

Analisis Kestabilan dan Kontrol Optimal pada Model Matematika Penyebaran Penyakit Mumps

Miswanto^{1*}, Farah Biba², Windarto³

^{1,2,3}Departemen Matematika, Universitas Airlangga, Surabaya Indonesia

*Corresponding author: miswanto@fst.unair.ac.id

Diajukan: 10 Februari 2024, Diperbaiki: 1 April 2024, Diterima: 4 April 2024

Abstrak

Mumps adalah penyakit akut pada anak-anak dan dewasa, yang disebabkan oleh virus *paramyxovirus*. Pada penelitian ini, dilakukan analisis kestabilan model matematika penyebaran penyakit *mumps* dan penerapan kontrol optimal yaitu pencegahan dengan pemberian vaksinasi dan pengobatan. Berdasarkan analisis model tanpa kontrol diperoleh titik setimbang non endemik dan titik setimbang endemik. Titik setimbang non endemik stabil asimtotis lokal jika *basic reproduction number* kurang dari satu ($R_0 < 1$), sedangkan titik setimbang endemik cenderung stabil asimtotis lokal jika *basic reproduction number* lebih dari satu ($R_0 > 1$). Kontrol optimal pada model matematika penyebaran penyakit *mumps* dilakukan dengan menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin. Hasil simulasi numerik menunjukkan bahwa pemberian kontrol yaitu pencegahan dan pengobatan secara bersamaan dinilai paling efektif dan efisien untuk meminimumkan jumlah populasi individu yang terinfeksi penyakit *mumps* dengan biaya lebih minimal.

Kata Kunci: *Mumps*, Titik Setimbang, Kestabilan, *Basic Reproduction Number*, Kontrol Optimal.

Abstract

Mumps is an acute disease in children and adults, caused by paramyxovirus. In this research, a mathematical model analysis of the spread of mumps disease was carried out and the application of optimal control, namely prevention by giving vaccinations and treatment. Based on the analysis of the model without control obtained a non-endemic equilibrium point and an endemic equilibrium point. The non-endemic equilibrium point is local asymptotic stable if the basic reproduction number is less than one ($R_0 < 1$), while the endemic equilibrium point tends to be local asymptotic stable if the basic reproduction number is more than one ($R_0 > 1$). Optimal control on the mathematical model of the spread of mumps disease was carried out using the Pontryagin's Maximum Principle. The results of numerical simulations show that the provision of control, namely prevention and treatment, is simultaneously considered the most effective and efficient to minimize the number of individual populations infected with mumps disease with minimum cost.

Keywords: *Mumps*, *Equilibrium Point*, *Stability*, *Basic Reproduction Number*, *Optimal Control*.

1 Pendahuluan

Mumps adalah penyakit akut pada anak-anak dan dewasa, yang disebabkan oleh *paramyxovirus*. Diketahui bahwa manusia adalah satu-satunya inang untuk virus mumps. Mumps sering dilaporkan pada anak usia 5-9 tahun, tetapi remaja dan orang dewasa tidak menutup kemungkinan juga dapat terkena [1]. Di seluruh dunia, mumps merupakan penyakit yang tidak

dikontrol sebaik campak dan rubella sehingga diketahui bahwa terdapat 500.000 kasus mumps dari tahun 1999-2019 yang tercatat menurut laporan tahunan WHO [2].

Proses penularan virus mumps yaitu virus tersebut bereplikasi pada saluran pernapasan dan ditularkan melalui kontak langsung dengan air liur atau tetesan pernapasan antara individu yang terinfeksi dengan individu yang rentan. Risiko penyebaran virus meningkat apabila terjadi kontak secara terus menerus antara individu rentan dengan individu yang menderita. Periode infeksi virus *mumps* sekitar 2 hari sebelum munculnya *parotitis* hingga 5 hari setelah munculnya *parotitis*, meskipun virus tersebut telah diisolasi pada air liur sebelum munculnya *parotitis* [3]. Pada umumnya reinfeksi penyakit *mumps* sangat jarang terjadi karena tubuh akan mendapat kekebalan terhadap virus *mumps* seumur hidup setelah terinfeksi virus tersebut [4].

Penyakit *mumps* dapat menyebabkan komplikasi yang umumnya terjadi pada orang dewasa dibanding dengan anak-anak. Komplikasi *mumps* yang paling umum terjadi dibandingkan dengan komplikasi *mumps* lainnya adalah gangguan pendengaran (ketulian). Ketulian yang disebabkan oleh *mumps* biasanya sangat serius dan permanen. Atrofi dari sel-sel rambut yang telah diamati, menunjukkan bahwa gangguan pendengaran akibat *mumps* disebabkan karena kerusakan parah pada koklea akibat infeksi virus [5].

Tindakan pencegahan sangat perlu dilakukan untuk menekan angka komplikasi yang disebabkan oleh virus *mumps*. Vaksin tersebut dapat berupa vaksin MMR (Measles-Mumps-Rubella) dan MMRV (Measles-Mumps-Rubella-varicella). Dua dosis vaksin MMR dapat mencegah tertular penyakit *mumps* secara efektif hingga 88%. Selain tindakan pencegahan terdapat tindakan pengobatan. Pengobatan untuk *mumps* dilakukan secara suportif. Pengobatan tersebut dilakukan ketika gejala klinis pembengkakan pada kelenjar saliva muncul. Obat analgesik dan kompres dingin atau hangat bermanfaat untuk meredakan pembengkakan *parotitis* [6].

Penelitian mengenai penyebaran penyakit *mumps* menarik untuk dimodelkan secara matematika. Beberapa ilmuwan telah mengembangkan model matematika yang berhubungan dengan *mumps* diantaranya yang ditulis oleh Li dkk [7] yang mengkaji model matematika penyebaran penyakit *mumps* di dataran Cina. Pada jurnal ini terdapat enam kompartemen yaitu populasi manusia rentan, populasi manusia yang terpapar dan belum bisa menginfeksi, populasi manusia yang terinfeksi dengan gejala klinis, populasi manusia yang terinfeksi tanpa gejala klinis, populasi manusia yang sudah divaksinasi, dan populasi manusia yang sembuh. Kitano [8] mengkaji model matematika penyebaran vaksinasi *mumps* di Jepang. Pada jurnal ini memodelkan insiden dari populasi manusia yang terinfeksi dengan transmisi antara populasi rentan dan populasi terinfeksi dengan standard incidence rate. Pongsumpun [9] mengkaji model matematika penyebaran *mumps* di Thailand. Pada jurnal ini terdapat empat kompartemen yaitu *SEIR*, dengan

S merupakan populasi manusia rentan, E merupakan populasi manusia yang terpapar, I merupakan populasi manusia yang terinfeksi, dan R adalah populasi manusia yang sembuh. Ayoade dkk. [10] mengkaji model matematika penyebaran penyakit *mumps* dengan model *SIR* (*Susceptible, Infectious, Recovered*). Peng dkk. [11] mengkaji model matematika penyebaran penyakit *mumps* di Wuhan, China dengan estimasi parameter terhadap jumlah populasi individu yang terinfeksi *mumps* di Wuhan. Mohammadi dkk. [12] mengkaji model matematika penyebaran penyakit *mumps* dengan memperhatikan populasi individu yang terkena gangguan pendengaran (ketulian) saat terinfeksi *mumps*. Model matematika tersebut memiliki 3 kompartemen yaitu individu rentan dengan pendengaran normal (S), individu yang mengalami gangguan pendengaran (ketulian) saat terinfeksi *mumps* (L), individu yang sembuh pendengarannya (R).

