$, sedangkan bentuk umum subgrup dari Γ_2 adalah $n\mathbb{Z} \oplus_{lex} G$ dengan $G \leq \mathbb{R}$ dan $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Tujuan dari paper ini adalah memperoleh gambaran mengenai ideal urutan tak trivial dari Γ_1 dan Γ_2. Metode yang digunakan yaitu diawali dengan menentukan subgrup-subgrup dari $\mathbb{R}$ dan $\mathbb{Z}$, kemudian menjumlahkan langsung subgrup-subgrup dari $\mathbb{R}$ dan $\mathbb{Z}$ tersebut. Hasil jumlah langsung tersebut merupakan subgrup-subgrup tak trivial dari Γ_1 dan Γ_2. Selanjutnya dilakukan uji sifat pengawetan urutan dari setiap bentuk subgrup tak trivial dari Γ_1 dan Γ_2 tersebut. Dari metode tersebut diperoleh hasil bahwa satu-satunya ideal urutan tak trivial dari Γ_1 adalah subgrup $\{0\} \oplus_{lex} \mathbb{Z}$ dan satu-satunya ideal urutan yang tak trivial dari Γ_2 adalah subgrup $\{0\} \oplus_{lex} \mathbb{R}$ meskipun setiap subgrup tak trivial dari $\mathbb{R}$ dan $\mathbb{Z}$ masing-masing tidak memiliki sifat pengawetan urutan. Kesimpulan pada paper ini adalah satu-satunya ideal urutan tak trivial pada $\mathbb{R} \oplus_{lex} \mathbb{Z}$ adalah $\{0\} \oplus_{lex} \mathbb{Z}$ yang isomorfik dengan $\mathbb{Z}$ sebagai grup, sedangkan satu-satunya ideal urutan tak trivial pada $\mathbb{Z} \oplus_{lex} \mathbb{R}$ adalah $\{0\} \oplus_{lex} \mathbb{R}$ yang isomorfik dengan $\mathbb{R}$ sebagai grup.

Kata Kunci: ideal urutan, subgrup, grup abel, urutan total, jumlah langsung leksikografik.

Abstract

Let $\Gamma_1 = \mathbb{R} \oplus_{lex} \mathbb{Z}$ and $\Gamma_2 = \mathbb{Z} \oplus_{lex} \mathbb{R}$ be totally ordered abelian group. The general subgroup form of Γ_1 is $G \oplus_{lex} n\mathbb{Z}$, while the general subgroup form of Γ_2 is $n\mathbb{Z} \oplus_{lex} G$ with $G \leq \mathbb{R}$ and $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. The aims is to get the description of tak trivial order ideal from Γ_1 and Γ_2. The method in this study is by constructing subgroups of $\mathbb{R}$ and $\mathbb{Z}$, then summing it directly. The results are that the direct sums are tak trivial subgroups of Γ_1 and Γ_2. Next, we examine order preserving properties on every single tak trivial subgroup of Γ_1 and Γ_2. By this method, we get that the only non-trivial order ideal of Γ_1 and Γ_2 are $\{0\} \oplus_{lex} \mathbb{Z}$ and $\{0\} \oplus_{lex} \mathbb{R}$ respectively, even every non-trivial subgroup of $\mathbb{R}$ and $\mathbb{Z}$ did not preserve ordering. The conclusion of this paper is the only non-trivial order ideal on $\mathbb{R} \oplus_{lex} \mathbb{Z}$ is $\{0\} \oplus_{lex} \mathbb{Z}$ which is isomorphic to $\mathbb{Z}$ as a group, while the only non-trivial order ideal $\mathbb{Z} \oplus_{lex} \mathbb{R}$ is $\{0\} \oplus_{lex} \mathbb{R}$ which is isomorphic to $\mathbb{R}$ as a group.

