Limits: Journal of Mathematics and Its Applications
E-ISSN: 2579-8936
P-ISSN: 1829-605X
Vol. 21, No. 2, Juli 2024, 201-209
DOI: http://dx.doi.org/10.12962/limits.v21i2.20164

Sifat Fundamental Pada Granum Eulerian

Suaib A. Siraj [1]*, Asriadi [2], Djihad Wungguli [3], Hasan S. Panigoro[4], Nurwan[5], Nisky I. Yahya[6]
[1,2,3,4,5,6]Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Gorontalo
e-mail: suaib_s1matematika@mahasiswa.ung.ac.id

Diajukan: 4 Maret 2024, Diperbaiki: 7 Agustus 2024, Diterima: 23 September 2024

Abstrak

Matematika analisis memiliki beberapa keterkaitan yang penting dengan teori graf. Meskipun pandang awal, mungkin terlihat sebagai dua cabang matematika yang berbeda, ada hubungan antara keduanya dalam beberapa aspek yaitu graf sebagai objek matematika yang dapat dianalisis menggunakan konsep dari matematika analisis. Dalam teori graf sering mempelajari jarak, keterhubungan, dan lintasan dalam graf. Hal ini dapat dianalisis secara lebih mendalam menggunakan matematika analisis seperti pada struktur bilangan asli. Kajian literatur tentang teori graf, khususnya graf Eulerian menarik untuk dipelajari. Lintasan Euler dalam sebuah graf G adalah sebuah lintasan yang mencakup setiap sisi dari graf G tepat satu kali. Sebuah lintasan Euler disebut tertutup jika berawal dan berakhir pada simpul yang sama. Konsep teori granum sebagai generalisasi dari graf tak berarah pada sruktur bilangan merupakan pendekatan rigor untuk teori graf sekaligus menunjukan beberapa sifat fundamental dari generalisasi graf tak berarah. Fokus dari penelitian ini adalah untuk memperkenalkan sifat keterhubungan dari granum Eulerian. Granum $G(e,M)$ disebut terhubung jika untuk setiap $u,v \in M$ dengan $u \neq v$ terdapat sebuah subgranum lintasan $G'(e,M') \subseteq G(e,M)$ dimana $u,v \in M'$ dan disebut granum Eulerian jika terdapat sebuah pemetaan surjektif $\phi : \left[\| E\left(G(e,\ M)\right) \| + 1\right] \to M$ sedemikian sehingga $e\left(\phi(n),\phi(n+1)\right) = 1$ untuk setiap $n \in \left[\left\|E\left(G(e,M)\right)\right\|\right]$. Sifat tersebut memberikan pemahaman yang lebih mendalam tentang struktur dan karakteristik granum Eulerian yang selama ini belum terlalu dipahami secara menyeluruh.

Kata Kunci: Bilangan Asli, Teori Graf, Granum

Abstract

Mathematical analysis has several important connections with graph theory. Although initially, they may seem like two separate branches of mathematics, there are relationship between them in several aspects, such as graphs as mathematical objects that can be analyzed using concepts from analytic mathematics. In graph theory, one often studies distance, connectivity, and paths within a graph. These can be further analyzed using analytic mathematics, such as in the structure of natural numbers. Literature studies on graph theory, especially Eulerian graphs, are interesting to explore. An Eulerian path in a graph G is a path that includes every edge of graph G exactly once. An Eulerian path is called closed if it starts and ends at the same vertex. The concept of granum theory as a generalization of undirected graphs on number structures provides a rigorous approach to graph theory and demonstrates some fundamental properties of undirected graph generalization. The focus of this study is to introduce the connectivity properties of Eulerian granum. The granum $G(e,M)$ is called connected if for every $u,v \in M$ with $u \neq v$ there exists a path subgranum $G'(e,M') \subseteq G(e,M)$ where $u,v \in M'$ and is called an Eulerian granum if there exists a surjective mapping $\phi : \left[\| E\left(G(e,\ M)\right) \| + 1\right] \to M$ such that $e\left(\phi(n),\phi(n+1)\right) = 1$ for every $n \in \left[\left\|E\left(G(e,M)\right)\right\|\right]$. This property provides a deeper understanding of the structure and characteristics of Eulerian granum, which have not been fully comprehended until now.