Berdasarkan pemaparan di atas, penulis tertarik untuk mengkaji dan memodifikasi model yang merujuk pada paper berjudul “*A theoretical study of the Caputo–Fabrizio fractional modeling for hearing loss due to Mumps virus with optimal control*” yang ditulis oleh Mohammadi dkk. [12]. Modifikasi yang dilakukan yaitu menambahkan kompartemen populasi individu yang terekspose (E) dan populasi individu yang terinfeksi (I). Kemudian penulis juga memodifikasi laju penyebaran penyakit *mumps* yang semula *bilinear incidence rate* menjadi *saturated incidence rate*. Modifikasi ini didasari pada jumlah penyebaran penyakit *mumps* yang tinggi pada beberapa waktu lalu, dikarenakan tingkat kesadaran populasi manusia sehat masih cukup rendah. *Saturated incidence rate* memperhatikan efek kejenuhan (kepadatan) populasi terinfeksi. Ketika kepadatan populasi terinfeksi semakin meningkat, populasi sehat cenderung berhati-hati sehingga tidak mudah tertular oleh individu terinfeksi.

2 Model Matematika

Model matematika penyebaran penyakit *mumps* ini merujuk pada penelitian yang dilakukan oleh Mohammadi dkk. [12] terdiri atas 3 kompartemen yaitu populasi manusia rentan dengan pendengaran normal (S), populasi manusia yang kehilangan pendengaran saat terinfeksi (L), populasi manusia yang pulih (R). Penulis akan melakukan modifikasi model dengan menambah kompartemen populasi yang terpapar (E) dan populasi yang terinfeksi dengan pendengaran normal (I), serta memodifikasi laju penyebaran penyakit *mumps* yang semula *bilinear incidence rate* menjadi *saturated incidence rate*. Adapun asumsi yang digunakan pada model matematika tersebut adalah sebagai berikut:

1. Tidak ada penyebaran penyakit lain selain penyakit *mumps*.

2. Setiap manusia lahir dalam keadaan rentan terhadap penyakit *mumps*.
3. Populasi manusia rentan terinfeksi *mumps* (S) bertambah karena adanya laju pertumbuhan secara eksponensial.
4. Populasi yang sakit (I) dan (L) dapat menginfeksi populasi rentan (S).
5. Populasi terpapar (E) dapat berkembang menjadi populasi terinfeksi (I) dan (L).
6. Populasi yang telah sembuh (R) memiliki kekebalan sehingga tidak terjadi reinfeksi.
7. Semua parameter bernilai konstan positif.

Berikut ini notasi dan deskripsi dari setiap variabel dan parameter yang akan digunakan pada model matematika penyebaran penyakit mumps.

Tabel 1. Notasi dan Deskripsi Variabel

Kompartemen	Deskripsi
$S(t)$	Populasi individu yang rentan terhadap penyakit <i>mumps</i> pada saat t
$E(t)$	Populasi individu yang terpapar penyakit <i>mumps</i> dan belum dapat menginfeksi pada saat t .
$I(t)$	Populasi individu yang terinfeksi penyakit <i>mumps</i> dengan pendengaran normal pada saat t
$L(t)$	Populasi individu yang terinfeksi penyakit <i>mumps</i> dan kehilangan pendengaran pada saat t
$R(t)$	Populasi individu yang sembuh dari infeksi penyakit <i>mumps</i> pada saat t

Tabel 2. Notasi dan Deskripsi Parameter

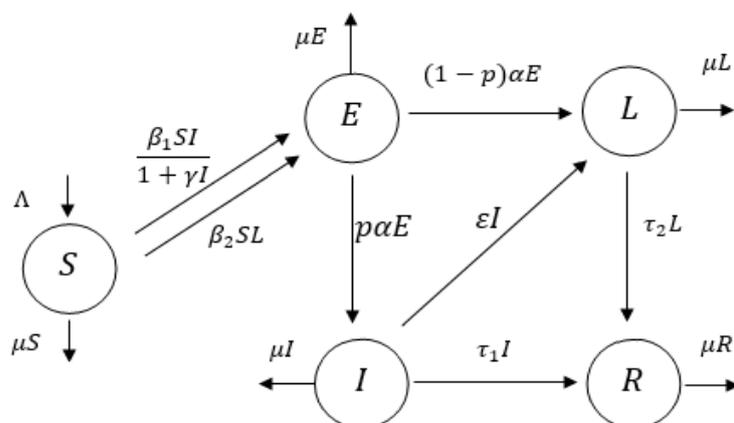
Parameter	Deskripsi
Λ	Laju pertambahan individu baru yang rentan terinfeksi <i>mumps</i>
β_1	Laju penyebaran penyakit <i>mumps</i> oleh populasi terinfeksi <i>mumps</i>
β_2	Laju penyebaran penyakit <i>mumps</i> oleh populasi yang kehilangan pendengaran saat terinfeksi
μ	Laju kematian alami
α	Laju perkembangan populasi terpapar menjadi populasi terinfeksi
ε	Laju perkembangan populasi terinfeksi dengan pendengaran normal menjadi populasi terinfeksi yang kehilangan pendengaran
τ_1	Laju kesembuhan untuk individu terinfeksi dengan pendengaran normal
τ_2	Laju kesembuhan individu terinfeksi yang kehilangan pendengaran
p	proporsi individu yang terpapar
γ	Konstanta saturasi

Selanjutnya untuk mempermudah penulisan maka variabel $S(t), E(t), I(t), L(t)$, dan $R(t)$ berturut-turut ditulis dengan S, E, I, L, R . Variabel tersebut menyatakan populasi tertentu, sehingga diasumsikan $S, E, I, L, R \geq 0$. Selain itu, kelajuan merupakan besaran yang tidak bergantung pada arah, sehingga diasumsikan:

$$\Lambda, \beta_1, \beta_2, \mu, \alpha, \varepsilon, \tau_1, \tau_2, \gamma, p, \sigma \geq 0$$

Karena p merupakan proporsi individu yang terpapar, maka nilai p adalah $0 \leq p \leq 1$.

Berdasarkan pemaparan sebelumnya, diagram transmisi model matematika penyebaran penyakit *mumps* adalah sebagai berikut:



Gambar 1. Diagram Transmisi Model

Keterangan:

—————> : Mengurangi populasi awal atau menambah populasi yang dituju.

Berdasarkan diagram transmisi pada gambar 1 maka dapat dibentuk model matematika penyebaran penyakit *mumps* sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \frac{\beta_1 SI}{1 + \gamma I} - \beta_2 SL - \mu S \quad (1)$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\beta_1 SI}{1 + \gamma I} + \beta_2 SL - \alpha E - \mu E \quad (2)$$

$$\frac{dI}{dt} = p\alpha E - \varepsilon I - \tau_1 I - \mu I \quad (3)$$

$$\frac{dL}{dt} = (1 - p)\alpha E + \varepsilon I - \tau_2 L - \mu L \quad (4)$$

$$\frac{dR}{dt} = \tau_1 I + \tau_2 L - \mu R \quad (5)$$

3 Hasil dan Pembahasan

Pada bagian ini akan dilakukan analisis kestabilan titik setimbang model matematika penyebaran penyakit *mumps*. Sebelum dilakukan uji kestabilan titik setimbang, akan ditentukan

terlebih dahulu titik setimbang dengan syarat eksistensinya dan bilangan reproduksi dasar. Berdasarkan persamaan (1) – (5) didapatkan dua titik setimbang yaitu titik setimbang bebas (non endemik) dan titik setimbang endemik.

3.1 Titik Setimbang Model

Titik setimbang non endemik adalah suatu kondisi ketika tidak terjadi penyebaran penyakit *mumps* dalam populasi. Keadaan ini terjadi ketika populasi individu terinfeksi penyakit mumps dan populasi individu terinfeksi penyakit mumps yang kehilangan pendengaran bernilai nol ($I = L = 0$) sehingga menyebabkan populasi individu yang terpapar penyakit *mumps* dan sembuh dari penyakit *mumps* bernilai nol. Misalkan titik setimbang penyebaran penyakit *mumps* dinyatakan sebagai $E_0 = (S, E, I, L, R)$, maka dengan mensubstitusikan nilai $E = I = L = R = 0$ kedalam persamaan (1) – (5) diperoleh titik setimbang non endemik dari model matematika penyebaran penyakit *mumps* $E_0 = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0, 0, 0\right)$.