***Keywords**: order ideal, subgroup, totally ordereing, abelian groups, lexicographic direct sums.*

1 Pendahuluan

Kajian grup terurut dalam matematika, khususnya yang berkaitan dengan grup abel terurut dan lapangan terurut mengalami perkembangan signifikan melalui berbagai penelitian dan terapannya. Grup terurut dalam banyak aspek matematika teoretis memperlihatkan konsep-konsep yang dapat diterapkan dalam berbagai situasi praktis. Misalnya, memahami aritmetika interval dan kalkulus dalam kerangka kerja lapangan dan grup abel padat terurut [1]. Sementara dalam [2] mendiskusikan hubungan antara aljabar-MV dan grup terurut siklis secara parsial yang secara khusus berfokus pada grup terurut latis, yang membuka jalan untuk eksplorasi lebih lanjut dalam teori keputusan dan logika fuzzy, di mana struktur seperti aljabar-MV berperan penting. Sedangakan dalam [3], dibahas bagaimana aksioma untuk grup abel terurut terpotong diturunkan dengan memodifikasi operasi penjumlahan yang mana aksioma ini menjadi segmen awal dari suatu grup abel terurut. Di lain pihak, kajian urutan leksikografik dalam matematika memainkan peran yang penting dalam berbagai terapan, seperti penggunaan urutan leksikografik dalam konteks basis Gröbner [4] dan *data mining* [5]. Begitu juga konsep ideal urutan yang banyak menarik minat peneliti, misalnya, ideal urutan digunakan dalam mengkarakterisasi lapangan dari latis vektor dengan fokus pada hasil peta ortomorfisma dari latis-latis tersebut [6], masalah syzygy (yakni hubungan antar generator dari suatu modul atas ring) [7], hasil kali tensor ideal urutan [8] dan konsep kombinatorial dari ideal urutan dalam himpunan terurut parsial [9].

Misalkan G adalah grup abel di bawah operasi penjumlahan yang mengawetkan urutan di bawah operasi penjumlahan (compatibility law) [10], yaitu jika $a \leq b$ maka $c + a \leq c + b$ dan $a + c \leq b + c$ untuk semua $c \in G$, maka G disebut grup abel yang terurut total, contohnya adalah grup bilangan riil $\mathbb{R}$ dengan operasi penjumlahan dengan urutan biasa "kurang dari atau sama dengan" ("≤"). Misalkan $(A, \leq_A)$ dan $(B, \leq_B)$ adalah grup terurut, relasi $\leq_{lex}$ pada $A \times B$ disebut urutan leksikografi dengan definisi $(a, b) \leq_{lex} (x, y)$ jika dan hanya jika salah satu dari pernyataan berikut dipenuhi:

i. $a <_A x$,
ii. $a = x$ dan $b \leq_B y$.

Contoh grup abel yang terurut total oleh urutan leksikografik adalah jumlah langsung dari grup bilangan bulat yang dinotasikan dengan $\mathbb{Z} \oplus_{lex} \mathbb{Z}$ di mana anggotanya adalah pasangan terurut (m, n) dengan $m, n \in \mathbb{Z}$. *Positive cone* dari $\mathbb{Z} \oplus_{lex} \mathbb{Z}$ dinotasikan dengan $(\mathbb{Z} \oplus_{lex} \mathbb{Z})^+$ yaitu himpunan $\{(c, d) | c > 0\} \cup \{(c, d) | c = 0 \text{ dan } d \geq 0\}$.

Misalkan $(\Gamma, \leq)$ adalah grup abel terurut total dan I adalah subgrup dari Γ. jika $x \in \Gamma^+$ dan $y \in I^+$ dengan $x \leq y$, berlaku $x \in I$, maka I disebut ideal urutan [11], [12], [13]. Dalam [14] ditunjukkan bahwa ideal urutan tak trivial satu-satunya dari $\mathbb{Z} \oplus_{lex} \mathbb{Z}$ adalah $I = \{(0, n) | n \in \mathbb{Z}\}$.

Perhatikan grup abel terurut total $\Gamma_1 = \mathbb{R} \oplus_{lex} \mathbb{Z}$ dan $\Gamma_2 = \mathbb{Z} \oplus_{lex} \mathbb{R}$. Dalam artikel ini Γ_1 dan Γ_2 tidak secara trivial analog, dalam kasus ideal urutan, suku pertama menjadi signifikan, dalam kasus ini, $\mathbb{R}$ adalah padat yang secara alamiah berbeda dari $\mathbb{Z}$ yang diskrit. Di lain pihak karakteristik dari subgrup $\mathbb{Z}$ secara klasik sudah dipahami sedangkan untuk $\mathbb{R}$ karakterisasi subgrupnya berbeda. Akan dikaji apakah Γ_1 dan Γ_2 memiliki ideal urutan non trivial seperti $\mathbb{Z} \oplus_{lex} \mathbb{Z}$. Grup $\mathbb{Z}$ dan $\mathbb{R}$ tidak memiliki ideal urutan tak trivial karena untuk setiap $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, subgrup $n\mathbb{Z}$ dari $\mathbb{Z}$ tidak mengawetkan urutan, sehingga ideal urutan dari $\mathbb{Z}$ hanyalah $\{0\}$ dan $\mathbb{Z}$ itu sendiri. Hasil yang sama diperoleh untuk grup abel terurut total $\mathbb{R}$, yaitu setiap subgrup dari $\mathbb{R}$ adalah subhimpunan padat di $\mathbb{R}$ atau subgrup siklik [15], di mana subgrup-subgrup tersebut tidak mengawetkan urutan.

