

## Dekomposisi H-Super Anti Ajaib Atas Graf $C_n \triangleright_o S_n$

Aditya Putra Pratama<sup>1\*</sup>, Winarni<sup>2</sup>, Tiara Uni Raudyna<sup>3</sup>

<sup>1,2,3</sup>Program Studi Matematika, Jurusan Matematika dan Teknologi Informasi, Institut Teknologi Kalimantan

e-mail: [adityapp@lecturer.itk.ac.id](mailto:adityapp@lecturer.itk.ac.id), [winarni@lecturer.itk.ac.id](mailto:winarni@lecturer.itk.ac.id),  
[02191028@student.itk.ac.id](mailto:02191028@student.itk.ac.id)

*Diajukan: 21 Desember 2023, Diperbaiki: 29 Maret 2024, Diterima: 4 April 2024*

### Abstrak

Konsep dekomposisi H-Ajaib atas suatu graf  $G$  dibentuk berdasarkan konsep dekomposisi dan konsep pelabelan pada suatu graf. Himpunan  $A = \{H_1, H_2, \dots, H_k\}$  subgraf-subgraf dari graf  $G$  adalah dekomposisi dari  $G$  jika  $\bigcup_{1 \leq i \leq k} H_i = G$  dan  $E(H_i) \cap E(H_j) = \emptyset$  untuk  $i \neq j$ . Jika setiap subgraf  $H_i$  yang merupakan hasil dekomposisi dari graf  $G$  isomorfis ke suatu subgraf  $H$  dari  $G$ , maka  $A = \{H_1, H_2, \dots, H_k\}$  adalah  $H$ -dekomposisi dari  $G$ . Graf  $G$  dikatakan dekomposisi H-Ajaib, jika terdapat pemetaan bijektif  $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, |V(G)| + |E(G)|\}$  sedemikian sehingga total bobot label dari verteks dan sisi untuk masing-masing subgraf  $H_i$  konstan. Apabila total label dari verteks dan sisi untuk masing-masing subgraf  $H_i$  membentuk barisan aritmatika dengan beda satu, maka graf  $G$  dikatakan dekomposisi H-Anti Ajaib. Di penelitian ini, diselidiki mengenai dekomposisi H-Super Anti Ajaib atas graf  $C_n \triangleright_o S_n$ . Terlebih dahulu, diselidiki karakteristik mengenai graf  $C_n \triangleright_o S_n$  beserta subgraf yang dipilih. Selanjutnya, berdasarkan subgraf yang dipilih, dibentuk pola pelabelan pada graf  $C_n \triangleright_o S_n$  sedemikian sehingga total bobot dari masing-masing subgraf nya membentuk barisan aritmatika dengan beda satu. Dari pola pelabelan, dibentuk suatu fungsi pelabelan bijektif dengan menggunakan pendekatan barisan aritmatika. Berdasarkan fungsi pelabelan tersebut, ditunjukkan bahwa subgraf-subgraf dari  $C_n \triangleright_o S_n$  merupakan suatu  $H$ -dekomposisi dari  $C_n \triangleright_o S_n$ . Hasil akhir dari penelitian ini adalah graf  $C_n \triangleright_o S_n$  memuat dekomposisi H-Super Anti Ajaib dengan konstanta ajaib  $w_n(H_i) = 2n^3 + 4n^2 + 3n + 2 + i$  untuk  $1 \leq i < n$ , dan  $w_n(H_i) = 2n^3 + 4n^2 + 3n + 2$  untuk  $i = n$ , dengan  $n \geq 3$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

**Kata Kunci:** dekomposisi, graf, H-(super)Anti Ajaib, pelabelan, subgraf

### Abstract

*The concept of an H-Magic decomposition of a graph  $G$  is formed based on the concept of decomposition and the concept of labeling a graph. The set  $A = \{H_1, H_2, \dots, H_k\}$  subgraphs of graph  $G$  is a decomposition of  $G$  if  $\bigcup_{1 \leq i \leq k} H_i = G$  and  $E(H_i) \cap E(H_j) = \emptyset$  for  $i \neq j$ . If every subgraph  $H_i$  which is the result of the decomposition of graph  $G$  is isomorphic to a subgraph  $H$  of  $G$ , then  $A = \{H_1, H_2, \dots, H_k\}$  is an  $H$ -decomposition of  $G$ . Graph  $G$  is said to be  $H$ -Magic decomposition, if there is a bijective mapping  $: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, |V(G)| + |E(G)|\}$  such that the total weight of the vertices and edges for each subgraph  $H_i$  is constant. If the total labels of vertices and edges for each subgraph  $H_i$  form an arithmetic progression with a difference of each weight of subgraph is one, then graph  $G$  is said to be  $H$ -Anti Magic decomposition. In this study, the  $H$ -Super Anti Magic decomposition of the graph  $C_n \triangleright_o S_n$  is investigated. First, we investigate the characteristics of the graph  $C_n \triangleright_o S_n$  along with the selected subgraphs. Next, based on the selected subgraph, a labeling pattern is formed on the graph  $C_n \triangleright_o S_n$  such that the total weight of each subgraph forms an arithmetic sequence with the difference is one. From the labeling pattern, a bijective labeling function is formed using an arithmetic sequence approach. Based on the labeling function, it is shown that the subgraphs of  $C_n \triangleright_o S_n$  are an  $H$ -decomposition of  $C_n \triangleright_o S_n$ . The final result of this research is the graph  $C_n \triangleright_o S_n$  contains the  $H$ -Super Anti Magic decomposition with magic*

constant  $w_n(H_i) = 2n^3 + 4n^2 + 3n + 2 + i$  for  $1 \leq i < n$ , and  $w_n(H_i) = 2n^3 + 4n^2 + 3n + 2$  for  $i = n$ , where  $n \geq 3$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