Selanjutnya akan ditentukan nilai dari bilangan reproduksi dasar (R_0). Bilangan R_0 merupakan kondisi ambang batas suatu keadaan untuk menentukan apakah dalam suatu populasi terjadi penyebaran penyakit atau tidak [13], [14]. Dalam menentukan bilangan reproduksi dasar (R_0) menggunakan titik setimbang non endemik. Dengan menggunakan metode *Next Generation Matrix* (NGM) diperoleh nilai R_0 sebagai berikut:

$$R_0 = \frac{\Lambda\alpha(\beta_1 p c_3 + \beta_2 c_2(1-p) + \beta_2 p \epsilon)}{\mu c_1 c_2 c_3} \quad (6)$$

Titik setimbang selanjutnya dari model matematika penyebaran penyakit *mumps* adalah titik setimbang endemik. Titik setimbang endemik menunjukkan suatu kondisi ketika terjadi penyebaran penyakit *mumps* dalam suatu populasi. Kondisi ini terjadi ketika terdapat populasi individu terinfeksi *mumps* dan populasi individu terinfeksi *mumps* yang kehilangan pendengaran ($I \neq 0, L \neq 0$). Selain itu, populasi individu yang rentan, individu yang terpapar, dan individu yang sembuh juga bernilai tidak sama dengan nol.

Misalkan titik setimbang endemik dinyatakan sebagai $E_1 = (S^*, E^*, I^*, L^*, R^*)$. Berdasarkan perhitungan pada persamaan (1) – (5), diperoleh titik setimbang endemik dari model matematika penyebaran penyakit *mumps* sebagai berikut:

$$S^* = \frac{\Lambda(1 + \gamma I^*)}{\beta_1 I^* + ((1-p)\beta_2 \alpha b_1 b_2 c_2 I^* + \beta_2 \epsilon b_2 I^* + \mu)(1 + \gamma I^*)}$$

$$E^* = b_1 c_2 I^*$$

$$L^* = (1-p)\alpha b_1 b_2 c_2 I^* + \epsilon b_2 I^*$$

$$R^* = \frac{\tau_1 I^* + \tau_2 ((1-p)\alpha b_1 b_2 c_2 I^* + \epsilon b_2 I^*)}{\mu}$$

dengan I^* adalah akar positif dari persamaan

$$k_1 I^2 + k_2 I + k_3 = 0 \quad (7)$$

dengan

$$k_1 = \beta_2 \alpha b_1^2 b_2 c_1 c_2^2 \gamma (1-p) + \beta_2 b_1 b_2 c_2 c_1 \varepsilon \gamma$$

$$k_2 = \beta_1 b_1 c_2 c_1 + \beta_2 \alpha b_1^2 b_2 c_1 c_2^2 - p \beta_2 \alpha b_1^2 b_2 c_1 c_2^2 + \beta_2 b_1 b_2 c_1 c_2 \varepsilon + \mu b_1 c_2 c_1 \gamma - \Lambda \beta_2 \alpha b_1 b_2 c_2 \gamma + \Lambda p \beta_2 \alpha b_1 b_2 c_2 \gamma - \Lambda \beta_2 \varepsilon b_2 \gamma$$

$$k_3 = b_1 c_2 c_1 \mu - \Lambda \beta_1 - \Lambda \beta_2 \alpha b_1 b_2 c_2 + \Lambda p \beta_2 \alpha b_1 b_2 c_2 - \Lambda \beta_2 \varepsilon b_2$$

$$b_1 = \frac{1}{p\alpha}, \quad (8)$$

$$b_2 = \frac{1}{c_3} \quad (9)$$

$$c_1 = \alpha + \mu \quad (10)$$

$$c_2 = \varepsilon + \tau_1 + \mu \quad (11)$$

$$c_3 = \tau_2 + \mu \quad (12)$$

Dari sini persamaan kuadrat (7) akan mempunyai satu akar positif jika $\frac{k_3}{k_1} < 0$. Kemudian karena semua parameter diasumsikan bernilai positif sehingga k_1 bernilai positif atau $k_1 > 0$. Selanjutnya akan ditentukan syarat agar $k_3 < 0$ sehingga kondisi $\frac{k_3}{k_1} < 0$ terpenuhi.

Dari sini k_3 akan bernilai kurang dari nol jika memenuhi syarat berikut:

$$\Leftrightarrow b_1 c_2 c_1 \mu - \Lambda \beta_1 - \Lambda \beta_2 \alpha b_1 b_2 c_2 + \Lambda p \beta_2 \alpha b_1 b_2 c_2 - \Lambda \beta_2 \varepsilon b_2 < 0$$

$$\Leftrightarrow 1 < \frac{\Lambda \alpha (\beta_1 c_3 p - \beta_2 (p c_2 - p \varepsilon - c_2))}{\mu c_2 c_1 c_3}$$

$$\Leftrightarrow R_0 > 1$$

Karena populasi harus bernilai positif sebagai tanda keberadaan populasi tersebut, maka terdapat syarat eksistensi yang harus dipenuhi untuk menjamin $I^* > 0$.

$$i. \quad b_1 c_2 c_1 \mu - \Lambda \beta_1 - \Lambda \beta_2 \alpha b_1 b_2 c_2 + \Lambda p \beta_2 \alpha b_1 b_2 c_2 - \Lambda \beta_2 \varepsilon b_2 < 0$$

$$\Leftrightarrow 1 < \frac{\Lambda \alpha (\beta_1 c_3 p - \beta_2 (p c_2 - p \varepsilon - c_2))}{\mu c_2 c_1 c_3} \Leftrightarrow R_0 > 1$$

Berdasarkan titik setimbang endemik (E_1) yang telah diperoleh, E_1 akan eksis atau ada jika memenuhi syarat eksistensi $R_0 > 1$ [14]

3.2 Analisis Kestabilan Titik Setimbang Model

3.2.1 Analisis Kestabilan Titik Setimbang Non Endemik

Selanjutnya, untuk melakukan analisis kestabilan titik setimbang non endemik, akan disubstitusikan titik setimbang non endemik pada matriks Jacobian sehingga diperoleh sebagai berikut:

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} -\mu & 0 & \frac{-\beta_1\Lambda}{\mu} & \frac{-\beta_2\Lambda}{\mu} & 0 \\ 0 & -c_1 & \frac{\beta_1\Lambda}{\mu} & \frac{-\beta_2\Lambda}{\mu} & 0 \\ 0 & p\alpha & -c_2 & 0 & 0 \\ 0 & (1-p)\alpha & \varepsilon & -c_3 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_1 & \tau_2 & -\mu \end{pmatrix}$$

dengan $c_1 - c_3$ dapat dilihat pada persamaan (10) – (12).

Akibatnya, diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut:

$$(\lambda + \mu)(\lambda + \mu)(\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3) = 0 \quad (13)$$

dengan

$$a_1 = c_1 + c_2 + c_3$$

$$a_2 = c_1c_3 + c_2c_3 + c_1c_2 - \frac{\beta_2\Lambda\alpha}{\mu} + \frac{p\beta_2\Lambda\alpha}{\mu} - \frac{p\beta_1\Lambda\alpha}{\mu}$$

$$a_3 = c_1c_2c_3 - \frac{\beta_2\Lambda p\alpha\varepsilon}{\mu} - \frac{\beta_2\Lambda\alpha c_2}{\mu} + \frac{p\beta_2\Lambda\alpha c_2}{\mu} - \frac{p\beta_1\Lambda\alpha c_3}{\mu}$$

Dari persamaan karakteristik (13), diperoleh akar-akar persamaannya adalah

$$\lambda_{1,2} = -\mu < 0$$

dan sisanya adalah akar dari persamaan berikut:

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 \quad (14)$$

Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz, karena semua paramter model diasumsikan bernilai positif,

maka $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ jika $c_1c_3 + c_2c_3 + c_1c_2 + \frac{p\beta_2\Lambda\alpha}{\mu} > \frac{\beta_2\Lambda\alpha}{\mu} + \frac{p\beta_1\Lambda\alpha}{\mu}$, $a_3 > 0$ dan $a_1a_2 - a_3 > 0$.

