Limits: Journal of Mathematics and Its Applications
E-ISSN: 2579-8936
P-ISSN: 1829-605X
Vol. 21, No. 2, Juli 2024, 191-200
DOI: http://dx.doi.org/10.12962/limits.v21i2.19835

Struktur Subring Deret Pangkat Tergeneralisasi Sebagai Himpunan Matriks Berindeks Monoid

Budi Surodjo [1 *], **Saifullah Ali** [2]
[1, 2]Departemen Matematika UGM Yogyakarta Indonesia
e-mail: surodjo_b@ugm.ac.id

Diajukan: 20 Januari 2024, Diperbaiki: 27 September 2024, Diterima: 30 September 2024

Abstrak

Himpunan semua matriks berukuran $n \times m$ atas ring R dapat dipandang sebagai subring dari ring polinomial $R[\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0]$ atas penjumlahan dan perkalian matriks, sebagai matriks berukuran tak hingga dari $M_{\infty\times\infty}(R)$. Sedangkan ring polinomial merupakan bentuk khusus ring deret pangkat tergeneralisasi (RDPT) dengan mengganti $\mathbb{N}_0$ dengan sebarang monoid terurut tegas S dan T. Kondisi ini memungkinkan memandang sebarang elemen RDPT $R[[S \times T]]$ sebagai matriks tergeneralisasi dengan indeks monoid $S \times T$ yang tidak selalu hingga. Paper ini difokuskan pada pengaruh konvolusi dan perkalian matriks pada pengkonstruksian subring khusus dari RDPT, sebagai bagian dari $M_{S\times T}(R)$.

Kata Kunci: indeks monoid, matriks, ring deret pangkat tergeneralisasi

Abstract

The set of all $n \times m$ matrices over R can be considered as a subring of polynomial ring $R[\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0]$ over the matrix addition and multiplication, as infinite matrices of $M_{\infty\times\infty}(R)$. Whereas the polynomial ring is a special form of the generalized power series rings (GPRS) by replacing $\mathbb{N}_0$ with any strictly ordered monoids S and T. Such condition make it possible to considered any element of RDPT $R[[S \times T]]$ as a generalized matrix with monoid index of $S \times T$, which is not always finite. This paper focuses on the effects of matrix convolution and multiplication on the construction of special subring of RDPT, as a part of $M_{S\times T}(R)$.

***Keywords**: monoid indexes matrices, generalized power series rings*

1 Pendahuluan

Pembahasan tentang matriks umumnya dilakukan pada matriks berukuran hingga. Konsep matriks secara teoritis juga dikaitkan dengan konsep ruang vektor dan sistem persamaan linear beserta aplikasinya di banyak bidang kajian. Operasi perkalian matriks konvensional telah digeneralisasi oleh [1] melalui bentuk bilinear simetris non degenerate yang melibatkan produk scalar g pada $\mathbb{R}^n$. Teori yang dikembangkan berhasil mengungkapkan sifat-sifat dasar perkalian tergeneralisasi. Berdasarkan sifat-sifat tersebut mampu ditentukan nilai eigen dan vektor eigen relatif dalam konsep yang baru

Salah satu cara pandang lain terhadap matriks dilakukan oleh [2] dengan menganggap matriks sebagai polinomial dengan entri matriks berupa koefisien-koefisien polinomial. Konsep dan sifat-sifat yang dihasilkan masih merujuk pada bentuk matriks berukuran hingga sebagai bentuk polinomial satu *undetermined* dengan degre hingga n. Di sisi lain teori ring polinomial telah berkembang sangat pesat, baik sebagai struktur ring tersendiri, maupun sebagai subring dari ring deret pangkat formal dan ring deret Laurent.

Pada tahun 1990 [3] mengkonstruksi ring deret pangkat tergeneralisasi (RDPT), yang didasarkan pada eksistensi monoid terurut tegas S yang komutatif dan kanselatif sebagai himpunan indeks. Ring ini merupakan generalisasi dari ring polinomial dan ring semigrup. Selanjutnya hasil kajian [4] dan [5] mengungkapkan konstruksi matriks atas RDPT skew. Beberapa sifat dasar ring atas RDPT skew berhasil diperoleh relatif terhadap operasi adisi dan multiplikasi standar. Konstruksi ini murni memandang setiap matriks $A = (a_{ij})$ sebagai matriks berukuran hingga dengan a_{ij} elemen RDPTS dan belum memandang A sebagai elemen RDPT maupun RDPTS.