Keywords: *Natural Numbers, Graph Theory, Granum*

1 Pendahuluan

Matematika analisis adalah salah satu cabang dalam ilmu matematika yang mencakup studi tentang konsep-konsep seperti turunan, integral, limit, deret, serta analisis fungsional. Biasanya, topik-topik ini diselidiki dalam konteks bilangan riil dan bilangan kompleks, bersama dengan fungsi matematika. Bidang matematika analisis berkembang dari kalkulus, yang mencakup prinsip-prinsip dasar dan teknik analisis. Meskipun matematika analisis berbeda dari geometri, namun konsep dan metodenya dapat diterapkan dalam berbagai konteks matematika, terutama pada objek matematika yang memiliki definisi kedekatan dalam ruang topologi atau jarak tertentu dalam ruang metrik.

Matematika analisis memiliki beberapa keterkaitan yang penting dengan teori graf. Meskipun pandang awal, mungkin terlihat sebagai dua cabang matematika yang berbeda, ada hubungan antara keduanya dalam beberapa aspek yaitu graf sebagai objek matematika yang dapat dianalisis menggunakan konsep dari matematika analisis. Sebagai contoh, dalam teori graf sering mempelajari jarak, keterhubungan, dan lintasan dalam graf. Hal ini dapat dianalisis secara lebih mendalam menggunakan matematika analisis seperti pada struktur bilangan asli. Selain berkontribusi secara teori, teori graf juga memiliki berbagai kontribusi yang signifikan dalam kehidupan sehari-hari. Kontribusi ini dapat ditemukan pada optimisasi jaringan transportasi, pengoptimalan jaringan komputer, manajemen rantai pasokan, desain sirkuit elektronik, jaringan sosial, dan penjadwalan.

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang mempelajari tentang graf, graf digunakan untuk merepresentasikan simpul *(vertex)* dan dihubungkan dengan sisi *(edge)*. Graf umumnya digunakan dalam matematika untuk merepresentasikan objek diskrit dengan maksud membantu memvisualisasikan suatu objek agar lebih mudah dipahami, suatu graf dapat di definisikan sebagai $G = (V(G), E(G))$ dan $G' = (V', E')$ adalah subgraf dari G jika $V' \subseteq V$ dan $E' \subseteq E$ [1]. Kajian literatur tentang teori graf, khususnya graf Eulerian menarik untuk dipelajari.