2 Metode Penelitian

Ideal urutan pada grup $\mathbb{Z}$ dan $\mathbb{R}$ dapat diperoleh dengan meninjau sifat pengawetan urutan pada setiap subgrupnya. Diperoleh bahwa sifat tersebut tidak terpenuhi oleh subgrup-subgrup non-trivialnya sehingga ideal urutan dari grup $\mathbb{Z}$ hanya $\{0\}$ dan $\mathbb{Z}$ itu sendiri ($\{0\}$ dan $\mathbb{R}$ ideal urutan dari grup $\mathbb{R}$). Selanjutnya mengkonstruksi grup abel terurut total $\Gamma_1 = \mathbb{R} \oplus_{lex} \mathbb{Z}$ dan $\Gamma_2 = \mathbb{Z} \oplus_{lex} \mathbb{R}$. Berdasarkan contoh kasus ideal urutan dari grup abel terurut total $\mathbb{Z} \oplus_{lex} \mathbb{Z}$ [14], serta meninjau sifat pengawetan urutan pada setiap subgrup dari Γ_1 dan Γ_2 menggunakan pendekatan yang sama seperti pada grup $\mathbb{Z}$ dan $\mathbb{R}$ dapat diperoleh gambaran mengenai ideal urutan yang tak trivial dari Γ_1 dan Γ_2.

3 Hasil dan Pembahasan

Menentukan ideal urutan pada $\mathbb{R} \oplus_{lex} \mathbb{Z}$ dan $\mathbb{Z} \oplus_{lex} \mathbb{R}$ diawali dengan menentukan ideal urutan pada grup $\mathbb{R}$ dan $\mathbb{Z}$. Ideal urutan dari grup $\mathbb{R}$ dan $\mathbb{Z}$ dapat ditentukan dari hasil mengidentifikasi dan meninjau sifat pengawetan urutan pada setiap subgrupnya.

3.1. Ideal urutan dari $\mathbb{R}$

Setiap subgrup G dari grup terurut total $\mathbb{R}$ secara umum memenuhi salah satu kondisi: G adalah subhimpunan padat di $\mathbb{R}$ atau G adalah subgrup siklik dari $\mathbb{R}$ [15]. Kita akan memanfaatkan Teorema ini untuk membuktikan Lema berikut.

Lema 1 *Semua subgrup tak trivial dari* $(\mathbb{R}, +, \leq)$ *bukanlah ideal urutan.*

Bukti Subgrup tak trivial G dari $\mathbb{R}$ adalah subhimpunan padat atau siklik [15]. Jika G padat, maka berdasarkan sifat kepadatan dapat dipilih $a \in \mathbb{R}\backslash G$ dan $b \in G^+$ dengan $0 < a < b$. Hal ini berarti G tidak mengawetkan urutan. Akibatnya, G bukan ideal urutan. Jika G siklik, maka $G = \langle x \rangle$ untuk suatu $x \in \mathbb{R}$. Dengan kata lain $G = \{xn |\ n \in \mathbb{Z}\} = x\mathbb{Z}$. Jika x adalah bilangan rasional yang tidak sama dengan 0 atau ±1, maka $x\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Pilih $0 < b \in x\mathbb{Z}$. Berdasarkan sifat kepadatan bilangan irrasional, maka terdapat $a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ sedemikian sehingga $0 < a < b$. Karena $a \notin \mathbb{Q}$, maka $a \notin x\mathbb{Z}$.