Dalam perkembanganya muncullah teori matriks berukuran tak hingga dengan indeks bilangan asli. Untuk menjamin terdefinisinya hasil perkalian tak hingga entri-entri matriks di setiap baris oleh [6] diberikan syarat konvergensi deret pangkat formal. Hal ini mengungkap fakta matriks konvensional dan matriks tak hingga dapat dipandang sebagai ring deret pangkat tergeneralisasi. Karena perkalian matriks konvensional tidak mungkin diterapkan pada RDPT secara umum, maka pada paper ini dikonstruksi subring khusus RDPT yang berakibat operasi perkalian matriks mampu terdefinisi pada subring tersbut, sebagai matriks berindeks monoid.

2 Metode Penelitian

Paper ini merupakan studi literatur tentang generalisasi matriks. Pertama matriks A berorde $m \times n$ atas ring R dipandang sebagai bentuk khusus matriks berorde $\infty \times \infty$. Selanjutnya dengan memanfaatkan RDPT sebagai generalisasi ring polynomial dan deret pangkat formal, matriks A dikaji lebih dalam sifat-sifatnya terhadap operasi adisi dan perkalian matriks dikaitkan dengan operasi konvolusi pada RDPT.

Secara detail sebarang matriks $A = (a_{ij})_{m\times n}$ atas ring R dipandang sebagai $A(x,y) \in R[x,y] \cong R[\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0]$, dengan $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ merupakan monoid terurut tegas terhadap urutan lexicography yang komutatif dan kanselatif. Dalam hal ini $R[x,y]$ merupakan ring atas operasi adisi dan multiplikasi matriks standar

$$(a_{il})_{m\times k}(b_{lj})_{k\times n} = (c_{ij})_{m\times n}$$

dengan $c_{ij} = \sum_{l=0}^{k-1} a_{il}b_{lj} = \sum_{l=0}^{k-1} a_{il}id(b_{lj})$, dan $id: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ identitas.

Di sisi lain dengan embedding $R[x,y] = R[\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0]$ dapat dipandang sebagai subring dari ring deret pangkat formal $R[[\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0]] = R[[x,y]]$ terhadap operasi adisi dan konvolusi, sehingga

$$A = (a_{ij})_{m\times n} = \sum_{i,j}^{m,n} a_{ij}\, x^i y^j \in R[[\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0]]$$

dapat diperlakukan sebagai $\tilde{A} = (a_{ij})_{\infty\times\infty} = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}\, x^i y^j$ dengan $a_{ij} = 0$ jika $m < i$ atau $n < j$. Sebagai elemen $R[[\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0]]$, $\tilde{A}$ juga merupakan fungsi dari $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ ke R dengan

$$supp(\tilde{A}) \doteq \{(p,q) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 | \tilde{A}(p,q) \neq 0\}$$

Artin dan narrow.

Tahap selanjutnya ring matriks dengan indeks denumerable $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ diganti $S \times T$ dengan S dan T monoid terurut tegas yang komutatif dan kanselatif, serta homomorfisma monoid $id: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ diganti homomorfisma monoid $\varphi : S \to T$, sehingga diperoleh sistem matriks berindeks monoid berbentuk RDPT $M_{S\times T}(R) = R[[S \times T]]$ terhadap operasi adisi standar dan multiplikasi untuk sebarang $f, g \in M_{S\times T}(R)$

$$(fg)((s,t)) = \sum_{u\in S} f\left((s,\varphi(u))\right) g((u,t)) \qquad (1)$$

Karena infinitas monoid S dan T, Persamaan 1 belum tentu terdefinisi. Untuk itu pembahasan difokuskan pada penentuan syarat tambahan agar persamaan tersebut terdefinisi. Selanjutnya diselidiki struktur subring $R[[S \times T]]$ atas operasi adisi dan multiplikasi dikaitkan dengan operasi konvolusi.