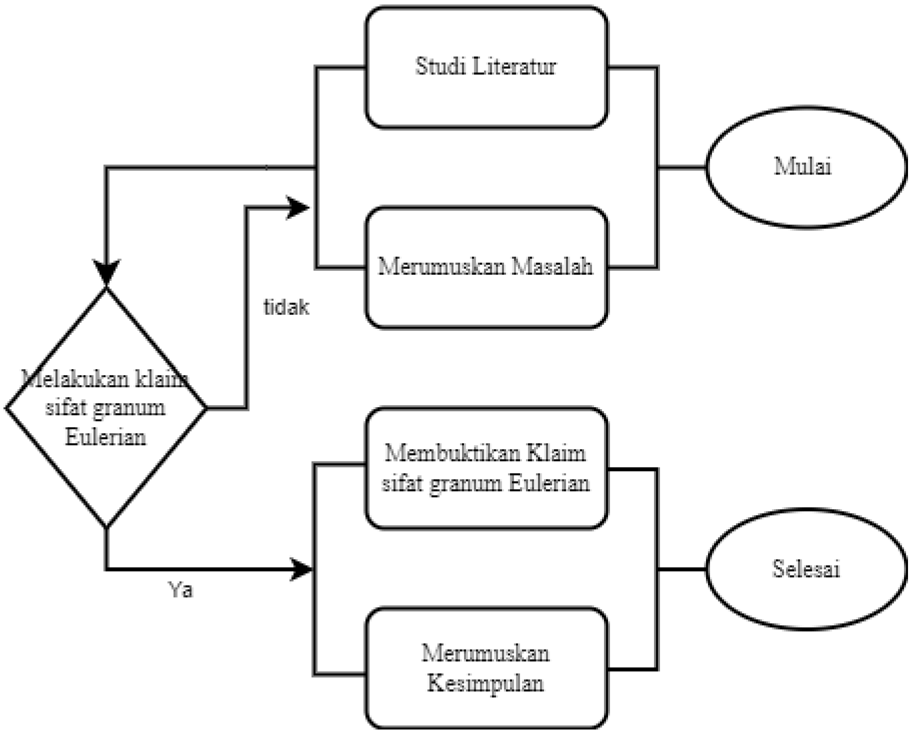
Beberapa kajian literatur telah membahas teori graf pada subhimpunan terbatas. Misalnya, penelitian oleh [2] yang berfokus pada teori graf dalam konteks struktur semigrup. Selain itu, [3] membahas konektivitas dan kesetaraan berbagai graf dalam struktur semigrup. Beberapa matematikawan juga mengeksplorasi teori graf dalam struktur bilangan asli, seperti yang diteliti oleh [4] yang membahas tentang sebuah studi graf tak berarah pada subhimpunan terbatas dari bilangan asli, [5], [6], [7] membahas kajian tentang komplemen umum dari beberapa graf, [8] membahas tentang bilangan dominasi dari graf tak berarah $G_{m,n}$, [9] membahas kajian tentang dominasi klik pada graf takberarah, [10] melakukan kajian tentang terhubung dan terhubung total dalam graf takberarah $G_{m,n}$, dan [11] membahas tentang sebuah generalisasi graf tak berarah pada himpunan bagian terbatas dari bilangan asli.

Struktur bilangan asli, sebagaimana telah digagas oleh [12] bahwa konsep suatu graf tak berarah adalah graf dengan himpunan titik $V = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, dimana $p, q \in V$ dikatakan terhubung jika dan hanya jika $p \neq q$ dan $p + q$ tidak habis dibagi m untuk $m > 1$, dinotasikan $G_{m,n}$. Dengan sudut pandang yang berbeda pada [13] telah memperkenalkan konsep graf aditif, yaitu graf dengan himpunan titik $V = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, dengan $x, y \in V$ disebut terhubung jika dan hanya jika $x + y \in S$, dengan S adalah sebuah subset tertentu dari bilangan asli.

Konsep yang telah digagas oleh metematikawan tersebut yang menjadi latarbelakang dalam melakukan kajian pada granum Eluerian sekaligus memperkenalkan dan menunjukan sifat fundamental granum Eulerian.

2 Metode Penelitian

Metode Penelitian yang digunakan dalam penelitian ini yaitu metode studi literatur dengan menelusuri dan mempelajari sejumlah jurnal serta referensi artikel yang berhubungan dengan granum Eulerian.



Gambar 1. Prosedur Analisis Granum Eulerian $G(e, M)$

3 Hasil dan Pembahasan

Sebelum membahas sifat-sifat dasar dari granum Eulerian, berikut ini beberapa definisi dari generalisasi graf tak berarah pada himpunan bagian terbatas dari bilangan asli yang telah diberikan pada penelitian sebelumnya.

Definisi 1[12] *Misalkan* $m, n \in N$ *dengan* $m > 1$. *Diberikan suatu graf tak berarah* $G_{m,n}$ *adalah graf yang memiliki himpunan titik* $V = \{1, 2, \dots, n\}$ *dan himpunan sisi* $E = \{(a, b) \in V^2 : a \neq b, \frac{a+b}{m} \in \mathbb{N}\}$.