Dengan demikian agar $a_3 > 0$ maka:

$$c_1c_2c_3 + \frac{\beta_2\Lambda p\alpha\varepsilon}{\mu} - \frac{\beta_2\Lambda\alpha c_2}{\mu} + \frac{p\beta_2\Lambda\alpha c_2}{\mu} - \frac{p\beta_1\Lambda\alpha c_3}{\mu} > 0, \text{ sehingga diperoleh:}$$

$$\Leftrightarrow -c_1c_2c_3 \left(-1 + \frac{\Lambda\alpha(\beta_1pc_3 + \beta_2c_2(1-p) + \beta_2p\varepsilon)}{\mu c_1c_2c_3} \right) > 0$$

$$\Leftrightarrow c_1c_2c_3(1 - R_0) > 0.$$

Hal ini berarti diperoleh: $R_0 < 1$.

Kemudian ditunjukkan $a_1a_2 - a_3 > 0$,

$$\begin{aligned}
& (c_1 + c_2 + c_3) \left(c_1 c_3 + c_2 c_3 + c_1 c_2 - \frac{\beta_2 \Lambda \alpha}{\mu} + \frac{p \beta_2 \Lambda \alpha}{\mu} - \frac{p \beta_1 \Lambda \alpha}{\mu} \right) - (c_1 c_2 c_3 (1 - R_0)) > 0 \\
& \Leftrightarrow \frac{\Lambda \beta_2 p \varepsilon}{\mu} + c_1^2 c_2 + c_1^2 c_3 + c_1 c_2^2 + 2c_1 c_2 c_3 + c_1 c_3^2 + c_2^2 c_3 \mu + c_2 c_3^2 \\
& \quad > \frac{\Lambda \alpha c_1}{\mu} (\beta_1 p + \beta_2 (1 - p)) + \frac{\Lambda \alpha}{\mu} (\beta_1 c_2 p + \beta_2 c_3 (1 - p))
\end{aligned}$$

Berdasarkan uraian diatas, titik setimbang non endemik akan stabil asimtotis jika memenuhi syarat:

- i. $R_0 < 1$
- ii. $\frac{\Lambda \beta_2 p \varepsilon}{\mu} + c_1^2 c_2 + c_1^2 c_3 + c_1 c_2^2 + 2c_1 c_2 c_3 + c_1 c_3^2 + c_2^2 c_3 \mu + c_2 c_3^2 > \frac{\Lambda \alpha c_1}{\mu} (\beta_1 p + \beta_2 (1 - p)) + \frac{\Lambda \alpha}{\mu} (\beta_1 c_2 p + \beta_2 c_3 (1 - p))$

Hal ini menunjukkan bahwa jika kedua syarat di atas terpenuhi, maka setiap populasi individu yang terinfeksi penyakit *mumps* dapat menularkan *mumps* kepada rata-rata kurang dari satu penderita baru atau dengan kata lain *mumps* akan menghilang dari populasi atau tidak ada penyebaran *mumps*.

3.2.2 Analisis Kestabilan Titik Setimbang Endemik

Selanjutnya, untuk melakukan analisis kestabilan titik setimbang endemik, akan disubstitusikan titik setimbang endemik pada matriks Jacobian, diperoleh

$$J(E_1) = \begin{pmatrix} -n_1 & 0 & n_2 & -n_3 & 0 \\ n_4 & -c_1 & n_5 & n_3 & 0 \\ 0 & p\alpha & -c_2 & 0 & 0 \\ 0 & (1-p)\alpha & \varepsilon & -c_3 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_1 & \tau_2 & -\mu \end{pmatrix}$$

dengan,

$$n_1 = \frac{\beta_1 I^*}{1 + \gamma I^*} + \beta_2 L^* + \mu$$

$$n_2 = -\frac{\beta_1 S}{1 + \gamma I} + \frac{\beta_1 S \gamma I}{(1 + \gamma I)^2}$$

$$n_3 = \beta_2 S^*$$

$$n_4 = \frac{\beta_1 I^*}{1 + \gamma I^*} + \beta_2 L^*$$

$$n_5 = \frac{\beta_1 S}{1 + \gamma I} - \frac{\beta_1 S \gamma I}{(1 + \gamma I)^2}$$

dengan c_1 , c_2 , dan c_3 secara berurutan dapat dilihat pada persamaan (10), (11), dan (12).

Selanjutnya, diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut:

$$\lambda^5 + d_1 \lambda^4 + d_2 \lambda^3 + d_3 \lambda^2 + d_4 \lambda + d_5 = 0 \quad (15)$$

Untuk menentukan akar-akar dari persamaan karakteristik (15) sulit untuk dilakukan secara analitik, sehingga titik setimbang endemik akan dianalisis melalui simulasi numerik menggunakan bidang fase.

Simulasi ini dapat dilakukan dengan memberi nilai parameter dan tiga nilai awal untuk $S(0), E(0), I(0), L(0)$, dan $R(0)$ yang diketahui. Berikut adalah tabel nilai awal dan nilai parameter yang digunakan pada model matematika penyebaran penyakit *mumps*. Simulasi yang dilakukan untuk interval waktu dari $t = 0$ sampai $t = 1000$.

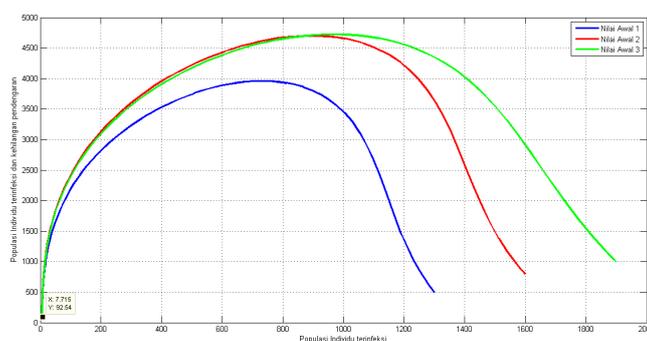
Tabel 3. Nilai Awal Bidang Fase

Nilai Awal	$S(0)$	$E(0)$	$I(0)$	$L(0)$	$R(0)$	Warna
1	4000	2000	1300	500	900	Biru
2	4500	2300	1600	800	1100	Merah
3	3800	2600	1900	1000	1000	Hijau

Tabel 4. Nilai Parameter Bidang Fase

Variabel	Nilai Parameter	Satuan	Sumber
Λ	20	<i>Individu.hari</i> ⁻¹	Asumsi
β_1	0.0008	<i>individu</i> ⁻¹ . <i>hari</i> ⁻¹	Asumsi
β_2	0.0004	<i>individu</i> ⁻¹ . <i>hari</i> ⁻¹	Asumsi
μ	0.0037	<i>hari</i> ⁻¹	Asumsi
α	0.3	<i>hari</i> ⁻¹	Asumsi
ε	0.1	<i>hari</i> ⁻¹	Asumsi
τ_1	0.05882	<i>hari</i> ⁻¹	Peng dkk. (2021)
τ_2	0.05882	<i>hari</i> ⁻¹	Peng dkk. (2021)
p	0.2		Peng dkk. (2021)
γ	0.02	<i>Individu</i> ⁻¹	Asumsi

Dengan menggunakan nilai awal pada Tabel 3 dan nilai parameter pada Tabel 4 diperoleh grafik pada Gambar 2 berikut.