3 Hasil dan Pembahasan

Seperti yang dikembangkan oleh [3], melalui ring komutatif R dengan identitas dan monoid terurut tegas U yang komutatif dan kanselatif urutan dapat dibentuk RDPT

$$R[[U]] = \{f \in R^U \mid supp(f) \text{ Artin dan narrow}\}$$

dengan $R^U = \{g \mid g: U \to R \text{ pemetaan}\}$ dan $supp(f) = \{u \in U \mid f(u) \neq 0\}$. Himpunan $R[[U]]$ merupakan ring terhadap operasi untuk setiap $f, g \in R[[U]]$ dan $u \in U$

$$(f+g)(u) = f(u) + g(u)$$

dan $(f * g)(u) = 0$ jika $\mathcal{X}_{(f,g)}(u) = \emptyset$ atau

$$(f * g)(u) = \sum_{(s,t)\in\mathcal{X}_{(f,g)}} f(s)g(t)$$

$\mathcal{X}_{(f,g)}(u) \neq \emptyset$ dengan $\mathcal{X}_{(f,g)}(u) = \{(s,t) \in supp(f) \times supp(g) \mid s + t = u\}$.

Selanjutnya diambil $U = S \times T$ dengan masing-masing S dan T monoid terurut tegas yang komutatif dan kaselatif terhadap urutannya. Terhadap operasi *component wise* U merupakan monoid komutatif terurut tegas yang kanselatif terhadap urutan lexicography. Untuk sebarang $f \in R\big[[S \times T]\big]$ dan $s \in S$ didefinisikan

$$supp(f)_s = \{\, t \in T \mid f(s,t) \neq 0 \,\}$$

dan untuk sebarang $t \in T$ didefinisikan

$$supp(f)^t = \{\, s \in S \mid f(s,t) \neq 0 \,\}$$

Dari definisi tersebut diperoleh sifat elementer berikut ini

Lema 1 *Untuk sebarang* $f, g \in R\big[[S \times T]\big]$, $s \in S$, *dan* $t \in T$ *memenuhi*

1. $supp(-f)_s = supp(f)_s$ dan $supp(-f)^t = supp(f)^t$
2. $supp(f+g)_s \subseteq supp(f)_s \cup supp(g)_s$ dan $supp(f+g)^t = supp(f)^t \cup supp(g)^t$

Bukti. Merujuk pada sifat $supp(f)$ pada [5]. ■

Selanjutnya didasarkan pada multiplikasi matriks $\tilde{A}_{m\times k}(R)$ dan $\tilde{B}_{k\times n}(R)$ elemen $M_{\infty\times\infty}(R) = R\big[[\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0]\big]$ didefinisikan generalisasi multiplikasi pada $M_{S\times T}(R) = R\big[[S \times T]\big]$. Untuk itu diambil sebarang homomorfisma monoid $\varphi: S \to T$. Untuk sebarang $f, g \in M_{S\times T}(R)$ didefinisikan

$$(fg)\big((s,t)\big) = \sum_{u\in S} f\Big(\big(s, \varphi(u)\big)\Big)\, g\big((u,t)\big) \qquad (1)$$

untuk masing-masing $(s,t) \in S \times T$, jika terdefinisi. Karena S bisa tak hingga, maka tak ada jaminan bentuk adisi tersebut ada. Untuk itu akan dipaparkan beberapa subhimpunan dari $M_{S\times T}(R) = R\big[[S \times T]\big]$ yang membentuk ring terhadap operasi adisi dan multiplikasi matriks.

Homomorfima monoid $\varphi : S \to T$ dikatakan **kompatibel urutan** jika untuk setiap $s, u \in S$ dengan $s \leq u$ berlaku $\varphi(s) \leq \varphi(u)$. Salah satu sifat elementer yang akan digunakan terkait konsep Artin dan narrow sebagai berikut:

Lema 2 Diketahui $\varphi : S \to T$ homomorfisma kompatibel urutan dengan S dan T monoid terurut tegas. Jika $K \subseteq S$ dan K Artin dan narrow, maka $K \times \varphi(K)$ Artin dan narrow terhadap urutan lexicography.

Bukti. Diambil sebarang $\Big(\big(s_i, \varphi(t_i)\big)\Big)_{i\geq 1}$ barisan $K \times \varphi(K)$. Karena K Artin dan narrow, maka terdapat barisan $n_1 < n_2 < \cdots$ sehingga $\big(s_{n_i}\big)_{i\geq 1} \subseteq (s_i)_{i\geq 1}$ dan $s_{n_1} \leq s_{n_2} \leq \cdots$. Terdapat barisan barisan $m_1 < m_2 < \cdots$ dengan $n_i \leq m_i$ untuk masing-masing $1 \leq i$, sehingga $\big(t_{m_i}\big)_{i\geq 1} \subseteq \big(t_{n_i}\big)_{i\geq 1}$ dan $t_{m_1} \leq t_{m_2} \leq \cdots$. Karena φ kompatibel urutan, maka $\varphi\big(t_{m_1}\big) \leq \varphi\big(t_{m_2}\big) \leq \cdots$. Terhadap urutan lexicography $\Big(s_{m_1}, \varphi\big(t_{m_1}\big)\Big) \leq \Big(s_{m_2}, \varphi\big(t_{m_2}\big)\Big) \leq \cdots$, sehingga $K \times \varphi(K)$ Artin dan narrow. ■