Definisi 2[11] *Diberikan himpunan berhingga tak kosong* $M \subset N$ *dan suatu fungsi* $e : M^2 \to \{0, 1\}$ *dengan* $e(m, n) = e(n, m)$ *dan* $e(m, m) = 0$. *Himpunan*

$$G(e, M) \coloneqq (M \cup \{(m, n) \in M^2 : m \neq n, e(m, n) = 1\}) \tag{1}$$

dikatakan suatu granum yang berasosiasi dengan himpunan M *dan memiliki konektor* e.

Definisi 3[11] *Diberikan granum* $G(e, M)$. *Derajat suatu titik* $i \in V\,[G(e, M)]$ *dituliskan sebagai*

$$\rho(i) \coloneqq \sum_{j \in M} e(i, j) \tag{2}$$

Modulus titik dan modulus sisi dari granum $G(e, M)$ *dinyatakan berturut-turut sebagai berikut*

$$\|V\,[G(e, M)]\| \coloneqq |M| \tag{3}$$

$$\|E[G(e, M)]\| \coloneqq \frac{1}{2} \sum_{i,j \in M} e(i, j) \tag{4}$$

Definisi 4[11] *Misalkan granum* $H(f, N)$ *dikatakan suatu subgranum* $G(e, M)$, *ditulis* $H(f, N) \subseteq G(e, M)$ *jika* $N \subseteq M$ *dan* $V\,[H(f, N)] \subseteq V\,[G(e, M)]$.

Definisi 5[11] *Dua granum* $H(f, N)$ *dan* $G(e, M)$ *dikatakan isomorfik, ditulis* $H(f, N) \simeq G(e, M)$ *jika terdapat pemetaan bijeksi* $\alpha : H \to G$ *dimana untuk setiap* $(i, j) \in E[H(f, N)]$ *berlaku* $(\alpha(i), \alpha(j)) \in E[G(e, M)]$. *Isomorpisma antara granum* $H(f, N)$ *dan* $G(e, M)$ *dikatakan bijeksi* α

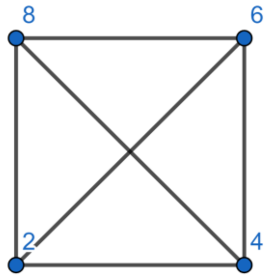
Adapun penenamaan khusus bagi suatu granum yang isomorfik dengan granum tertentu dapat dilihat pada definisi berikut.

Definisi 6[11] *Diberikan bilangan* $n \in \mathbb{N}$. *Granum* $G(e, M)$ *dikatakan sebagai granum lengkap dengan* n *titik jika granum* $G(e, M)$ *isomorfik dengan granum* $W(f, [n])$ *dimana* $[n] \coloneqq \{1, 2, \dots, n\}$ *dan*

$$f(i, j) = sgn\,|i - j| \tag{5}$$

Untuk setiap $i, j \in [n]$

Contoh 7[11] *Granum* $G(e,M)$, *dengan* $M = \{2,4,6,8\}$ *dan* $e(2,4) = e(2,6) = e(2,8) = e(4,6) = e(4,8) = e(6,8) = 1$ *merupakan granum lengkap dengan 4 titik.*



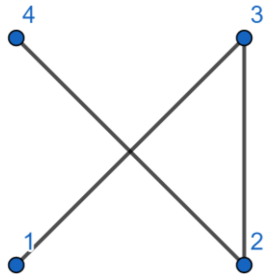
Gambar 2. Granum Lengkap $G(e,M)$

Definisi 8[11] *Diberikan bilangan* $n \in \mathbb{N}$. *Granum* $G(e,M)$ *dikatakan sebagai granum lintasan dengan* n *titik jika granum* $G(e,M)$ *isomorfik dengan granum* $X(f,[n])$ *dimana*

$$f(i,j) = 1 - sgn\,\big||i-j|-1\big| \qquad (6)$$

Untuk setiap $i,j \in [n]$

Contoh 9[11] *Granum* $G(e,M)$, *dengan* $M = \{1,2,3,4\}$, $e(1,2) = e(1,4) = e(3,4) = 0$ *dan* $e(1,3) = e(2,3) = e(2,4) = 1$ *merupakan suatu granum lintasan dengan 4 titik.*