Gambar 2. Grafik Bidang Fase Populasi I terhadap Populasi L

Gambar 2 menunjukkan simulasi bidang fase untuk populasi individu terinfeksi *mumps* (I) dan populasi individu terinfeksi *mumps* yang kehilangan pendengaran (L) pada model matematika penyebaran penyakit *mumps*. Berdasarkan tiga nilai awal yang berbeda dan nilai parameter yang diberikan, terlihat bahwa grafik populasi I dan L cenderung konvergen ke satu titik, yaitu $(I, L) = (7,715; 92,54)$. Hal ini berarti secara keseluruhan dinamika dari setiap populasi pada model penyebaran penyakit *mumps* bergerak menuju titik setimbang endemik $E_1 = (188,864; 20,897; 7,715; 92,54; 138,545)$. Nilai E_1 diperoleh dengan mensubstitusikan nilai parameter yang terdapat pada **Tabel 4** ke titik setimbang endemik E_1 yang diperoleh secara analitik. Berdasarkan nilai parameter tersebut, kemudian diperoleh $R_0 = 11,959 > 1$.

Berdasarkan hasil simulasi pada Gambar 2 diperoleh kesimpulan bahwa titik setimbang endemik model matematika penyebaran penyakit *mumps* akan cenderung stabil asimtotis jika $R_0 > 1$. Hal ini menunjukkan bahwa jika $R_0 > 1$, maka individu yang terinfeksi penyakit *mumps* dapat menularkan *mumps* kepada rata-rata lebih dari satu penderita baru atau dengan kata lain terjadi penyebaran *mumps*.

4 Analisis Sensitivitas Parameter

Analisis sensitivitas parameter dilakukan untuk mengetahui parameter memiliki pengaruh besar pada suatu model [15]. Langkah yang dilakukan dalam analisis sensitivitas parameter adalah menghitung indeks sensitivitas dari masing-masing parameter. Adapun indeks sensitivitas parameter yang dirumuskan sebagai berikut.

$$ind\ m = \left(\frac{\partial R_0}{\partial m} \right) \frac{m}{R_0}$$

dengan m merupakan parameter yang dianalisis dan $ind\ m$ merupakan indeks sensitivitas parameter m . Pada skripsi ini telah diperoleh R_0 sebagai berikut:

$$R_0 = \frac{\Lambda \alpha (\beta_1 p c_3 - \beta_2 (c_2 p - p \varepsilon - c_2))}{\mu c_1 c_2 c_3}$$

Hasil perhitungan indeks parameter model matematika penyebaran penyakit *mumps* dapat dilihat pada Tabel 5 berikut.

Tabel 5. Nilai Indeks Sensitivitas Parameter

Parameter	Indeks Sensitivitas
Λ	1
β_1	0.769
β_2	0.231
μ	-1.04
α	0.012
ε	-0.461

Parameter	Indeks Sensitivitas
τ_1	-0.289
τ_2	-0.217
p	0.750

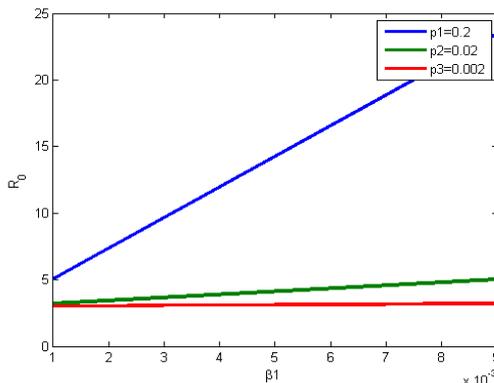
Tabel 6. Hubungan antara Perubahan pada Nilai Parameter terhadap Nilai R_0

Parameter	Indeks Sensitivitas	$R_0 = 11.959$			
		$p - 10\%$	$p - 15\%$	$p + 10\%$	$p + 15\%$
Λ	1	10.763	10.165	13.154	13.752
β_1	0.769	11.039	10.579	12.878	13.338
β_2	0.231	11.683	11.535	12.234	12.372
μ	-1.04	13.346	14.162	10.824	10.33
α	0.012	11.942	11.933	11.972	11.978
ε	-0.461	12.547	12.871	11.437	11.201
τ_1	-0.289	12.318	12.508	11.624	11.466
τ_2	-0.217	12.245	12.412	11.721	11.617
p	0.750	11.062	10.613	12.855	13.304

Berdasarkan Tabel 6, terlihat bahwa untuk indeks sensitivitas yang bernilai positif menunjukkan jika nilai parameter bertambah, maka nilai R_0 akan bertambah. Sebaliknya, apabila indeks sensitivitas yang bernilai negatif menunjukkan jika nilai parameter bertambah, maka nilai R_0 akan berkurang. Hasil dari indeks sensitivitas pada Tabel 6, parameter yang memiliki pengaruh besar pada model adalah Λ, β_1, μ , dan p . Hal tersebut karena nilai indeks sensitivitas parameter Λ, β_1, μ , dan p memiliki nilai mutlak tertinggi dibandingkan parameter lainnya. Namun karena parameter laju perekrutan individu baru rentan terhadap *mumps* (Λ) dan laju kematian alami (μ) tidak dapat dikontrol, maka parameter yang berpengaruh adalah parameter β_1 dan p .

Selanjutnya, akan dilakukan simulasi parameter β_1, p terhadap R_0 yang masing-masing merupakan probabilitas laju penyebaran penyakit *mumps* oleh populasi yang terinfeksi, laju kesembuhan populasi individu terinfeksi yang kehilangan pendengaran, serta proporsi individu yang terpapar. Pada simulasi ini akan dilakukan untuk parameter p dan β_1 terhadap R_0 , dipilih nilai $p = 0.2, p = 0.02, p = 0.002$ dan simulasi tersebut berada pada interval $0.001 < \beta_1 < 0.009$.

Hasil simulasi berupa β_1 dan p terhadap R_0 dapat ditunjukkan pada Gambar 3.



Gambar 3. Sensitivitas β_1 terhadap R_0 dengan Tiga Nilai p yang Berbeda

Gambar 3 menunjukkan bahwa ketika dipilih tiga nilai p yang berbeda yaitu $p_1 = 0.2, p = 0.02$, dan $p = 0.002$ pada interval $0.001 < \beta_1 < 0.009$, semakin besar nilai p maka semakin besar nilai R_0 . Selain itu, semakin besar nilai β_1 maka semakin besar juga nilai R_0 .

5 Analisis Masalah Optimal Kontrol

Pada Bagian ini akan dilakukan analisis kontrol optimal model matematika penyebaran penyakit mumps. Untuk menentukan kontrol optimal maka dilakukan konstruksi model dengan penambahan variabel kontrol berupa kontrol (u_1) berupa pencegahan dengan vaksinasi dan (u_2) berupa pengobatan terhadap populasi individu yang terinfeksi *mumps*.

Berikut diberikan beberapa notasi dan pengertian dari masing masing variabel yang digunakan dalam mengkonstruksi model kontrol optimal.

Tabel 7. Notasi Variabel Kontrol pada Model Matematika Penyebaran Penyakit *Mumps*.