3.1 Subring R_S dan R_T

Syarat khusus urutan parsial pada monoid $S \times T$ berupa urutan lexicography atau yang bersifat Artin dan narrow memunculkan struktur subring $R[[S \times T]]$ terhadap operasi adisi dan multiplikasi matriks, meskipun $R[[S \times T]]$ belum tentu ring. Untuk itu diambil himpunan

$$R_S = \left\{ f \in R\big[[S \times T]\big] \,\middle|\, (\forall s \in S)|supp(f)_s| < \infty \right\}$$

dan

$$R_T = \left\{ f \in R\big[[S \times T]\big] \,\middle|\, (\forall t \in T)|supp(f)^t| < \infty \right\}$$

Sebagai contoh dalam $M_{\infty\times\infty}(R) = R\big[[\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0]\big]$ salah satu elemen R_S adalah

$$f(x,y) = \sum_{\substack{i=0\\ j=0}}^{\substack{\infty\\ \infty}} a_{ij}\, x^i y^j = \left(a_{ij}\right)_{i\geq 0, j\geq 0}$$

untuk masing-masing $j \geq 0, n_0 = 1, n_j = n_{j-1} + j$ dan

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & n_{j-1} < i \leq n_j \\ 0, & \text{yang lain} \end{cases}$$

Pada R_S dan R_T setiap elemen $f, g \in R_S, \varphi(u) \in supp(f)^T$ dan $u \in supp(g)_S$ sehingga $\{\varphi(u) \mid u \in S\}$ hingga. Akibatnya pada Persamaan 1 hasil $(fg)\big((s,t)\big) \in R$ terdefinisi. Selain itu ketunggalan hasil penjumlahan juga pasti berlaku, sehingga $f \in R^{S\times T}$. Untuk selanjutnya bahasan hanya memaparkan kajian untuk R_S, karena struktur R_T identik dengan R_S.

Teorema 3 *Jika $S \times T$ terurut lexicography, maka pengaitan adisi dan multiplikasi matriks merupakan operasi biner pada R_S sebagai subhimpunan $R\big[[S \times T]\big]$.*

Bukti. Hanya akan dibuktikan untuk R_S. Karena $R_S \neq \emptyset$, diambil sebarang $f, g \in R_S$. Jelas bahwa $f + g \in R\big[[S \times T]\big]$. Sesuai Lema 1 sifat 2 untuk sebarang $s \in S$, $supp(f+g)_s \subseteq supp(f)_s \cup supp(g)_s$. Karena $supp(f)_s$ dan $supp(g)_s$ hingga, maka $supp(f+g)_s$ hingga. Akibatnya $f + g \in R_S$.

Selanjutnya diambil sebarang barisan $\big((s_i, t_i)\big)_{i\geq 1} \in supp(fg)$. Untuk setiap $1 \leq i$, $0 \neq (fg)\big((s_i,t_i)\big)$, sehingga terdapat $u_i \in S$, yang memenuhi $f\Big(\big(s_i, \varphi(u_i)\big)\Big)g\big((u_i,t_i)\big) \neq 0$. Dengan kata lain

$$\big(s_i, \varphi(u_i)\big) \in supp(f)\,,\ (u_i, t_i) \in supp(g).$$

Karena $supp(g)$ Artin dan narrow, maka terdapat $n_1 < n_2 < \cdots$ dan $\Big(\big(u_{n_i}, t_{n_i}\big)\Big)_{i\geq 1}$ subbarisan $\big((u_i,t_i)\big)_{i\geq 1}$ yang memenuhi

$$\big(u_{n_1}, t_{n_1}\big) \leq \big(u_{n_2}, t_{n_2}\big) \leq \cdots$$

Diketahui " $\leq$ " lexicography, sehingga $t_{n_i} \leq t_{n_2} \leq \cdots$ Subbarisan $\left(\left(s_{n_i}, \varphi\left(u_{n_i}\right)\right)\right)_{i\geq 1} \subseteq$ $supp(f)$, berarti terdapat $m_1 < m_2 < \cdots$ dan $\left(\left(s_{m_i}, \varphi\left(u_{m_i}\right)\right)\right)_{i\geq 1} \subseteq \left(\left(s_{n_i}, \varphi\left(u_{n_i}\right)\right)\right)_{i\geq 1}$ yang memenuhi

$$\left(s_{m_1}, \varphi\left(u_{m_1}\right)\right) \leq \left(s_{m_2}, \varphi\left(u_{m_2}\right)\right) \leq \cdots$$