Ini berarti $x\mathbb{Z}$ tidak mengawetkan urutan. Akibatnya, $x\mathbb{Z} = G$ bukan ideal urutan dari $\mathbb{R}$. Jika $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ maka $x\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Pilih $0 < d \in x\mathbb{Z}$. Berdasarkan sifat kepadatan bilangan rasional, maka terdapat $c \in \mathbb{Q}$ sedemikian sehingga $0 < c < d$. Karena $c \notin \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, maka $c \notin x\mathbb{Z}$. Hal ini berarti, $x\mathbb{Z}$ tidak mengawetkan urutan. Akibatnya, $G = x\mathbb{Z}$ bukan ideal urutan dari $\mathbb{R}$.

Contoh 2 Misalkan $S_\alpha = \{a + b\alpha \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ untuk sembarang $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Jelas bahwa S_α adalah subgrup dari $\mathbb{R}$. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa S_α adalah padat. Andaikan S_α adalah siklik, maka $S_\alpha = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha = \mathbb{Z}\beta$ untuk suatu $0 \neq \beta \in \mathbb{R}$. Sehingga, diperoleh $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}\beta$ dan $\mathbb{Z}\alpha \subseteq \mathbb{Z}\beta$. Akibatnya, $1 = n\beta$ dan $\alpha = m\beta$, untuk suatu $0 \neq n, m \in \mathbb{Z}$. Sehingga, dapat diperoleh $\beta = \frac{1}{n}$ dan $\alpha = m\beta = m\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$. Hal ini kontradiksi dengan $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, sebagai akibatnya S_α adalah padat. Berdasarkan Lema 1, dapat dipilih $x \notin S_\alpha$ dan elemen tak nol $a + b\alpha \in S_\alpha$ sedemikian sehingga $0 < x < a + b\alpha$. Ini berarti S_α tidak mengawetkan urutan, yakni bukan ideal urutan.

3.2 Subgrup dari $\mathbb{R} \oplus \mathbb{Z}$

Selanjutnya Γ_1 akan ditinjau sebagai grup terurut dengan urutan leksikografik. Subgrup-subgrup dari Γ_1 memiliki bentuk $J = G \oplus H$ di mana G adalah subgrup dari $\mathbb{R}$ dan $H = n\mathbb{Z}$ untuk suatu $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Subgrup-subgrup tak trivial dari $\Gamma_1 = \mathbb{R} \oplus_{lex} \mathbb{Z}$ adalah $I_1 = \{0\} \oplus_{lex} \mathbb{Z}$, $I_2 = \{0\} \oplus_{lex} n\mathbb{Z}$, $I_3 = \mathbb{R} \oplus_{lex} \{0\}$, $I_4 = \mathbb{R} \oplus_{lex} n\mathbb{Z}$ di mana $n \in \mathbb{N}$ dengan $n \neq 1$, $I_5 = G \oplus_{lex} \{0\}$, $I_6 = G \oplus_{lex} \mathbb{Z}$, dan $I_7 = G \oplus_{lex} n\mathbb{Z}$, di mana $n \in \mathbb{N}$ dengan $n \neq 1$ dan G adalah subgrup padat di $\mathbb{R}$ atau subgrup siklik.

Lema 3 *Himpunan $I_1 = \{0\} \oplus_{lex} \mathbb{Z}$ adalah ideal urutan dari $\Gamma_1 = \mathbb{R} \oplus_{lex} \mathbb{Z}$.*

Bukti I_1 subgrup dari Γ_1. Selanjutnya, akan ditinjau sifat pengawetan urutan pada I_1. Jika $(a, b) \in \Gamma_1^+$dan $(0, m) \in I_1^+$ dengan $(0,0) \leq (a, b) \leq (0, m)$, artinya $a = 0$ dan $b \leq m$. Dengan kata lain, $(a, b) = (0, b)$, maka $(a, b) \in I_1$. Oleh karena itu, I_1 mengawetkan urutan. Karena I_1 subgrup dari Γ_1 dan mengawetkan urutan, maka I_1 adalah ideal urutan dari Γ_1.

Berbeda dengan I_1, himpunan I_2, I_3, I_4, I_5, I_6 dan I_7 bukanlah ideal urutan. Perhatikan contoh di bawah ini.