**Keywords:** decomposition, graph, H-(super)Anti Magic, labelling, subgraph

## 1 Pendahuluan

Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler pada tahun 1736 melalui penyelesaian dari permasalahan mengenai jembatan Königsberg [1],[3]. Sejak saat itu, konsep dari graf mengalami perkembangan yang pesat dan banyak digunakan untuk menyelesaikan permasalahan di beberapa bidang, contohnya: bidang transportasi, bidang distribusi, dan lain sebagainya. Konsep dekomposisi H-Ajaib atas suatu graf  $G$  dibentuk berdasarkan konsep dekomposisi dan konsep pelabelan pada suatu graf [4]. Himpunan  $A = \{H_1, H_2, \dots, H_k\}$  subgraf-subgraf dari graf  $G$  adalah dekomposisi dari  $G$  jika  $\bigcup_{1 \leq i \leq k} H_i = G$  dan  $E(H_i) \cap E(H_j) = \emptyset$  untuk  $i \neq j$ . Jika setiap subgraf  $H_i$  yang merupakan hasil dekomposisi dari graf  $G$  isomorfis ke suatu subgraf  $H$  dari  $G$ , maka  $A = \{H_1, H_2, \dots, H_k\}$  adalah  $H$ -dekomposisi dari  $G$ . Graf  $G$  dikatakan dekomposisi  $H$ -Ajaib, jika terdapat pemetaan bijektif  $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, |V(G)| + |E(G)|\}$  sedemikian sehingga total bobot label dari verteks dan sisi untuk masing-masing subgraf  $H_i$  konstan. Apabila total label dari verteks dan sisi untuk masing-masing subgraf  $H_i$  membentuk barisan aritmatika dengan beda satu, maka graf  $G$  dikatakan dekomposisi  $H$ -Anti Ajaib. Graf  $G$  dikatakan dekomposisi  $H$ -Super Anti Ajaib, apabila label terkecil diberikan di verteks terlebih dahulu dan  $G$  juga memenuhi  $H$ -Anti Ajaib.

Beberapa penelitian yang mengangkat permasalahan mengenai dekomposisi  $H$ -Anti Ajaib atas suatu graf diantaranya dilakukan oleh Hendy dkk. [4] dan [5]. Pada penelitian Hendy [4] dibahas mengenai dekomposisi  $H$ -Super Anti Ajaib dari graf anti prisma. Hasil dari penelitian tersebut, antara lain: graf anti prisma  $A_n$ ,  $n \geq 3$  bersifat  $H$ -dekomposabel dimana  $H$  isomorfik ke graf matahari  $S(C_n)$ ,  $C_3$  dengan sebuah *pendant*, dan  $P_2$ . Lebih lanjut, graf anti prisma  $A_n$ ,  $n \geq 3$  memuat super anti ajaib  $(8n^2 + 2n, 4n^2) - S(C_n) -$ dekomposisi. Selain itu, Hendy dkk. di [5] membahas mengenai dekomposisi  $H$ -Anti Ajaib dari grid toroidal dan triangulasi toroidal. Pada penelitian tersebut diselidiki mengenai eksistensi dari pelabelan pada grid toroidal dan triangulasi toroidal sehingga menjamin adanya dekomposisi  $H$ -Anti Ajaib. Graf siklus  $C_n$  adalah suatu graf dengan  $n$  verteks dan memiliki lintasan tertutup yang melalui tiap verteks nya. Graf bintang  $S_n$  adalah graf sederhana yang memiliki  $n + 1$  titik dan  $n$  sisi, serta memiliki titik pusat yang berderajat  $n$ , sedangkan titik yang lain berderajat 1 [2]. Di penelitian ini, kami menyelidiki mengenai dekomposisi  $H$ -Super Anti Ajaib atas graf  $C_n \triangleright_o S_n$ . Graf  $C_n \triangleright_o S_n$  merupakan hasil dari operasi " $\triangleright_o$ " terhadap graf siklus  $C_n$  dan graf bintang  $S_n$ . Operasi " $\triangleright_o$ " dapat ditinjau di

---

penelitian [6]. Tahapan penelitian yang kami lakukan, pertama ditentukan terlebih dahulu Graf dan Subgraf yang akan diteliti. Pada graf  $C_n \triangleright_o S_n$ , diselidiki mengenai kardinalitas dari himpunan verteks dan kardinalitas dari himpunan sisi. Setelah itu, dipilih subgraf dari  $C_n \triangleright_o S_n$  sedemikian sehingga membentuk  $H$ -dekomposisi. Selanjutnya, akan dibentuk pola pelabelan dengan memperhatikan subgraf yang dipilih agar nantinya membentuk dekomposisi  $H$ -Super Anti Ajaib. Hasil dari pembentukan pola pelabelan pada graf  $C_n \triangleright_o S_n$  adalah fungsi pelabelan. Dari fungsi pelabelan ini, ditunjukkan secara matematis bahwa  $C_n \triangleright_o S_n$  membentuk  $H$ -dekomposisi. Hasil akhir diuraikan mengenai suatu teorema yang menjamin bahwa graf  $C_n \triangleright_o S_n$  memuat dekomposisi  $H$ -Super Anti Ajaib.

## 2 Metode Penelitian

Prosedur yang digunakan untuk menyelesaikan penelitian ini adalah.

### 2.1 Penentuan Graf dan Subgraf

Pada tahap ini dilakukan pembentukan graf  $C_n \triangleright_o S_n$  dan subgraf yang bersesuaian untuk bisa dibentuk suatu dekomposisi  $H$ -Super Anti Ajaib atas graf  $C_n \triangleright_o S_n$ . Di tahap ini juga diberikan uraian mengenai karakteristik dari graf  $C_n \triangleright_o S_n$ , yaitu mengenai jumlah verteks dan sisi yang dimiliki graf  $C_n \triangleright_o S_n$  dan di masing-masing subgraf nya.