Karena " $\leq$ " lexicography, maka $s_{m_i} \leq s_{m_2} \leq \cdots$. Akibatnya $t_{m_1} \leq t_{m_2} \leq \cdots$, sehingga $\left(s_{m_1}, t_{m_1}\right) \leq \left(s_{m_2}, t_{m_2}\right) \leq \cdots$ yang berarti $supp(fg)$ Artin dan narrow. Jadi $fg \in R_S$ ■

Tentu saja Teorema 3 juga berlaku jika $S \times T$ Artin dan narrow. Sifat elementer berikut ini menjadi dasar eksistensi subring $R\left[[S \times T]\right]$ relatif terhadap operasi multiplikasi matriks.

Teorema 4 *Diketahui R ring komutatif dengan identitas, S dan T monoid komutatif terurut parsial tegas yang kanselatif, serta $\varphi: S \to S$ homomorfisma. Terhadap urutan lexicography pada $S \times T$ berlaku:*

1. *Pemetaan $0 \in R_S$, dan jika $f \in R_S$, maka $-f \in R_S$,*
2. *Jika $f, g, h \in R_S$, maka $(fg)h = f(gh)$*
3. *Jika $f, g, h \in R_S$, maka $f(g+h) = fg + fh$ dan $(g+h)f = gf + hf$*
4. *Jika ϑ injektif dan φ kompatibel urutan serta S Artin dan narrow, elemen ϑ dengan*

$$\vartheta(s,t) = \begin{cases} 1, & jika\ t = \varphi(s) \\ 0, & jika\ t \neq \varphi(s) \end{cases}$$

merupakan anggota R_S dan $\vartheta f = f$ untuk setiap $f \in R\left[[S \times T]\right]$ dan $f\vartheta = f$ untuk setiap $f \in R\left[[S \times \varphi(S)]\right]$. Khusus jika $S \cong T$ sebagai monoid terurut tegas dapat disimpulkan $\vartheta f = f = f\vartheta$ untuk setiap $f \in R\left[[S \times T]\right]$.

Bukti.

1. Karena $supp(0) = \emptyset$, maka $0 \in R_S$. Untuk sebarng $f \in R_S$ berlaku untuk setiap $s \in S$

$$supp(-f)_s = \{t \in T | -f(s,t) \neq 0\} = supp(f)_s$$

sehingga $-f \in R_S$.

2. Untuk sebarang $(s,t) \in S \times T$, berlaku

$$\begin{aligned}\left((fg)h\right)(s,t) &= \textstyle\sum_{u\in S}(fg)\left(s, \varphi(u)\right)h(u,t) \\ &= \textstyle\sum_{u\in S}\left(\sum_{w\in S} f\left(s,\varphi(w)\right) g\left(w,\varphi(u)\right)\right) h(u,t) \\ &= \textstyle\sum_{w\in S} f\left(s,\varphi(w)\right) \left(\sum_{u\in S} g\left(w,\varphi(u)\right)h(u,t)\right) \\ &= \textstyle\sum_{w\in S} f\left(s,\varphi(w)\right)(gh)(w,t) = \left(f(gh)\right)(s,t)\end{aligned}$$

3. Untuk sebarang $(s,t) \in S \times T$, berlaku

$$\big(f(g+h)\big)(s,t) = \sum_{u\in S} f\big(s,\varphi(u)\big)\big(g(u,t)+h(u,t)\big)$$
$$= \sum_{u\in S}\Big(f\big(s,\varphi(u)\big)g(u,t) + f\big(s,\varphi(u)\big)h(u,t)\Big)$$
$$= (fg+fh)(s,t)$$