Contoh 4 Misalkan $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$. Pada himpunan $I_2 = 0 \oplus_{lex} n\mathbb{Z}$, $I_3 = \mathbb{R} \oplus_{lex} \{0\}$ dan $I_4 = \mathbb{R} \oplus_{lex} n\mathbb{Z}$ dapat dipilih pasangan-pasangan terurut yang menunjukkan bahwa I_2, I_3, dan I_4 tidak mengawetkan urutan. Misalkan $x \in \mathbb{R}$, pilih $(x, n-1) \in \Gamma_1^+$ dan $(0, n) \in I_2^+$, perhatikan bahwa $(0,0) < (x, n-1) < (0, n)$. Diperoleh $(x, n-1) = (0, n-1)$. Tetapi, $(n-1) \notin n\mathbb{Z}$ sehingga $(0, n-1) \notin I_2$. Jika dipilih $(x, n-1) \in \Gamma_1^+$ dan $(x, n) \in I_4^+$, perhatikan bahwa $(0,0) < (x, n-1) < (x, n)$. Tetapi, $(n-1) \notin n\mathbb{Z}$ sehingga $(x, n-1) \notin I_4$. Jika dipilih $\left(1, \frac{2}{3}\right) \in \Gamma_1^+$ dan $(2,0) \in$

I_3^+ memenuhi $(0,0) < \left(1, \frac{2}{3}\right) < (2,0)$ tetapi $\left(1, \frac{2}{3}\right) \notin I_3$. Hal ini menunjukkan bahwa I_2, I_3 dan I_4 tidak mengawetkan urutan sehingga bukanlah ideal urutan dari Γ_1. Berdasarkan Lema 2, subgrup G tidak mengawetkan urutan, sehingga $G \oplus_{lex} \{0\}$ juga tidak mengawetkan urutan. Akibatnya, $I_5 = G \oplus_{lex} \{0\}$ bukan ideal urutan dari Γ_1. Perhatikan subgrup I_6 dan I_7 komponen pertamanya adalah elemen-elemen dari subgrup $\{0\} \subset G \subset \mathbb{R}$ dan komponen keduanya adalah $n\mathbb{Z}$ di mana $n \in \mathbb{N}$. Oleh karena itu, untuk meninjau apakah subgrup-subgrup I_6, dan I_7 adalah ideal urutan atau bukan, dapat menggunakan Lema 2 artinya selalu dapat dipilih $(x, 0) \in \Gamma_1^+$ dan $(y, 0) \in I_6^+$ yang memenuhi $(0,0) < (x, 0) < (y, 0)$ tetapi $x \notin I_6^+$(berlaku juga untuk I_7^+). Hal ini menunjukkan bahwa I_6 dan I_7 tidak mengawetkan urutan sehingga bukan ideal urutan dari Γ_1.

Diperoleh bahwa subgrup tak trivial yang merupakan ideal urutan dari Γ_1 hanyalah $I_1 = \{0\} \oplus_{lex} \mathbb{Z} = \{(0, n) | n \in \mathbb{Z}\}$. Teorema di bawah ini menjamin bahwa ideal tak trivial dari Γ_1 hanyalah I_1.

Berdasarkan Contoh 4 dan Lema 3 diperoleh bahwa I_1 adalah satu-satunya ideal urutan dari Γ_1. Dengan demikian kita peroleh Teorema berikut.

Teorema 5 *Ideal urutan tak trivial dari* $\Gamma_1 = \mathbb{R} \oplus_{lex} \mathbb{Z}$ *hanyalah* $I_1 = \{0\} \oplus_{lex} \mathbb{Z} = \{(0, n) | n \in \mathbb{Z}\}$.

3.3 Grup Abel Terurut Total $\mathbb{Z} \oplus_{lex} \mathbb{R}$

Positive cone dari $\Gamma_2 = \mathbb{Z} \oplus_{lex} \mathbb{R}$ adalah $\Gamma_2^+ = \{(c, d) | c > 0 \text{ atau } c = 0 \text{ dan } d \geq 0\}$. Dengan menggunakan metode yang sama dengan kasus Γ_1, diperoleh

Lema 6 [11] *Semua subgrup tak trivial dari* $(\mathbb{Z}, +, \leq)$ *bukanlah ideal urutan.*

Lema 7 *Subgrup* $I_1 = \{0\} \oplus_{lex} \mathbb{R} = \{(0, x) | x \in \mathbb{R}\}$ *adalah ideal urutan tak trivial dari grup abel terurut total* $\Gamma_2 = \mathbb{Z} \oplus_{lex} \mathbb{R}$.