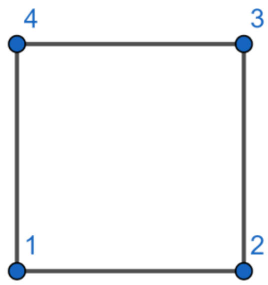
Gambar 3. Granum Lintasan $G(e,M)$

Definisi 10[11] *Diberikan bilangan* $n \in \mathbb{N}$. *Granum* $G(e,M)$ *dikatakan sebagai granum sikel dengan* n *titik jika granum* $G(e,M)$ *isomorfik dengan granum* $Y(f,[n])$ *dimana*

$$f(i,j) = 1 - sgn\,\big|(|i-j|-1)\big(|i-j|-(n-1)\big)\big| \qquad (7)$$

Untuk setiap $i,j \in [n]$

Contoh 11[11] *Granum* $G(e,M)$, *dengan* $M = \{1,2,3,4\}$, $e(1,3) = e(2,4) = 0$, $e(1,2) = e(2,3) = e(3,4) = e(1,4) = 1$*merupakan suatu granum sikel dengan 4 titik.*



Gambar 4. Granum Sikel $G(e, M)$

Berikut beberapa teorema yang berkaitan dengan granum biasa

Teorema 12[11] *Untuk setiap granum* $G(e, M)$ *berlaku* $\|E[G(e, M)]\| \in \mathbb{N} \cup 0$ *dan*

$$\sum_{i \in M} \rho(i) = 2 \,.\, \|E[G(e, M)]\| \tag{8}$$

Akibat 13[11] *Diberikan granum* $G(e, M)$ *dan fungsi* $O : V\,[G(e, M)] \to \{0, 1\}$ *dengan* $O(i) \coloneqq \rho(i) - 2 \cdot \lfloor \frac{\rho(i)}{2} \rfloor$ *untuk* $i \in V\,[G(e, M)]$ *maka* $\sum_{i \in M} O(i) \equiv 0(mod\ 2)$.

Proposisi 14[11] *Diberikan granum* $G(e, M)$. *Jika*

$$T \coloneqq \{r + s : r, s \in M, e(r, s)\} = 1$$

dan

$$K \coloneqq \{|r - s| : r, s \in M, e(r, s)\} = 1$$

maka konektor e memiliki bentuk

$$e(i, j) = \left(1 - sgn \prod_{p \in T} |(i + j) - p|\right)\left(1 - sgn \prod_{q \in K} \big||i - j| - q\big|\right) \tag{9}$$

Untuk setiap $i, j \in M$

Berikut adalah definisi granum terhubung dan granum Eulerian $G(e, M)$ pada himpunan bagian terbatas dari bilangan asli.

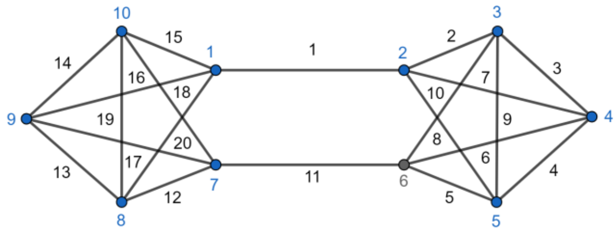
Definisi 15 *Diberikan sebuah granum* $G(e, M)$ *disebut terhubung jika untuk setiap* $u, v \in M$ *dengan* $u \neq v$ *terdapat sebuah subgranum lintasan* $G'(e, M') \subseteq G(e, M)$ *dimana* $u, v \in M'$.