Variabel	Keterangan
$u_1(t)$	Variabel input kontrol berupa pencegahan dengan vaksinasi pada saat t
$u_2(t)$	Variabel input kontrol berupa pengobatan pada saat t
t_0	Waktu awal pengamatan saat dilakukan kontrol
t_f	Waktu akhir pengamatan saat dilakukan kontrol
A_1	Konstanta pembobot berupa biaya untuk upaya pencegahan
A_2	Konstanta pembobot berupa biaya untuk upaya pengobatan

Adapun model matematika penyebaran penyakit dengan adanya kontrol adalah sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - (1 - u_1) \frac{\beta_1 SI}{1 + \gamma I} - (1 - u_1) \beta_2 SL - \mu S$$

$$\frac{dE}{dt} = (1 - u_1) \frac{\beta_1 SI}{1 + \gamma I} + (1 - u_1) \beta_2 SL - \alpha E - \mu E$$

$$\frac{dI}{dt} = p \alpha E - \epsilon I - \tau_1 I - \mu I - u_2 I$$

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dt} &= (1-p)\alpha E + \varepsilon I - \tau_2 L - \mu L - u_2 I \\ \frac{dR}{dt} &= \tau_1 I + \tau_2 L - \mu R + u_2 I\end{aligned}$$

Penjelasan terkait variabel dan parameter pada persamaan diatas mengacu pada Tabel 1 dan Tabel 2 serta penjelasan terkait variabel kontrol mengacu pada Tabel 7. Selanjutnya, fungsi ongkos atau indeks performansi dari model matematika penyebaran penyakit *mumps* disertai variabel kontrol berupa pencegahan berupa vaksinasi dan pengobatan terhadap populasi individu yang terinfeksi *mumps* berdasarkan penjelasan diatas adalah sebagai berikut:

$$\text{Min } J(u_1, u_2) = \int_0^{t_f} (I(t) + L(t) + \frac{1}{2}(A_1 u_1^2(t) + A_2 u_2^2(t))) dt$$

dengan $0 \leq u_1(t) \leq 1$, $0 \leq u_2(t) \leq 1$ dan $t_0 \leq t \leq t_f$ dan $A_1, A_2 > 0$

Fungsi Ongkos atau indeks performansi bertujuan meminimumkan populasi yang terinfeksi dengan pendengaran normal dan populasi yang kehilangan pendengaran saat terinfeksi serta meminimumkan biaya yang dikeluarkan untuk kontrol tersebut. Input kontrol u_1 dan u_2 memiliki kisaran nilai $0 \leq u_1, u_2 \leq 1$ menunjukkan bahwa strategi kontrol penyebaran penyakit *mumps* memiliki peluang sukses antara 0 dan 1. Batas waktu kontrol optimal berada pada interval $t_0 \leq t \leq t_f$ yang menyatakan waktu pengamatan yaitu waktu awal pemberian kontrol hingga waktu akhir pemberian kontrol.

6 Penyelesaian Kontrol Optimal

Masalah kontrol optimal pada model matematika penyebaran penyakit *mumps* ini diselesaikan dengan menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin. Misalkan variabel keadaan (*state*) pada model matematika penyebaran penyakit *mumps* disertai kontrol adalah

$$x = (S, E, I, L, R)^T$$

dengan nilai awal dari semua populasi diasumsikan non negatif yang dinyatakan sebagai berikut.

$$S(0), E(0), I(0), L(0), R(0) \geq 0$$

Berdasarkan Prinsip Maksimum Pontryagin, langkah awal yang dilakukan dalam menyelesaikan masalah kontrol optimal adalah membentuk fungsi Hamiltonian. Berikut ini merupakan fungsi Hamiltonian pada model matematika penyebaran penyakit *mumps*.

$$\mathcal{H} = \left[I(t) + L(t) + \frac{1}{2} A_1 u_1^2(t) + \frac{1}{2} A_2 u_2^2(t) \right] + \phi^T(t) f(x(t), u(t))$$

dengan $f(x(t), u(t))$ adalah ruas kanan dari model yang disertai variabel kontrol. Sedangkan $\phi(t)$ menyatakan pengali Lagrange atau variabel *co-state* dengan $\phi^T(t)$ adalah transpos dari $\phi(t)$.

Selanjutnya untuk mendapatkan kondisi yang optimal dari \mathcal{H} , yaitu melalui kondisi stasioner dari \mathcal{H} yang dipenuhi dengan meminimumkan \mathcal{H} terhadap semua vektor kontrol $u(t)$ sebagai berikut.

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_1} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_2} = 0$$

Karena batas nilai $u_i(t)$ adalah $0 \leq u_i(t) \leq 1$ dengan $i = 1,2$ maka nilai untuk u_1 dan u_2 dapat dinyatakan dalam beberapa kemungkinan sebagai berikut.

$$u_1 = \begin{cases} 0 & \text{untuk } u_1 \leq 0 \\ \frac{(\beta_1 SI + \beta_2 SL(1 + \gamma I))(\phi_2 - \phi_1)}{(1 + \gamma I)A_1} & \text{untuk } 0 < u_1 \leq 1 \\ 1 & \text{untuk } u_1 \geq 1 \end{cases}$$

$$u_2 = \begin{cases} 0 & \text{untuk } u_2 \leq 0 \\ \frac{(\phi_3 - \phi_5)I + (\phi_4 - \phi_5)L}{A_2} & \text{untuk } 0 < u_2 \leq 1 \\ 1 & \text{untuk } u_2 \geq 1 \end{cases}$$

Berdasarkan kemungkinan di atas, maka diperoleh nilai kontrol yang optimal adalah sebagai berikut

$$u_1^* = \min \left(1, \max \left(0, \frac{(\beta_1 SI + \beta_2 SL(1 + \gamma I))(\phi_2 - \phi_1)}{(1 + \gamma I)A_1} \right) \right)$$

$$u_2^* = \min \left(1, \max \left(0, \frac{(\phi_3 - \phi_5)I + (\phi_4 - \phi_5)L}{A_2} \right) \right)$$

Diketahui bahwa nilai kontrol u_1^* dan u_2^* bergantung pada variabel *state* dan variabel *co-state*, sehingga perlu adanya penyelesaian persamaan *state* dan persamaan *co-state* untuk memperoleh variabel tersebut.

Persamaan *state* diperoleh melalui $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \phi}$, sehingga diperoleh:

$$\dot{S} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi_1} = \Lambda - \left(1 - \frac{(\beta_1 SI + \beta_2 SL(1 + \gamma I))(\phi_2 - \phi_1)}{(1 + \gamma I)A_1}\right) \frac{\beta_1 SI}{1 + \gamma I} - \left(1 - \frac{(\beta_1 SI + \beta_2 SL(1 + \gamma I))(\phi_2 - \phi_1)}{(1 + \gamma I)A_1}\right) \beta_2 SL - \mu S$$

$$\dot{E} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi_2} = \left(1 - \frac{(\beta_1 SI + \beta_2 SL(1 + \gamma I))(\phi_2 - \phi_1)}{(1 + \gamma I)A_1}\right) \frac{\beta_1 SI}{1 + \gamma I} + \left(1 - \frac{(\beta_1 SI + \beta_2 SL(1 + \gamma I))(\phi_2 - \phi_1)}{(1 + \gamma I)A_1}\right) \beta_2 SL - \alpha E - \mu E$$

$$\dot{I} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi_3} = p\alpha E - \varepsilon I - \tau_1 I - \mu I - \frac{(\phi_3 - \phi_5)I + (\phi_4 - \phi_5)L}{A_2} I$$

$$\dot{L} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi_4} = (1 - p)\alpha E + \varepsilon I - \tau_2 L - \mu L - \frac{(\phi_3 - \phi_5)I + (\phi_4 - \phi_5)L}{A_2} I$$

$$\dot{R} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi_5} = \tau_1 I + \tau_2 L - \mu R + \frac{(\phi_3 - \phi_5)I + (\phi_4 - \phi_5)L}{A_2} I + \frac{(\phi_3 - \phi_5)I + (\phi_4 - \phi_5)L}{A_2} L$$

Setelah diperoleh nilai dari variabel *state* seperti di atas, kemudian untuk mendapatkan $S, E, I, L,$ dan R dari bentuk u_1^* dan u_2^* yang optimal maka langkah yang harus dilakukan

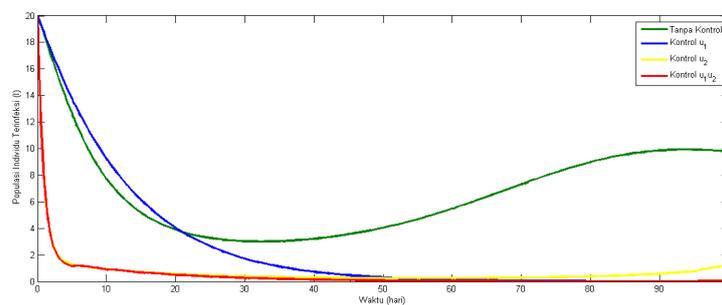
selanjutnya adalah menyelesaikan persamaan *state* yang berbentuk persamaan diferensial non linier. Karena penyelesaian persamaan diferensial non linier sulit untuk diselesaikan secara analitik, maka dilakukan pendekatan numerik dengan menggunakan *software* MATLAB.