Bukti Perhatikan bahwa I_1 adalah subgrup tak trivial dari Γ_2. Selanjutnya, misalkan $(m, a) \in \Gamma_2^+$ dan $(0, x) \in I_1^+$ dengan $(0,0) \leq (m, a) \leq (0, x)$, artinya $m = 0$ dan $a \leq x$. Sehingga $(m, a) = (0, a)$ di mana $a \in \mathbb{R}$ sehingga $(0, a) \in I$. Jadi, I_1 adalah ideal urutan tak trivial dari Γ_2.

Diperoleh bahwa hanya $I_1 = \{(0, x) | x \in \mathbb{R}\}$ yang merupakan ideal urutan tak trivial dari Γ_2. Akan dibuktikan bahwa Γ_2 hanya memiliki satu ideal urutan tak trivial yaitu I_1 menggunakan teorema berikut ini.

Teorema 8 *Ideal urutan tak trivial dari* $\Gamma_2 = \mathbb{Z} \oplus_{lex} \mathbb{R}$ *hanyalah* $I_1 = \{0\} \oplus_{lex} \mathbb{R} = \{(0, x) | x \in \mathbb{R}\}$.

Bukti Bentuk ideal urutan tak trivial untuk grup terurut total Γ_2 adalah subgrup-subgrup tak trivial berikut: $I_1 = \{0\} \oplus_{lex} \mathbb{R} = \{(0,x) | x \in \mathbb{R}\}$; $I_2 = \{0\} \oplus_{lex} G = \{(0,y) | y \in G\}$ dengan $\{0\} \neq G < \mathbb{R}$ subhimpunan padat di $\mathbb{R}$ atau subgrup siklik; $I_3 = \mathbb{Z} \oplus_{lex} \{0\} = \{(m,0) | m \in \mathbb{R}\}$; $I_4 = \mathbb{Z} \oplus_{lex} G = \{(m,0) | m \in \mathbb{R}\}$, dengan $\{0\} \subset G < \mathbb{R}$ subhimpunan padat di $\mathbb{R}$ atau subgrup siklik; misalkan $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, definisikan $I_5 = n\mathbb{Z} \oplus_{lex} \{0\} = \{(nk,0) | k \in \mathbb{Z}\}$; misalkan $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, definisikan $I_6 = n\mathbb{Z} \oplus_{lex} \mathbb{R} = \{(nk,a) | k \in \mathbb{Z},\ a \in \mathbb{R}\}$; misalkan $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, definisikan $I_7 = n\mathbb{Z} \oplus_{lex} G = \{(nk,b) | k \in \mathbb{Z}\ dan\ b \in G\}$ dengan $\{0\} \neq G < \mathbb{R}$ subhimpunan padat di $\mathbb{R}$ atau subgrup siklik. Dari Lema 1 diperoleh bahwa setiap subgrup tak trivial G dari $\mathbb{R}$ tidak mengawetkan urutan, sehingga terdapat $0 < x \in \mathbb{R}$ dan $0 < y \in G$ dengan $0 < x < y$ tetapi $x \notin G$. Dari sini dapat dipilih $(0,x) \in \Gamma_2^+$ dan $(0,y) \in I_2^+$ dengan $(0,0) < (0,x) < (0,y)$. Karena $x \notin G$, maka $(0,x) \notin I_2$. Misalkan $m \in \mathbb{Z}$, pilih $(m,x) \in \Gamma_2^+$ dan $(m,y) \in I_4^+$ dengan $(0,0) < (m,x) < (m,y)$. Karena $x \notin G$, maka $(m,x) \notin I_4$. Hal ini menunjukkan bahwa I_2 dan I_4 tidak mengawetkan urutan. Jadi, I_2 dan I_4 bukan ideal urutan dari Γ_2. Misalkan $x \in \mathbb{R}$, jika dipilih $(n-1,x) \in \Gamma_2^+$ dan $(n,y) \in I_6^+$. Perhatikan bahwa $(0,0) < ((n-1),x) < (n,y)$ tetapi $(n-1) \notin n\mathbb{Z}$ sehingga $((n-1),x) \notin I_6$. Hal ini menunjukkan bahwa I_6 tidak mengawetkan urutan sehingga bukan ideal urutan dari Γ_2. Berdasarkan Lema 7 diperoleh bahwa $n\mathbb{Z}$ di mana $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ tidak mengawetkan urutan, akibatnya, $n\mathbb{Z} \oplus_{lex} 0$ juga tidak mengawetkan urutan. Jadi, I_5 bukan ideal urutan. Perhatikan untuk I_7 komponen pertama adalah anggota-anggota dari $n\mathbb{Z}$ untuk suatu $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ yang berlaku bahwa $n\mathbb{Z}$ bukan ideal urutan untuk setiap $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ karena dapat dipilih $(n-1,x) \in \Gamma_2^+$ dan $(n,y) \in I_7^+$. Perhatikan bahwa $(0,0) < ((n-1),x) < (n,y)$ tetapi $(n-1) \notin n\mathbb{Z}$ sehingga $((n-1),x) \notin I_7$.