4. Karena ϑ injektif, maka $supp(\vartheta) = \{(s,\varphi(s)) | s\in S\} \cong S\times S$. Karena S Artin dan narrow dan φ kompatibel urutan, maka sesui Lemma 2, $supp(\vartheta)$ Artin dan narrow. Jika $f \in R\big[[S\times T]\big]$ dan $(s,t) \in S\times T$, maka

$$(\vartheta f)(s,t) = \sum_{u\in S} \vartheta\big(s,\varphi(u)\big)\, f(u,t)$$
$$= \sum_{\varphi(u)=\varphi(s)} \vartheta\big(s,\varphi(s)\big)\, f(u,t) + 0$$
$$= \sum_{\vartheta(u)=\vartheta(s)} 1\, f(u,t) = f(s,t)$$

karena ϑ injektif. Akibatnya $\vartheta f = f$.

Selanjutnya untuk sebarang $f \in R\big[[S\times\varphi(S)]\big]$ dan $(s,t) \in S\times\varphi(S)$ terdapat $y\in S$ yang memenuhi $t=\varphi(y)$, sehingga

$$(f\vartheta)(s,t) = \sum_{u\in S} f\big(s,\varphi(u)\big)\vartheta(u,t) = \sum_{u\in S} f\big(s,\varphi(u)\big)\vartheta\big(u,\varphi(y)\big)$$
$$= \sum_{\vartheta(u)=\vartheta(y)} f\big(s,\varphi(u)\big)\vartheta\big(u,\varphi(y)\big)$$

Karena φ injektif, maka $u=y$, sehingga $(f\vartheta)(s,t) = f\big(s,\varphi(y)\big)\vartheta\big(y,\varphi(y)\big) = f(s,t)$. Akibatnya $f\vartheta = f$. ■

Berdasarkan Teorema 3 dan 4 dapat disimpulkan:

Teorema 5 *Diketahui R ring komutatif dengan identitas, S dan T monoid komutatif terurut parsial tegas yang kanselatif, $\varphi: S\to S$ homomorfisma, serta urutan lexicography pada $S\times T$. Himpunan R_S dan R_T merupakan subring $R\big[[S\times T]\big]$ terhadap operasi adisi dan multiplikasi matriks.*

Selanjutnya salah satu dugaan yang muncul di antara sistem modul dan ring adalah sistem aljabar atas suatu ring. Karena R_S subring $R\big[[S\times T]\big]$, maka $R\big[[S\times T]\big]$ modul atas R_S. Namun secara umum $R\big[[S\times T]\big]$ belum tentu aljabar atas R_S. Sebagai contoh pada kasus standar $\mathbb{Z}\big[[\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0]\big]$ dengan $\varphi = id$ diambil $1\in\mathbb{Z}_{\mathbb{N}_0}$ dan $f,g \in \mathbb{Z}\big[[\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0]\big]$ dengan

$$1(s,t) = \begin{cases}1, & (s,t)=(0,0)\\ 0, & (s,t)\neq(0,0)\end{cases},\quad f(s,t) = \begin{cases}1, & (s,t)=(1,1)\\ 0, & (s,t)\neq(1,1)\end{cases},\quad \text{dan}\quad g(s,t) = \begin{cases}1, & s\le t\\ 0, & s>t\end{cases}.$$

Karena

$$1(f*g)(s,t) = \begin{cases}1, & (0,t), 1\le t\\ 0, & \text{yang lain}\end{cases}$$

maka $(1\cdot f)*g = 0*g = 0 \neq 1(f*g)$, sehingga $\mathbb{Z}\big[[\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0]\big]$ bukan aljabar atas $\mathbb{Z}_{\mathbb{N}_0}$.

3.2 Ideal I_S dan I_T

Sebagaimana telah dikenal pada RDPT $R\big[[S\times T]\big]$, untuk sebarang I ideal R dapat dibentuk

$$I\big[[S\times T]\big]=\big\{\, f\in R\big[[S\times T]\big] \big| (\forall(s,t)\in S\times T) f(s,t)\in I\,\big\}.$$

Himpunan $I\big[[S\times T]\big]$ merupakan ideal $R\big[[S\times T]\big]$ atas " $+$ " dan " $*$ ". Selanjutnya dibentuk

$$I_S=\big\{\, f\in I\big[[S\times T]\big] \big| (\forall s\in S)\lceil supp(f)_s\rceil<\infty\,\big\}.$$

Teorema 6 *Terhadap operasi " $+$ " dan " $.$ " himpunan I_S merupakan ideal R_S; dan I_T ideal R_T..*

Bukti: Jelas $0_{R[[S\times T]]}\in I_S$. Untuk sebarang $f,g\in I_S$ berlaku $f-g\in I\big[[S\times T]\big]$. Selain itu untuk msing-masing $s\in S$ berlaku $supp(f-g)_s\subseteq supp(f)_s\cup supp(g)_{s.}$ Akibatnya $supp(f-g)_s$ hingga, sehingga $f-g\in \mathrm{I}_S$.