7 Simulasi Numerik

Penyelesaian bentuk kontrol optimal sulit diselesaikan secara analitik sehingga penyelesaiannya akan diselesaikan secara numerik. Penyelesaian secara numerik dilakukan dengan mensimulasikan permasalahan kontrol optimal menggunakan program DOTcvp pada *software* MATLAB.

Pada simulasi ini akan dilakukan tiga skenario, yaitu penerapan upaya pencegahan (u_1) sehingga $u_2 = 0$, penerapan upaya pengobatan (u_2) sehingga $u_1 = 0$, dan penerapan upaya pencegahan (u_1) dan pengobatan (u_2) secara bersamaan. Selanjutnya, dari hasil ketiga skenario tersebut akan dibandingkan dengan simulasi model tanpa pemberian kontrol.

Berikut adalah hasil simulasi numerik model matematika penyebaran penyakit *mumps* dengan kontrol optimal.



Gambar 4. Grafik Populasi Individu yang Terinfeksi Penyakit *Mumps* Sebelum dan Sesudah diberi Kontrol.

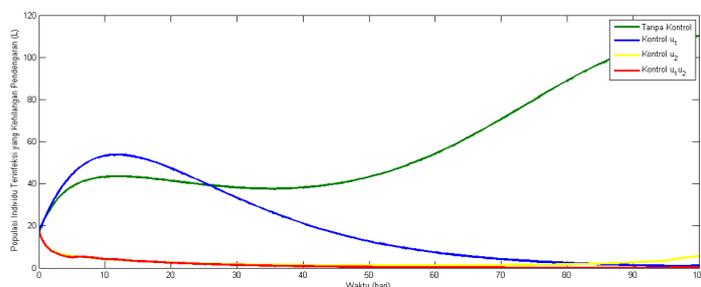
Berdasarkan Gambar 4, diperoleh perbandingan populasi inividu yang terinfeksi *mumps* sebelum dan sesudah diberi kontrol dengan tiga skenario. Perbandingan tersebut dapat dilihat pada Tabel 8.

Tabel 8. Perbandingan Populasi Individu yang Terinfeksi Penyakit *Mumps* pada Akhir Pengamatan.

Kondisi	Jumlah Populasi I
Tanpa Kontrol	10
Dengan Kontrol u_1	0.08
Dengan Kontrol u_2	1
Dengan Kontrol u_1 dan u_2	0.07

Berdasarkan Tabel 8 terlihat adanya perbedaan jumlah individu yang terinfeksi penyakit *mumps* sebelum dan sesudah diberi kontrol. Hal ini ditunjukkan dengan adanya penurunan jumlah

individu setelah pemberian kontrol upaya pencegahan, setelah pemberian kontrol upaya pengobatan, dan setelah pemberian kontrol upaya pencegahan dan pengobatan secara bersamaan. Dari beberapa skenario pemberian kontrol, upaya pencegahan dan pengobatan paling efektif mengurangi jumlah invidu yang terinfeksi penyakit *mumps* pada akhir pengamatan.



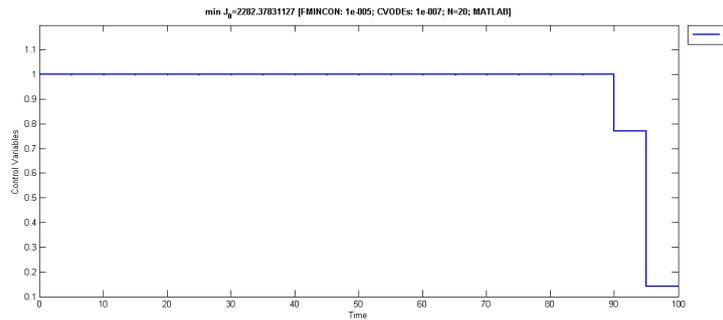
Gambar 5. Grafik Populasi Individu yang Terinfeksi Penyakit *Mumps* dan Kehilangan Pendengaran Sebelum dan Sesudah diberi Kontrol.

Berdasarkan Gambar 5, diperoleh perbandingan populasi individu yang terinfeksi *mumps* dan kehilangan pendengaran sebelum dan sesudah diberi kontrol dengan tiga skenario. Perbandingan tersebut dapat dilihat pada Tabel 9.

Tabel 9. Perbandingan Populasi Individu yang Terinfeksi Penyakit *Mumps* dan Kehilangan Pendengaran pada Akhir Pengamatan.

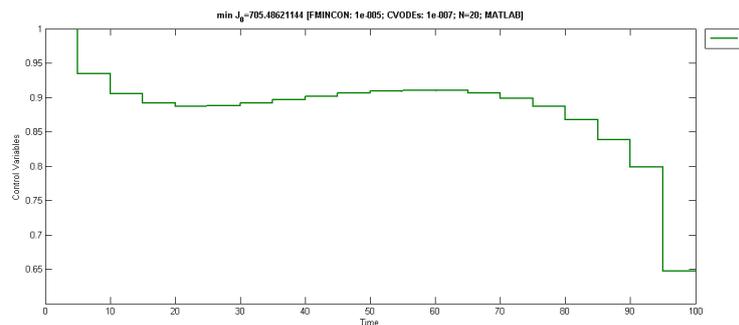
Kondisi	Jumlah Populasi L
Tanpa Kontrol	110
Dengan Kontrol u_1	1
Dengan Kontrol u_2	6
Dengan Kontrol u_1 dan u_2	0.4

Berdasarkan Tabel 9 terlihat adanya perbedaan jumlah individu yang terinfeksi *mumps* dan kehilangan pendengaran sebelum dan sesudah diberi kontrol. Hal ini ditunjukkan dengan adanya penurunan jumlah individu setelah pemberian kontrol upaya pencegahan, setelah pemberian kontrol upaya pengobatan, dan setelah pemberian kontrol upaya pencegahan dan pengobatan secara bersamaan. Dari beberapa skenario pemberian kontrol, upaya pencegahan dan pengobatan paling efektif mengurangi jumlah invidu yang terinfeksi penyakit *mumps* pada akhir pengamatan. Selanjutnya, hasil simulasi untuk profil kontrol u_1 , u_2 , serta u_1 dan u_2 berturut-turut disajikan pada Gambar 6, Gambar 7, dan Gambar 8.



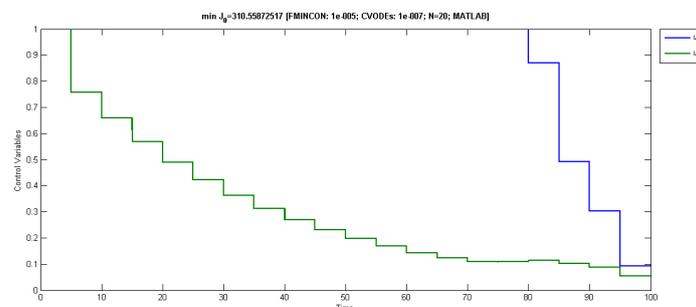
Gambar 6. Grafik Profil Kontrol Upaya Pencegahan u_1

Gambar 6 menunjukkan bahwa presentase strategi u_1 yaitu upaya pencegahan berupa vaksinasi yang dilakukan untuk mengurangi individu yang terinfeksi penyakit *mumps* pada awal pengamatan hingga hari ke-90 adalah sebesar 100% yang artinya upaya pencegahan berupa vaksinasi dilakukan sepenuhnya secara intensif. Selanjutnya, pada hari ke-90 hingga akhir pengamatan upaya pencegahan mengalami penurunan secara drastis hingga menjadi 14,19%.