### 2.2 Penentuan Pola Pelabelan pada Graf

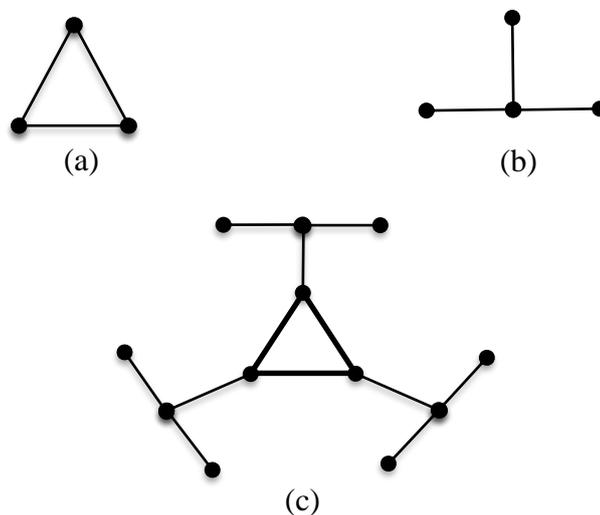
Berdasarkan subgraf yang dipilih pada graf  $C_n \triangleright_o S_n$ , dibentuk suatu pola pelabelan sedemikian sehingga total bobot dari masing-masing subgraf nya membentuk barisan aritmatika dengan beda satu, untuk setiap  $n \geq 3$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Setelah pola pelabelan diperoleh, dibentuk suatu fungsi pelabelan berdasarkan pola pelabelan graf yang diperoleh tersebut. Dalam hal ini, ditunjukkan juga bahwa fungsi pelabelan tersebut bijektif.

### 2.3 Konstruksi Teorema

Berdasarkan hasil sebelumnya, telah diperoleh fungsi pelabelan yang bijektif untuk graf  $C_n \triangleright_o S_n$ . Selanjutnya, dalam hal ini secara matematis ditunjukkan bahwa berdasarkan fungsi pelabelan tersebut, subgraf-subgraf dari  $C_n \triangleright_o S_n$  merupakan suatu  $H$ -dekomposisi dari  $C_n \triangleright_o S_n$ . Lebih lanjut, berdasarkan beberapa hasil sebelumnya, dibentuklah suatu teorema yang menjamin adanya dekomposisi  $H$ -Super Anti Ajaib atas graf  $C_n \triangleright_o S_n$  berdasarkan subgraf dan fungsi pelabelan yang ditunjuk.

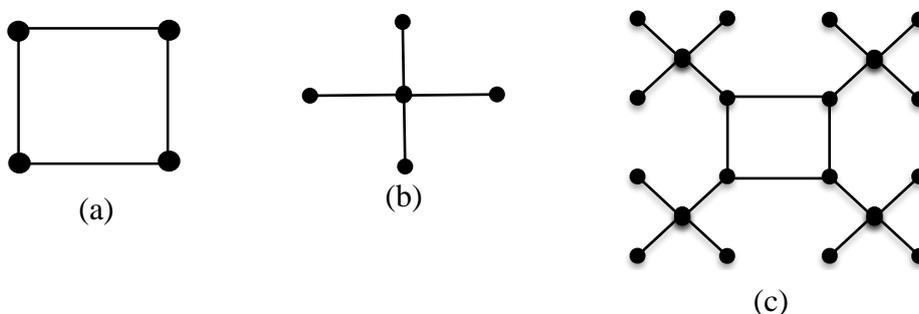
### 3 Hasil dan Pembahasan

Hal yang pertama dilakukan adalah membentuk graf hasil operasi *comb* dari graf siklus  $C_n$  dan graf bintang  $S_n$ , yang dinotasikan dengan  $C_n \triangleright_o S_n$  untuk  $n \geq 3, n \in \mathbb{N}$ . Berikut contoh gambaran graf dari hasil operasi *comb*, ditunjukkan pada Gambar 1 berikut.



**Gambar 1.** (a) Graf siklus  $C_3$ , (b) Graf bintang  $S_3$ , (c) Graf  $C_3 \triangleright_o S_3$

Gambar 1(a) merupakan graf siklus dengan 3 buah titik yang dapat dilambangkan dengan  $C_3$ , dengan  $|V(C_3)| = 3$  dan  $|E(C_3)| = 3$ , sedangkan untuk Gambar 1(b) adalah graf bintang yang dinotasikan dengan  $S_3$ , yang mana memiliki 4 titik dan 3 sisi dengan satu titik sebagai pusat dari graf bintang. Kemudian untuk Gambar 1(c) merupakan graf  $C_3 \triangleright_o S_3$  yang menunjukkan bahwa terdapat 3 salinan  $S_3$  dan setiap titik graf  $C_3$  yang terhubung ke salah satu titik di graf  $S_3$ . Selain itu,  $|V(C_3)| = 3, |V(S_3)| = 4$ , dan  $|V(C_3 \triangleright_o S_3)| = 12$ , kemudian  $|E(C_3)| = 3, |E(S_3)| = 3$ , dan  $|E(C_3 \triangleright_o S_3)| = 12$ . Ditunjukkan graf hasil operasi *comb* yaitu graf  $C_4 \triangleright_o S_4$  pada Gambar 2 sebagai berikut.



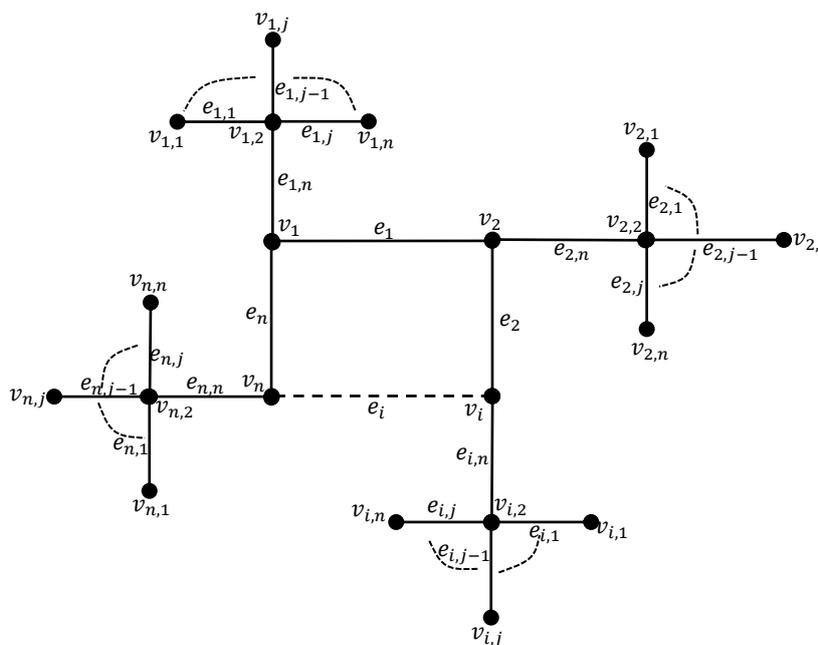
**Gambar 2.** (a) Graf siklus  $C_4$ , (b) Graf bintang  $S_4$ , (c) Graf  $C_4 \triangleright_o S_4$