Definisi 16 *Sebuah granum* $G(e, M)$ *disebut granum Eulerian jika terdapat sebuah pemetaan surjektif* $\phi : [\| E(G(e,\ M)) \| + 1] \to M$ *sedemikian sehingga*

$$e(\phi(n), \phi(n + 1)) = 1 \tag{10}$$

untuk setiap $n \in [\|E(G(e, M))\|]$.

Contoh 17 *Diberikan gambar granum Eulerian* $G(e, M)$ *sebagai berikut*



Gambar 5. Granum Eulerian $G(e, M)$

Gambar tersebut menunjukan sebuah granum Eulerian G(e, M) dengan $M = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ *dan* $e(1,1) = 0$, $e(1,2) = 1$, $e(1,3) = 0$, $e(1,4) = 0$, $e(1,5) = 0$, $e(1,6) = 0$, $e(1,7) = 1$, $e(1,8) = 1$, $e(1,9) = 1$, $e(1,10) = 1$, $e(2,2) = 0$, $e(2,3) = 1$, $e(2,4) = 1$, $e(2,5) = 1$, $e(2,6) = 0$, $e(2,7) = 0$, $e(2,8) = 0$, $e(2,9) = 0$, $e(2,10) = 0$, $e(3,3) = 0$, $e(3,4) = 1$, $e(3,5) = 1$, $e(3,6) = 1$, $e(3,7) = 0$, $e(3,8) = 0$, $e(3,9) = 0$, $e(3,10) = 0$, $e(4,4) = 0$, $e(4,5) = 1$, $e(4,6) = 1$, $e(4,7) = 0$, $e(4,8) = 0$, $e(4,9) = 0$, $e(4,10) = 0$, $e(5,5) = 0$, $e(5,6) = 1$, $e(5,7) = 0$, $e(5,8) = 0$, $e(5,9) = 0$, $e(5,10) = 0$, $e(6,6) = 0$, $e(6,7) = 1$, $e(6,8) = 0$, $e(6,9) = 0$, $e(6,10) = 0$, $e(7,7) = 0$, $e(7,8) = 1$, $e(7,9) = 1$, $e(7,10) = 1$, $e(8,8) = 0$, $e(8,9) = 1$, $e(8,10) = 1$, $e(9,9) = 0$, $e(9,10) = 1$, $e(10,10) = 0$. *Granum ini memiliki lintasan yang melewati semua titik dan sisi. Lintasan ini dimulai dari titik 1 dan berakhir pula di titik 1 sekaligus menunjukan bahwa lintasan tersebut melewati setiap sisi tepat satu kali yang dijamin oleh adanya pemetaan surjektif* $\phi : [\| E(GM\ e\ ) \| + 1] \to M$ *dengan* $\phi(1) = 1$, $\phi(2) = 2$, $\phi(3) = 3$, $\phi(4) = 4$, $\phi(5) = 5$, $\phi(6) = 6$, $\phi(7) = 4$, $\phi(8) = 2$, $\phi(9) = 5$, $\phi(10) = 3$, $\phi(11) = 6$, $\phi(12) = 7$, $\phi(13) = 8$, $\phi(14) = 9$, $\phi(15) = 10$, $\phi(16) = 1$, $\phi(17) = 9$, $\phi(18) = 7$, $\phi(19) = 10$, $\phi(20) = 8$, $\phi(21) = 1$.

Berikut ini adalah teorema yang menjamin bahwa setiap granum Eulerian adalah terhubung.