Misalkan $K = n\mathbb{Z} \oplus_{lex} G$ di mana $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ dan $G \leq R$. Andaikan $K \neq I_1$ ideal urutan tak trivial dari Γ_2. Dari [11] diperoleh bahwa himpunan ideal urutan terurut secara inklusi, sehingga $K \subsetneq I_1$atau $I_1 \subsetneq K$. Jika $K \subsetneq I_1$, perhatikan bahwa $I_1 = \{(0,x) | x \in \mathbb{R}\}$ dan $K \subsetneq I_1$, artinya untuk setiap $(nk,x) \in K$ dengan $n \in \mathbb{N}$ dan $k \in \mathbb{Z}$, berlaku $(nk,x) = (0,x)$. Sehingga, $K = \{0\} \oplus_{lex} G$ dengan $G \subsetneq \mathbb{R}$. Karena $K \subsetneq I_1$, maka terdapat $(0,x) \in I_1$ tetapi $(0,x) \notin K$ untuk $x \in \mathbb{R}\backslash G$. Perhatikan bahwa K tidak lain berbentuk I_2 yang berarti bukan ideal urutan dari Γ_2. Jika $I_1 \subsetneq K$, perhatikan bahwa $K = n\mathbb{Z} \oplus_{lex} G$ di mana $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ dan $G \leq R$ dengan $I_1 = 0 \oplus_{lex} \mathbb{R} \subset K = n\mathbb{Z} \oplus_{lex} G$, artinya $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ dan $G = \mathbb{R}$. Perhatikan bahwa K tidak lain berbentuk I_6 yang berarti bukan ideal urutan dari Γ_2. Jadi haruslah $K = I_1$.

4 Simpulan

Grup abel terurut total $\mathbb{R}$ memiliki ideal urutan $\{0\}$ dan $\mathbb{R}$ ($\{0\}$ dan $\mathbb{Z}$ untuk grup abel $\mathbb{Z}$) artinya grup $\mathbb{R}$ dan $\mathbb{Z}$ tidak memiliki ideal urutan yang tak trivial. Tetapi, jumlah langsung dari grup abel terurut total $\mathbb{R}$ dan $\mathbb{Z}$ yaitu $\Gamma_1 = \mathbb{R} \oplus_{lex} \mathbb{Z}$ dan $\Gamma_2 = \mathbb{Z} \oplus_{lex} \mathbb{R}$ memiliki ideal urutan yang tak trivial. Ideal urutan dari Γ_1 dan Γ_2 dapat ditentukan dengan cara menentukan subgrup-subgrupnya terlebih dahulu. Subgrup dari Γ_1 dapat dikonstruksi dari menjumlahkan langsung subgrup-subgrup dari $\mathbb{R}$ dan $\mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}$ dan $\mathbb{R}$ untuk Γ_2) artinya setiap subgrup dapat dinyatakan ke dalam bentuk $J = G \oplus_{\text{lex}} H$ untuk suatu $G \leq \mathbb{R}$ dan $H \leq \mathbb{Z}$ (sebaliknya untuk Γ_2). Selanjutnya tinjau sifat pengawetan urutan dari setiap subgrup dari Γ_1 dan Γ_2. Dari metode tersebut, diperoleh hasil bahwa satu-satunya ideal urutan tak trivial dari Γ_1 dengan urutan leksikografik adalah $\{0\} \oplus_{lex} \mathbb{Z} = \{(0, m) | m \in \mathbb{Z}\}$. Dengan cara yang serupa, diperoleh satu-satunya ideal urutan dari grup abel terurut total Γ_2 dengan urutan leksikografik adalah $\{0\} \oplus_{lex} \mathbb{R} = \{(0, x) | x \in \mathbb{R}\}$. Dari hasil tersebut, dapat diperoleh kesimpulan bahwa ideal urutan tak trivial dari Γ_1 isomorfik dengan $\mathbb{Z}$ sebagai grup sedangkan ideal urutan dari Γ_2 isomorfik dengan $\mathbb{R}$ sebagai grup. Sehingga, ideal urutan tak trivial dari Γ_1 dan Γ_2 masing-masing isomorfik dengan grup yang merupakan komponen kedua dari penjumlahan langsung leksikografik pada grup tersebut.