Gambar 2(a) merupakan graf siklus dengan 4 buah titik yang dilambangkan dengan  $C_4$ , dengan  $|V(C_4)| = 4$  dan  $|E(C_4)| = 4$ , sedangkan untuk Gambar 2(b) adalah graf bintang yang dinotasikan dengan  $S_4$  serta memiliki 5 titik dan 4 sisi, dengan satu titik sebagai pusat dari graf

bintang. Kemudian untuk Gambar 2(c) merupakan graf  $C_4 \triangleright_o S_4$  yang menunjukkan bahwa terdapat 4 salinan  $S_4$  dan setiap titik di graf  $C_4$  yang terhubung ke salah satu titik di graf  $S_4$ . Selain itu,  $|V(C_4)| = 4$ ,  $|V(S_4)| = 5$ , dan  $|V(C_4 \triangleright_o S_4)| = 20$ , kemudian  $|E(C_4)| = 4$ ,  $|E(S_4)| = 4$ , dan  $|E(C_4 \triangleright_o S_4)| = 20$ .

Berdasarkan beberapa ilustrasi diatas, diperoleh beberapa karakteristik dari  $C_n \triangleright_o S_n$  yaitu:  $|V(C_n \triangleright_o S_n)| = n^2 + n$ , dan  $|E(C_n \triangleright_o S_n)| = n^2 + n$ .

Langkah selanjutnya adalah pembentukan pola pelabelan untuk graf  $C_n \triangleright_o S_n$ . Hal ini dimulai dengan memberikan label di semua titik dan sisi pada graf  $C_n \triangleright_o S_n$ . Pemberian label dimulai dari pemberian label titik pada graf siklus kemudian dilanjutkan dengan pemberian label titik pada graf bintang. Setelah semua titik pada graf  $C_n \triangleright_o S_n$  diberi label, kemudian semua sisi diberi label dimulai dari graf bintang kemudian pelabelan pada graf siklusnya. Pola pelabelan untuk graf  $C_n \triangleright_o S_n$  yang digunakan di penelitian ini bisa dilihat pada Gambar 3.



**Gambar 3.** Pola Pelabelan graf  $C_n \triangleright_o S_n$

Berdasarkan pola pelabelan yang digunakan, diperoleh fungsi pelabelan total pada graf  $C_n \triangleright_o S_n$  sebagaimana yang dituliskan pada Lemma 1 berikut.

**Lemma 1.** Jika didefinisikan suatu fungsi pelabelan total pada graf  $C_n \triangleright_o S_n$  sebagai berikut :

$$h: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, |V(G)| + |E(G)|\}$$

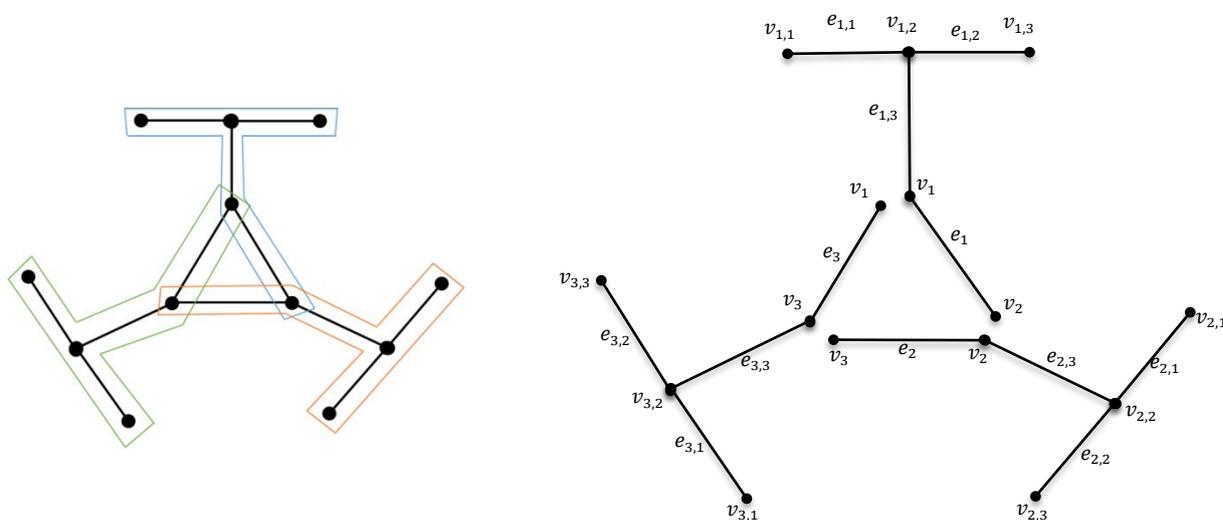
dengan  $V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, n^2 + n\}$ , dan  $E(G) \rightarrow \{n^2 + n + 1, n^2 + n + 2, \dots, 2(n^2 + n)\}$ ,

dan

$$h(x) = \begin{cases} i, & x = v_i \\ nj + i & x = v_{i,k} \text{ dengan } k \text{ genap} \\ nj + n + 1 - i, & x = v_{i,k} \text{ dengan } k \text{ ganjil} \\ 2n^2 + 2n + 1 - i, & x = e_i \\ n^2 + nj + i, & x = e_{i,k} \text{ dengan } n \text{ dan } k \text{ ganjil atau genap} \\ n^2 + nj + n + 1 - i, & x = e_{i,k} \text{ dengan } n \text{ ganjil dan } k \text{ genap atau sebaliknya} \end{cases},$$

dengan  $x \in V(G) \cup E(G)$ ,  $1 \leq i \leq n$  dan  $1 \leq j, k \leq n$ , maka fungsi  $h$  adalah fungsi bijektif. ■