Gambar 7. Grafik Profil Kontrol Upaya Pengobatan u_2

Gambar 7 menunjukkan bahwa presentase strategi u_2 yaitu upaya pengobatan yang dilakukan untuk mengurangi individu yang terinfeksi penyakit *mumps* pada awal pengamatan hingga hari ke-5 adalah sebesar 100% yang artinya upaya pengobatan dilakukan sepenuhnya secara intensif. Selanjutnya, pada hari ke-5 hingga akhir pengamatan upaya pengobatan mengalami penurunan secara berangsur-angsur hingga menjadi 64,69%.



Gambar 8. Grafik Profil Kontrol Upaya Pencegahan u_1 dan Pengobatan u_2

Gambar 8 menunjukkan bahwa presentase strategi u_1 dan u_2 yaitu upaya pencegahan dan upaya pengobatan yang dilakukan untuk mengurangi individu yang terinfeksi penyakit *mumps*. Upaya pencegahan pada awal pengamatan hingga hari ke-80 adalah sebesar 100% kemudian mengalami penurunan secara drastis dari hari ke-80 hingga akhir pengamatan menjadi 9,15%. Sedangkan upaya pengobatan pada awal pengamatan hingga hari ke-5 adalah sebesar 100%. Selanjutnya pada hari ke-5 hingga akhir pengamatan mengalami penurunan berangsur-angsur hingga menjadi 5,5%. Adapun fungsi ongkos yang dibutuhkan untuk setiap skenario yang disimulasikan disajikan pada Tabel 10.

Tabel 10. Perbandingan Fungsi Ongkos.

Skenario	Nilai Fungsi Ongkos
Dengan Kontrol u_1	2282,378
Dengan Kontrol u_2	705,486
Dengan Kontrol u_1 dan u_2	310,558

Tabel 8 menunjukkan nilai fungsi ongkos atau indeks performansi yang dikeluarkan dalam jangka waktu 100 hari. Nilai fungsi ongkos terbesar adalah pada saat penerapan skenario ke-1 yaitu upaya pencegahan. Sedangkan fungsi ongkos terkecil adalah pada saat penerapan skenario ke-3 yaitu upaya pencegahan dan upaya pengobatan.

Penerapan kontrol yang optimal dilihat berdasarkan perubahan jumlah populasi sebelum dan sesudah pemberian kontrol serta nilai fungsi ongkos yang dikeluarkan. Berdasarkan simulasi sebelum dan sesudah pemberian kontrol menggunakan metode DOTcvp, dengan menerapkan tiga skenario dapat dilihat bahwa penerapan upaya pencegahan (u_1) serta upaya pengobatan (u_2) yang dilakukan secara bersamaan merupakan langkah yang selalu mereduksi populasi individu yang terinfeksi *mumps* dan populasi individu yang terinfeksi *mumps* yang kehilangan pendengaran.

Dengan demikian dapat ditarik kesimpulan bahwa strategi kontrol yang optimal untuk diterapkan adalah dengan menerapkan upaya pencegahan (u_1) serta upaya pengobatan (u_2) yang dilakukan secara bersamaan.

8 Simpulan

Artikel ini membahas tentang analisis kestabilan dan kontrol optimal model matematika penyebaran penyakit *mumps*. Berdasarkan hasil analisis diperoleh bahwa model ini mempunyai dua titik setimbang yaitu titik setimbang non endemik, yaitu $E_o = (S, E, I, L, R) = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0, 0, 0\right)$ yang bersifat stabil asimtotis lokal jika memenuhi $R_0 < 1$ dan titik setimbang endemik, yaitu

$E_1 = (S^*, E^*, I^*, L^*, R^*)$ titik setimbang ini akan eksis jika $R_0 > 1$. Dengan menggunakan bidang fase, titik setimbang E_1 cenderung stabil asimtotis lokal dengan

$$R_0 = \frac{\Lambda\alpha(\beta_1 p c_3 + \beta_2 c_2(1-p) + \beta_2 p \varepsilon)}{\mu c_1 c_2 c_3}$$

Sedangkan bentuk kontrol optimal u^* pada model dengan u_1^* pencegahan dan u_2^* pengobatan adalah sebagai berikut:

$$u_1^* = \min\left(1, \max\left(0, \frac{(\beta_1 S I + \beta_2 S L(1 + \gamma I))(\phi_2 - \phi_1)}{(1 + \gamma I)A_1}\right)\right)$$

$$u_2^* = \min\left(1, \max\left(0, \frac{(\phi_3 - \phi_5)I + (\phi_4 - \phi_5)L}{A_2}\right)\right)$$

hasil simulasi numerik menunjukkan bahwa upaya pemberian kontrol berupa pencegahan (u_1) dan pengobatan (u_2) secara bersamaan lebih efektif dan efisien dalam menekan penyebaran penyakit *mumps* dengan biaya paling minimal.

9 Daftar Pustaka

- [1] "Mumps." Accessed: Apr. 03, 2023. [Online]. Available: <https://www.who.int/teams/health-product-policy-and-standards/standards-and-specifications/vaccine-standardization/mumps>
- [2] N. B. Masters *et al.*, "Manual for the Surveillance of Vaccine-Preventable Diseases Disease Description." [Online]. Available: <https://www.cdc.gov/vaccines/pubs/surv-manual/chpt09-mumps.html#print>
- [3] "For Healthcare Providers," 2015. [Online]. Available: <https://www.cdc.gov/mumps/hcp.html>
- [4] J. P. Gut, C. Lablache, S. Behr, and A. Kim, "Symptomatic mumps virus reinfections," *J Med Virol*, vol. 45, no. 1, pp. 17–23, 1995.
- [5] Y. J. Zhou *et al.*, "The potential dysfunction of otolith organs in patients after mumps infection," *PLoS One*, vol. 12, no. 7, Jul. 2017, doi: 10.1371/journal.pone.0181907.
- [6] A. Hviid, S. Rubin, and K. Muhlemann, "Mumps," *The Lancet*, vol. 371, no. 9616, pp. 932–944, 2008.
- [7] Y. Li, X. Liu, and L. Wang, "Modelling the transmission dynamics and control of mumps in mainland China," *Int J Environ Res Public Health*, vol. 15, no. 1, Jan. 2018, doi: 10.3390/ijerph15010033.

-
- [8] T. Kitano, “Dynamic transmission model of routine mumps vaccination in Japan,” *Epidemiol Infect*, vol. 147, 2019, doi: 10.1017/S0950268818003230.
- [9] P. Pongsumpun, “Mathematical Model for Mump Disease in Thailand,” Universal Researchers, Aug. 2019. doi: 10.17758/uruae5.ul0819103.
- [10] A. A. Ayoade, O. J. Peter, A. I. Abioye, T. F. Aminu, and O. A. Uwaheren, “Application of homotopy perturbation method to an sir mumps model,” *Advances in Mathematics: Scientific Journal*, vol. 9, no. 3, pp. 1329–1340, 2020, doi: 10.37418/amsj.9.3.57.
- [11] Y. Peng *et al.*, “Estimating the Transmissibility of Mumps: A Modelling Study in Wuhan City, China,” *Front Med (Lausanne)*, vol. 8, Aug. 2021, doi: 10.3389/fmed.2021.683720.
- [12] H. Mohammadi, S. Kumar, S. Rezapour, and S. Etemad, “A theoretical study of the Caputo–Fabrizio fractional modeling for hearing loss due to Mumps virus with optimal control,” *Chaos Solitons Fractals*, vol. 144, Mar. 2021, doi: 10.1016/j.chaos.2021.110668.
- [13] P. Van Den Driessche and J. Watmough, “Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission,” 2002. [Online]. Available: www.elsevier.com/locate/mbs
- [14] F. Brauer and C. Castillo-Chaves, *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*. Springer, 2012.
- [15] N. Chitnis, J. M. Hyman, and J. M. Cushing, “Determining important parameters in the spread of malaria through the sensitivity analysis of a mathematical model,” *Bull Math Biol*, vol. 70, no. 5, pp. 1272–1296, Jul. 2008, doi: 10.1007/s11538-008-9299-0.