Untuk sebarang $f\in R_S$ dan $g\in I_S$ berlaku $fg,gf\in R_S$. Untuk setiap $(s,t)\in S\times T$

$$(fg)(s,t)=\sum_{u\in S} f\big(s,\vartheta(u)\big)g(u,t)\in I$$

sehingga $fg\in I_S$. Karena $gf\in I_S$ akibatnya I_S ideal R_S. ∎

Secara umum I_S belum tentu ideal $R\big[[S\times T]\big]$. Sebagai contoh diambil $\mathbb{Z}\big[[\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0]\big]$ terhadap operasi dan relasi urutan standar pada $\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0$, serta $\varphi:\mathbb{N}_0\to\mathbb{N}_0$ homomorfisma identitas. Diambil $I=2\mathbb{Z}$ dan pemetaan

$$\varepsilon(i,j)=\begin{cases}2, & i\geq j\\ 0, & i<j\end{cases},\qquad f(i,j)=\begin{cases}1, & i\leq j\\ 0, & i>j\end{cases}$$

Terlihat $\varepsilon\in I_{\mathbb{N}_0}$ dan $f\in\mathbb{Z}\big[[\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0]\big]$ dengan $f\varepsilon$ tak terdefinisi.

Selanjutnya jika I ideal R dapat dibentuk ring kuosien R/I, RDPT $(R/I)\big[[S\times T]\big]$ terhadap " $+$ " dan " $*$ ", dan ring $(R/I)_S$ terhadap " $+$ " dan " $.$ ".

Teorema 7 Berdasarkan asumsi-asumsi pada Teorema 5 diperoleh $R_S/I_S\cong(R/I)_S$

Bukti. Diambil pengaitan $\alpha: R_S/I_S\to(R/I)_S$ dengan $\alpha\big(\bar f\big)=F$ untuk setiap $\bar f\in R_S/I_S$ dan

$$F(s,t)=f(s,t)+I$$

untuk setiap $(s,t)\in S\times T$. Artinya $f(s,t)+I\in R/I$ untuk setiap $(s,t)\in S\times T$. Kemudian jika $(s,t)=(u,v)$ berlaku $f(s,t)=f(u,v)$, sehingga $F(s,t)=F(u,v)$. Jadi $F\in(R/I)^{S\times T}$.

Untuk sebarang $(s,t)\in supp(F)$ berlaku $\bar 0\neq F(s,t)=f(s,t)+I$. Artinya $f(s,t)\notin I$, sehingga $f(s,t)\neq 0$, yang berarti $(s,t)\in supp(f)$. Akibatnya $supp(F)\subseteq supp(f)$, jadi $supp(F)$ Artin dan narrow.

Selanjutnya jika $s\in S$ dan $t\in supp(F)_s$, maka $\bar 0\neq F(s,t)$. Akibatnya $f(s,t)\neq 0$, sehingga $supp(F)_s\subseteq supp(f)_s$ hingga. Akibatnya $\alpha\big(\bar f\big)=F\in(R/I)_S$.

Untuk sebarang $\bar f,\bar g\in R_S/I_S$ dan $(s,t)\in S\times T$

$$\begin{aligned}\alpha\big(\overline{(f+g)}\big)(s,t) &= (f+g)(s,t)+I = \big(f(s,t)+g(s,t)\big)+I\\ &= (f(s,t)+I)+(g(s,t)+I)\\ &= \alpha(\bar{f})(s,t)+\alpha(\bar{g})(s,t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha\big(\overline{(fg)}\big)(s,t) &= (fg)(s,t)+I = \sum_{u\in S} f\big(s,\varphi(u)\big)g(u,t)+I\\ &= \sum_{u\in S}\big(f\big(s,\varphi(u)\big)g(u,t)+I\big)\\ &= \sum_{u\in S}\big(f\big(s,\varphi(u)\big)+I\big)(g(u,t)+I)\\ &= \sum_{u\in S}\alpha(\bar{f})\big(s,\varphi(u)\big)\alpha(\bar{g})(u,t) = \Big(\alpha(\bar{f})\alpha(\bar{g})\Big)(s,t)\end{aligned}$$

Jadi α homomorfisma ring.