Pembahasan selanjutnya adalah mengenai bagaimana membentuk subgraf sedemikian sehingga membentuk  $H$ -dekomposisi dari graf  $C_n \triangleright_o S_n$ . Berikut adalah contoh subgraf-subgraf yang dibentuk yang mana memenuhi  $H$ -dekomposisi dari graf  $C_3 \triangleright_o S_3$  berdasarkan Gambar 1(c).



**Gambar 4.**  $H$ -Dekomposisi pada graf  $C_3 \triangleright_o S_3$

Berikut diberikan suatu proposisi yang menjamin secara umum bahwa hal tersebut berlaku.

**Proposisi 2.** Jika  $\mathcal{H} = \{H_1, H_2, \dots, H_n\}$  adalah himpunan dari subgraf-subgraf dari graf  $C_n \triangleright_o S_n$  dengan  $\bigcup_{1 \leq i \leq n} H_i = C_n \triangleright_o S_n$  serta  $H_i \cap H_j = \emptyset, i \neq j, i = 1, 2, 3, \dots, n; j = 1, 2, 3, \dots, n$  dan didefinisikan suatu fungsi pelabelan titik sebagai berikut:

$$g_i: V(H_n) \rightarrow V(H_i); \text{ dengan } 1 \leq i < n$$

dengan

$$g_i(x) = \begin{cases} v_i, & x = v_n \\ v_{i+1}, & x = v_1 \\ v_{i,j}, & x = v_{n,j} \end{cases},$$

$$E(H_i) = \{(v_i, v_{i+1}), (v_i, v_{i,2}), (v_{i,2}, v_{i,j})_{j \neq 2}\},$$

dan

$$E(H_n) = \{(v_n, v_1), (v_n, v_{n,2}), (v_{n,2}, v_{n,j})_{j \neq 2}\},$$

dengan  $x \in V(H_n)$ , maka  $\mathcal{H}$  adalah  $H$ -dekomposisi dari graf  $C_n \triangleright_o S_n$ . ■

Selanjutnya, langkah terakhir yang dilakukan adalah membentuk teorema yang berkaitan dengan tujuan utama dari penelitian ini.

**Teorema 3.** Misalkan  $C_n \triangleright_o S_n$  adalah graf yang diperoleh dari operasi *comb* ( $\triangleright$ ) antara sembarang graf siklus  $C_n$  dengan graf bintang  $S_n$ . Jika  $\mathcal{H}$  adalah suatu himpunan subgraf sebagaimana yang terdefinisi pada Proposisi 2 dan fungsi pelabelan yang terdefinisi pada Lemma 1, maka  $C_n \triangleright_o S_n$  memuat dekomposisi  $H$ -Super Anti Ajaib, dengan konstanta ajaib sebagai berikut:

$$w_n(H_i) = \begin{cases} 2n^3 + 4n^2 + 3n + 2 + i, & 1 \leq i < n \\ 2n^3 + 4n^2 + 3n + 2, & i = n \end{cases}.$$

**Bukti:**

Dari Proposisi 2 telah ditunjukkan bahwa graf  $C_n \triangleright_o S_n$  dapat dibentuk sebagai  $H$ -dekomposisi. Selanjutnya, misalkan  $f$  adalah fungsi bijektif seperti yang telah didefinisikan pada Lemma 1 yang memetakan unsur-unsur pada graf  $C_n \triangleright_o S_n$  ke bilangan bulat positif seperti pelabelan dibawah ini:

Pelabelan titik pada graf  $C_n \triangleright_o S_n$  :

$$f(v_i) = i$$

$$f(v_{i,j}) = nj + i, \text{ dengan } j \text{ genap}$$

$$f(v_{i,j}) = nj + n + 1 - i, \text{ dengan } j \text{ ganjil}$$

Pelabelan sisi pada graf  $C_n \triangleright_o S_n$

$$f(e_i) = 2n^2 + 2n + 1 - i,$$

$$f(e_{i,j}) = n^2 + nj + i, \text{ dengan } n \text{ dan } j \text{ ganjil atau genap}$$

$$f(e_{i,j}) = n^2 + nj + n + 1 - i, \text{ dengan } n \text{ ganjil dan } j \text{ genap atau sebaliknya}$$

Selanjutnya, dengan menggunakan fungsi pelabelan yang telah didefinisikan, diperoleh persamaan sebagai berikut.

a) Untuk  $1 \leq i < n$ , dengan  $n$  ganjil

$$w_n(H_i) = f(v_i) + f(v_{i+1}) + \sum_{j=1}^n f(v_{i,j}) + f(e_i) + \sum_{j=1}^n f(e_{i,j})$$

Karena  $n$  ganjil, sehingga  $\exists m \in \mathbb{Z}$  yang memenuhi  $n = 2m + 1$ . Oleh karena itu, untuk  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = m$  dan  $\lceil \frac{n}{2} \rceil = m + 1$ . Dilakukan perhitungan fungsi pelabelan titik yang telah didefinisikan pada Lemma 1.