5 Ucapan Terima Kasih

Penelitian dibiayai oleh hibah penelitian PDUPT 2023 no: 1199/UN40.LP/PT.01.03/2023.

6 Daftar Pustaka

[1] T. Glavosits and Z. Karácsony, “Sums and products of intervals in ordered groups and fields,” *Acta Univ Sapientiae Matem*, vol. 13, no. 1, pp. 182–191, 2021.

[2] G. Leloup, “MV-algebras and Partially Cyclically Ordered Groups,” *Order*, vol. 39, no. 2, pp. 323–359, 2022, doi: https://doi.org/10.1007/s11083-021-09578-z.

[3] P. D’Aquino, J. Derakhshan, and A. Macintyre, “Truncations of ordered abelian groups,” *Algebra universalis*, vol. 82, no. 2, p. 27, 2021, doi: https://doi.org/10.1007/s00012-021-00717-6.

[4] I. Yengui, “The Gröbner ring conjecture in the lexicographic order case,” *Mathematische Zeitschrift*, vol. 276, pp. 261–265, 2014, doi: https://doi.org/10.1007/s00209-013-1197-y.

[5] Y. Jin, Z. Tan, J. Chen, and S. Ma, “Discovery of approximate lexicographical order dependencies,” *IEEE Trans Knowl Data Eng*, vol. 35, no. 4, pp. 3684–3698, 2021, doi: https://doi.org/10.1109/TKDE.2021.3130227.

[6] M. A. Toumi, “When the Range of Every Orthomorphism is an Order Ideal,” *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, vol. 43, pp. 4289–4302, 2020, doi: https://doi.org/10.1007/s40840-020-00922-x.

[7] S. P. Dutta, “On a consequence of the order ideal conjecture,” *J Pure Appl Algebra*, vol. 219, no. 3, pp. 482–487, 2015, doi: https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2014.05.006.

[8] O. Gok, “Tensor Product of Order Ideals,” in *International Mathematical Forum*, 2021, pp. 131–136. doi: https://doi.org/10.12988/imf.2021.912251.

[9] M. Chan, S. Haddadan, S. Hopkins, and L. Moci, “The expected jaggedness of order ideals,” in *Forum of Mathematics, Sigma*, Cambridge University Press, 2017, p. e9. doi: https://doi.org/10.1017/fms.2017.5.

[10] K. R. Goodearl, *Partially ordered abelian groups with interpolation*, 20th ed., no. 20. American Mathematical Soc., 1986.

[11] R. Rosjanuardi, “Primitive ideals of Toeplitz algebra of ordered groups,” *J. Indones. Math. Soc.(MIHMI) Vol*, vol. 14, pp. 111–118, 2008.

[12] R. Rosjanuardi, S. M. Gozali, and I. N. Albania, “c-Convex Subgroups of Finite Dimensional Cyclically Ordered Free Abelian Groups,” *Computer Science*, vol. 18, no. 1, pp. 37–45, 2023.

[13] S. Adji, I. Raeburn, and R. Rosjanuardi, “Group extensions and the primitive ideal spaces of Toeplitz algebras,” *Glasgow Mathematical Journal*, vol. 49, no. 1, pp. 81–92, 2007, doi: https://doi.org/10.1017/S0017089507003436.

[14] R. Rosjanuardi and T. Itoh, “Characterisation of maximal primitive ideals of Toeplitz algebras,” *Scientiae Mathematicae Japonicae*, vol. 72, no. 2, pp. 121–126, 2010.

[15] J. Singh, “Subgroups of the additive group of real line,” *arXiv preprint arXiv:1312.7067*, 2013, doi: https://doi.org/10.48550/arXiv.1312.7067.