Misalkan $\bar{f},\bar{g}\in(R_S)/(I_S)$ yang memenuhi $\alpha(\bar{f})=\alpha(\bar{g})$. Akibatnya jika $(s,t)\in S\times T$ maka $f(s,t)+I=\alpha(\bar{f})(s,t)=\alpha(\bar{g})(s,t)=g(s,t)+I$. Berarti

$$(f-g)(s,t)=f(s,t)-g(s,t)\in I$$

sehingga $f-g\in I_S$ dan $\bar{f}=\bar{g}$. Akibatnya α injektif.

Diambil sebarang $F\in(R/I)_S$. Untuk setiap $(s,t)\in S\times T$, berlaku $F(s,t)=a_{(s,t)}+I$ untuk suatu $a_{(s,t)}\in R-\{0\}$ jika $a_{(s,t)}\notin I$ dan $a_{(s,t)}=0$ jika $a_{(s,t)}\in I$. Didefinisikan $f{:}\,S\times T\to R$ dengan $f(s,t)=a_{(s,t)}$ untuk setiap $(s,t)\in S\times T$.

Jika $(s,t)\in supp(f)$, maka $0\neq f(s,t)=a_{(s,t)}\notin I$, sehingga $a_{(s,t)}\in supp(F)$. Dengan kata lain $supp(f)\subseteq supp(F)$. Karena $supp(F)$ Artin dan narrow, maka $supp(f)$ Artin dan narrow. Selain itu untuk sebarang $s\in S$ berlaku $supp(f)_s\subseteq supp(F)_s$ hingga. Akibatnya f elemen R_S dan $\bar{f}=f+I_S\in(R_S)/(I_S)$ memenuhi $\alpha(\bar{f})=F$. Jadi α surjektif. ∎

4 Simpulan

Melalui RDPT dapat dikonstruksi subring R_S yang terdiri dari fungsi-fungsi dengan support yang Artin dan narrow. Setiap elemen R_S dapat dipandang sebagai matriks-matriks berindeks monoid yang tidak harus berentri hingga. Konsep ini merupakan generalisasi matriks berukuran hingga dengan indeks berbentuk kartesian bilangan asli. Dengan memanfaatkan struktur R_S dan ideal I konstruksi dapat dikembangkan pada pembentukan ideal I_S di R_S.

Sebagai akibat dari konstruksi subring R_S diperoleh beberapa masalah terbuka yang sangat potensial untuk dikembangkan sebagai kajian lebih lanjut di antaranya:

1. Penentuan syarat cukup agar R_S merupakan subring RDPT terhadap operasi konvolusi, sehingga membuka peluang lebih lanjut penelitian tentang struktur dan karakterisasi RDPT sebagai aljabar atas R_S.
2. Struktur submodul khusus yang dibentuk dari modul deret pangkat tergeneralisasi melalui sebarang modul sebagai himpunan matriks berindeks monoid atas R_S.

5 Daftar Pustaka

[1] O. Keçilioğlu and H. Gündoğan, "Generalized Matrix Multiplication and Its Some Application," *Facta Univ. Ser. Math. Informatics*, pp. 789–798, 2018.

[2] I. Gohberg, P. Lancaster, and L. Rodman, *Matrix Polynomials*. Springer, 2005.

[3] P. Ribenboim, "Noetherian Rings of Generalized Power Series," *J. pure Appl. Algebr.*, vol. 79, no. 3, pp. 293–312, 1992.

[4] A. Faisol and F. Fitriani, "The Ring Homomorphisms of Matrix Rings over Skew Generalized Power Series Rings," *Cauchy J. Mat. Murni dan Apl.*, vol. 7, no. 1, pp. 129–135, 2021.

[5] S. Rugayah, A. Faisol, and F. Fitriani, "Matriks atas Ring Deret Pangkat Tergeneralisasi Miring," *Barekeng J. Ilmu Mat. dan Terap.*, vol. 15, no. 1, pp. 157–166, 2021.

[6] L. Matysiak, W. Przewozniak, and N. Rulinska, "Matrices of Infinite Dimensions and Their Applications," *arXiv Prepr. arXiv2104.13404*, 2021.