$$f(v_i) + f(v_{i+1}) + \sum_{j=1}^n f(v_{i,j})$$

$$\begin{aligned}
&= 2i + 1 + \left( \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} 2n(k) + i \right) + \left( \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} 2n(k) - n + n + 1 - i \right), \\
&= 2i + 1 + \left( \sum_{k=1}^m 2n(k) + i \right) + \left( \sum_{k=1}^{m+1} 2n(k) - n + n + 1 - i \right), \\
&= 2i + 1 + \left( \sum_{k=1}^m 2n(k) + i \right) + \left( \sum_{k=1}^{m+1} 2n(k) + 1 - i \right), \\
&= 2i + 1 + 2n \left( \sum_{k=1}^m k \right) + \left( \sum_{k=1}^m i \right) + 2n \left( \sum_{k=1}^{m+1} k \right) + \left( \sum_{k=1}^{m+1} 1 \right) - \left( \sum_{k=1}^{m+1} i \right), \\
&= 2i + 1 + 2n \cdot \frac{m}{2} (m + 1) + mi + 2n \frac{m + 1}{2} (m + 1 + 1) + (m + 1) - (m + 1)i, \\
&= 2i + 1 + nm(m + 1) + n(m + 1)(m + 2) + (m + 1) + mi - (m + 1)i, \\
&= 2i + 1 - i + (m + 1)(nm + n(m + 2) + 1), \\
&= i + 1 + (m + 1)(n(m + m + 2) + 1), \\
&= i + 1 + (m + 1)(n(2m + 1 + 1) + 1), \\
&= i + 1 + (m + 1)(n(n + 1) + 1). \tag{1}
\end{aligned}$$

Selanjutnya, dilakukan perhitungan dengan fungsi pelabelan sisi yang telah didefinisikan pada Lemma 1.

$$\begin{aligned}
&f(e_i) + \sum_{j=1}^n f(e_{i,j}) \\
&= 2n^2 + 2n + 1 - i + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} n^2 + 2n(k) + n + 1 - i + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} n^2 + 2n(k) - n + i, \\
&= 2n^2 + 2n + 1 - i + \left( \sum_{k=1}^m n^2 + 2n(k) + n + 1 - i \right) + \left( \sum_{k=1}^{m+1} n^2 + 2n(k) - n + i \right), \\
&= 2n^2 + 2n + 1 - i + \left( \sum_{k=1}^m n^2 \right) + 2n \left( \sum_{k=1}^m k \right) + (n + 1 - i) \left( \sum_{k=1}^m 1 \right) + 2n \left( \sum_{k=1}^{m+1} k \right) + (n^2 \\
&\quad - n + i) \left( \sum_{k=1}^{m+1} 1 \right) + 2n \left( \sum_{k=1}^{m+1} k \right), \\
&= 2n^2 + 2n + 1 - i + n^2 m + 2n \cdot \frac{m}{2} (m + 1) + (n + 1 + i)m + (n^2 - n - i)(m + 1) \\
&\quad + 2n \cdot \frac{m + 1}{2} (m + 1 + 1),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2n^2 + 2n + 1 - i + n^2m + nm(m + 1) + (n + 1 + i)m + (n^2 - n - i)(m + 1) + n(m + 1)(m + 2), \\
&= 2n^2 + 2n - i + n^2(m + m + 1) + (n + i)(m - (m + 1)) + (m + 1)(nm + n(m + 2) + 1), \\
&= n^3 - n - i + (m + 1)(n(n + 1) + 1 + 2n^2 + 2n - i). \tag{2}
\end{aligned}$$

Berdasarkan perhitungan fungsi pelabelan titik dan sisi pada Persamaan (1) dan (2), maka diperoleh persamaan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
w_n(H_i) &= f(v_i) + f(v_{i+1}) + \sum_{j=1}^n f(v_{i,j}) + f(e_i) + \sum_{j=1}^n f(e_{i,j}) \\
&= i + 1 + (m + 1)(n(n + 1) + 1 + n^3 - n - i + (m + 1)(n(n + 1) + 1 + 2n^2 + 2n - i), \\
&= 2n^3 + 4n^2 + 3n + 2 + i. \tag{3}
\end{aligned}$$

Berdasarkan perhitungan fungsi pelabelan titik dan sisi di atas, maka diperoleh konstanta ajaib  $w_n(H_i) = 2n^3 + 4n^2 + 3n + 2 + i$ , untuk  $1 \leq i < n$ , dengan  $n$  ganjil.

b) Untuk  $1 \leq i < n$ , dengan  $n$  genap

Selanjutnya, untuk  $1 \leq i < n$ , dengan  $n$  genap diperoleh konstanta ajaib sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
w_n(H_i) &= f(v_i) + f(v_{i+1}) + \sum_{j=1}^n f(v_{i,j}) + f(e_i) + \sum_{j=1}^n f(e_{i,j}) \\
&= 2i + 1 + \left( \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} 2n(k) + i \right) + \left( \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} 2n(k) - n + n + 1 - i \right) + \\
&\quad (2n^2 + 2n + 1 - i) + \left( \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} n^2 + 2n(k) + n + 1 - i \right) + \\
&\quad \left( \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} n^2 + 2n(k) - n + i \right), \\
&= 2n^2 + 2n + 2 + i + \frac{n^2(n + 2)}{4} + \frac{ni}{2} + \frac{n^2(n + 2)}{4} + \frac{n - ni}{2} + \\
&\quad \frac{3n^3 + 4n^2 - 2ni + 2n}{4} + \frac{3n^3 + 2ni}{4}, \\
&= 2n^2 + 2n + 2 + i + \frac{n^2(n + 2) + n}{2} + \frac{n(3n^2 + 2n + 1)}{2}, \\
&= 2n^2 + 2n + 2 + i + n(2n^2 + 2n + 1), \\
&= 2n^2 + 2n + 2 + i + 2n^3 + 2n^2 + n,
\end{aligned}$$

$$= 2n^3 + 4n^2 + 3n + 2 + i. \quad (4)$$

Berdasarkan perhitungan fungsi pelabelan titik dan sisi di atas, maka diperoleh konstanta ajaib  $w_n(H_i) = 2n^3 + 4n^2 + 3n + 2 + i$ , untuk  $1 \leq i < n$ , dengan  $n$  genap.

c) Untuk  $i = n$ , dengan  $n$  ganjil

Selanjutnya, untuk  $i = n$ , dengan  $n$  ganjil diperoleh konstanta ajaib sebagai berikut.

$$\begin{aligned} w_n(H_n) &= f(v_n) + f(v_1) + \sum_{j=1}^n f(v_{n,j}) + f(e_n) + \sum_{j=1}^n f(e_{n,j}) \\ &= n + 1 + \left( \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} n(2k) + n \right) + \left( \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} n(2k-1) - n + n + 1 - n \right) + (2n^2 + 2n \\ &\quad + 1 - n) + \left( \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} n^2 + n(2k) + n + 1 - n \right) \\ &\quad + \left( \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} n^2 + n(2k-1) + n \right), \\ &= 2(n^2 + n + 1) + \left( \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} n(2k) + n \right) + \left( \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} n(2k-1) - n + n + 1 - n \right) \\ &\quad + \left( \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} n^2 + n(2k) + n + 1 - n \right) + \left( \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} n^2 + n(2k-1) + n \right), \\ &= 2(n^2 + n + 1) + \left( \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} n^2 + 2n(2k) + n + 1 \right) \\ &\quad + \left( \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} n^2 + 2n(2k-1) + n + 1 \right), \\ &= 2(n^2 + n + 1) + (n^2 + n + 1) \left( \sum_{k=1}^m 1 \right) + 4n \left( \sum_{k=1}^m k \right) + (n^2 + n + 1 \\ &\quad - 2n) \left( \sum_{k=1}^{m+1} 1 \right) + 4n \left( \sum_{k=1}^m k \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2(n^2 + n + 1) + (n^2 + n + 1)m + 4m \cdot \frac{m}{2}(m + 1) + (n^2 + n + 1)(m + 1) \\
&\quad - 2n(m + 1) + 4n \cdot \frac{m + 1}{2}(m + 1 + 1), \\
&= 2(n^2 + n + 1) + (n^2 + n + 1)(m + m + 1) + 2nm(m + 1) + 2n(m + 1)(m \\
&\quad + 2) - 2n(m + 1), \\
&= 2(n^2 + n + 1) + n(n^2 + n + 1) + n(m + 1)(2m + 2(m + 2)) - 2n(m + 1), \\
&= (n^2 + n + 1)(2 + n) + n(m + 1)(2m + 2m + 4 - 2), \\
&= (n^2 + n + 1)(2 + n) + n(m + 1)((2m + 1)(2m + 1)), \\
&= (n^2 + n + 1)(2 + n) + n(m + 1)(2n), \\
&= (n^2 + n + 1)(2 + n) + n^2(2m + 1 + 1), \\
&= (n^2 + n + 1)(2 + n) + n^2(n + 1), \\
&= 2n^3 + 4n^2 + 3n + 2. \tag{5}
\end{aligned}$$

Berdasarkan perhitungan fungsi pelabelan titik dan sisi di atas, maka diperoleh konstanta ajaib  $w_n(H_n) = 2n^3 + 4n^2 + 3n + 2$ , untuk  $i = n$ , dengan  $n$  ganjil.

d) Untuk  $i = n$ , dengan  $n$  genap

Selanjutnya, untuk  $i = n$ , dengan  $n$  genap diperoleh konstanta ajaib sebagai berikut.

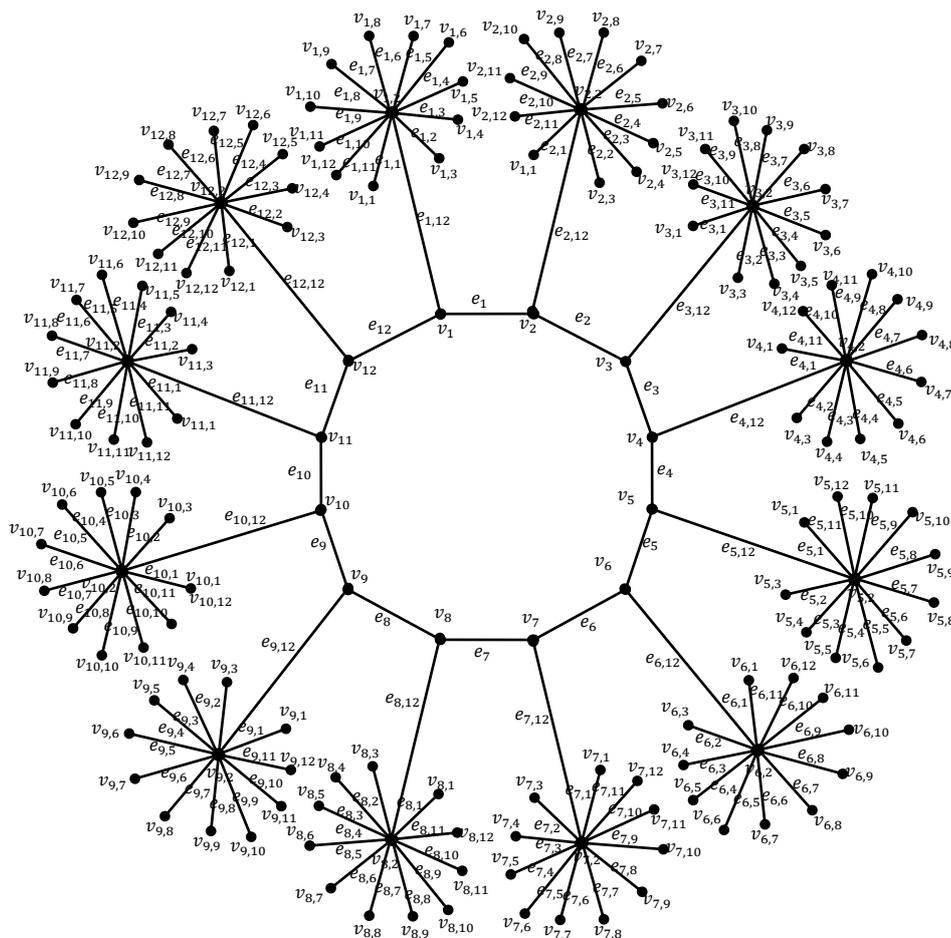
$$\begin{aligned}
w_n(H_n) &= f(v_n) + f(v_1) + \sum_{j=1}^n f(v_{n,j}) + f(e_n) + \sum_{j=1}^n f(e_{n,j}) \\
&= n + 1 + \left( \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} 2n(k) + i \right) + \left( \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} 2n(k) - n + n + 1 - n \right) + (2n^2 + 2n \\
&\quad + 1 - n) + \left( \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} n^2 + 2n(k) + n + 1 - n \right) \\
&\quad + \left( \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} n^2 + 2n(k) - n + n \right), \\
&= 2n^2 + 2n + 2 + \frac{n^2(n + 2)}{4} + \frac{ni}{2} + \frac{n^2(n + 2)}{4} + \frac{n - ni}{2} \\
&\quad + \frac{3n^3 + 4n^2 - 2ni + 2n}{4} + \frac{3n^3 + 2ni}{4}, \\
&= 2n^2 + 2n + 2 + \frac{n^2(n + 2) + n}{2} + \frac{n(3n^2 + 2n + 1)}{2}, \\
&= 2n^2 + 2n + 2 + n(2n^2 + 2n + 1), \\
&= 2n^2 + 2n + 2 + 2n^3 + 2n^2 + n, \\
&= 2n^3 + 4n^2 + 3n + 2. \tag{6}
\end{aligned}$$

Berdasarkan perhitungan fungsi pelabelan titik dan sisi di atas, maka diperoleh konstanta ajaib  $w_n(H_n) = 2n^3 + 4n^2 + 3n + 2$ , untuk  $i = n$ , dengan  $n$  genap.

Dari Persamaan (3), (4), (5) dan (6) telah diperoleh konstanta ajaib sebagai berikut.

$$w_n(H_i) = \begin{cases} 2n^3 + 4n^2 + 3n + 2 + i, & 1 \leq i < n \\ 2n^3 + 4n^2 + 3n + 2, & i = n \end{cases}$$

**Contoh 4** Diberikan graf  $C_{12} \triangleright_o S_{12}$  sebagaimana terlihat pada gambar berikut:



**Gambar 5.** Pelabelan graf  $C_{12} \triangleright_o S_{12}$

a) Dengan menggunakan perhitungan manual sebagaimana pelabelan yang terdefinisi pada graf tersebut, diperoleh konstanta ajaib dari masing-masing subgraf sebagaimana berikut.

$w_{12}(H_1) = 4071;$	$w_{12}(H_2) = 4072;$	$w_{12}(H_3) = 4073$
$w_{12}(H_4) = 4074;$	$w_{12}(H_5) = 4075;$	$w_{12}(H_6) = 4076$
$w_{12}(H_7) = 4077;$	$w_{12}(H_8) = 4078;$	$w_{12}(H_9) = 4079$
$w_{12}(H_{10}) = 4080;$	$w_{12}(H_{11}) = 4081;$	$w_{12}(H_{12}) = 4070$

b) Dengan menggunakan Teorema 3, diperoleh konstanta ajaib yang sama sebagaimana pada perhitungan manual sebelumnya.

$$w_{12}(H_i) = \begin{cases} 470 + i, & 1 \leq i < 12 \\ 470, & i = 12 \end{cases} \quad \blacksquare$$

## 4 Simpulan

Beberapa hasil yang diperoleh dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Pola pelabelan dari graf  $C_n \triangleright_o S_n$  dinyatakan dalam bentuk fungsi pelabelan sebagaimana pada Lemma 1.
2. Berdasarkan fungsi pelabelan yang telah dibentuk, diperoleh Proposisi 2 yang menjamin bahwa subgraf-subgraf dari graf  $C_n \triangleright_o S_n$  membentuk  $H$ -dekomposisi.
3. Hasil utama dari penelitian ini, yaitu: graf  $C_n \triangleright_o S_n$  memuat dekomposisi  $H$ -Super Anti Ajaib, dengan konstantan ajaib:

$$w_n(H_i) = \begin{cases} 2n^3 + 4n^2 + 3n + 2 + i, & 1 \leq i < n \\ 2n^3 + 4n^2 + 3n + 2, & i = n \end{cases}.$$

### *Open Problem*

Pada penelitian selanjutnya, akan diselidiki mengenai eksistensi dari  $H$ -dekomposisi ajaib ataupun  $H$ -dekomposisi anti ajaib dari graf  $C_n \triangleright_o S_m$ , yang mana hasil yang diharapkan mampu memperumum hasil di penelitian ini. Lebih lanjut, subgraf  $H$  sedemikian sehingga eksistensi dari  $H$ -dekomposisi ajaib ataupun  $H$ -dekomposisi anti ajaib dari graf  $C_n \triangleright_o S_m$  dijamin ada, kira-kira akan memiliki bentuk seperti apa.

## 5 Daftar Pustaka

- [1] Balakrishnan, M., dan Ranganathan, K. (2012), *A Textbook of Graph Theory Second Edition*, Springer, New York.
- [2] Bhavanari, S., Devanaboina, S., Bhavanari, M. (2016), "Star Number of A Graph", *Research Journal of Science and IT Management*, Vol. 5, No. 11, hal. 18-22.
- [3] Chartrand, G., & Zhang, P. (2019). *Chromatic graph theory*. CRC press.
- [4] Hendy, H. (2016, February). The H-super (anti) magic decompositions of antiprism graphs. In *AIP Conference Proceedings* (Vol. 1707, No. 1). AIP Publishing.
- [5] Hendy, Mudholifah, A.N., Sugeng, K.A., Bača, M. and Semaničová-Feňovčíková, A., 2020. On H-antimagic decomposition of toroidal grids and triangulations. *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*, 17(3), pp.761-770.
- [6] Saputro, S.W., Mardiana, N., dan Purwasi, I.A. (2013), "The Metric Dimension of Comb Product Graph", *Graph Theory Conference in Honor of Egawa 60th Birthday*.