Teorema 18 *Setiap granum Eulerian terhubung.*

Bukti. Diberikan sebarang granum Eulerian $G(e, M)$. Maka terdapat sebuah pemetaan surjektif $\phi : [\| E(GM\ e\ ) \| + 1] \to M$ sedemikian sehingga

$$e\big(\phi(n), \phi(n+1)\big) = 1 \tag{11}$$

untuk setiap $n \in [\|E(G_e^M)\|]$. Ambil sebarang $p, q \in M$ dengan $p \neq q$. Didefinisikan

$$n_p \coloneqq min\{n \in [\|E(G_e^M)\| + 1]: \phi(n) = p\}$$
$$n_q \coloneqq min\{n \in [\|E(G_e^M)\| + 1]: \phi(n) = q\}$$

Jika $n_p = n_q$ maka $p = \phi(n_p) = \phi(n_q) = q$, kontradiksi. Jadi haruslah $n_p \neq n_q$. Untuk $n_p \neq n_q$ akan dibagi menjadi dua kasus.

(kasus 1) Jika $n_p < n_q$ maka pandang relasi rekursif a_k dengan

$$a_{\boldsymbol{k}} = \begin{cases} n_{\boldsymbol{p}}, & jika\ k = 0 \\ max\{n \in \mathbb{N}: e(\phi(a_{k-1}), \phi(m)) \wedge a_{k-1} < m \leq n_q\}, & jika\ k \geq 1 \end{cases} \tag{12}$$

Karena $\{a_k\}$ terbatas diatas oleh n_q maka $\{a_k\}$ memiliki nilai maksimum, namakan a_t untuk suatu $t \in \mathbb{N}$. Berdasarkan definisi dari a_k maka $a_t \leq n_q$. Jika $a_t < n_q$ maka $a_t + 1 \leq n_q$. Tetapi berdasarkan persamaan (11) diperoleh

$$e(\phi(a_k), \phi(a_k + 1)) = 1 \tag{13}$$

yang kontradiksi dengan a_t adalah maksimum dai $\{a_k\}$. jadi haruslah $a_t = n_q$. Hal ini berarti $n_p, n_q \in \{a_k\}$. Akibatnya $p, q \in \{\phi(a_k)\}$.

(kasus 2) Jika $n_p > n_q$ maka cara pembuktian sama dengan $n_p < n_q$.

selanjutnya akan ditunjukan bahwa granum $G'(e, \{\phi(a_k)\})$ adalah sebuah subgranum lintasan dari $G(e, M)$. Pandang pemetaan bijektif $\omega : [t + 1] \to \{\phi(a_k)\}$ dimana $\omega(r) = \phi(a_{k-1})$ untuk setiap $r \in [t + 1]$. Pandang pula granum lintasan $H(f, [t + 1])$ dengan $f(t_i, t_j) = 1 - sgn||t_i - t_j| - 1|$ untuk $t_i, t_j \in [t + 1]$. Perhatikan bahwa jika

$$f(t_i, t_j) = 1 \Rightarrow |t_i - t_j| = 1 \Rightarrow e\left(\phi(a_{t_i} - 1), \phi\left(a_{t_j} - 1\right)\right) = 1 \Rightarrow e\left(\omega(a_{t_i}), \omega\left(a_{t_j}\right)\right) = 1$$

yang berarti $G'(e, \{\phi(a_k)\})$ isomorfik dengan $H(f, [t])$. Jadi, granum $G'(e, \{\phi(a_k)\})$ adalah sebuah granum lintasan. Dengan demikian disimpulkan bahwa granum $G(e, M)$ adalah terhubung.

■

4 Simpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan, maka dapat disimpulkan bahwa sifat fundamental pada granum Eulerian telah ditunjukan dalam penelitian ini dan telah dibuktikan bahwa granum Eulerian adalah terhubung.

5 Daftar Pustaka

[1] F. Daniel and P. Taneo, *Teori Graf*. Yogyakarta: Penerbit Deepublish, 2019.

[2] A. Khan and S. A. Kauser, "A study of some domination parameters of undirected power graphs of Cyclic groups A study of some domination parameters of undirected power

graphs of Cyclic groups," *Int. J. Futur. Gener. Commun. Netw.*, vol. 13, no. August 2020, pp. 2674–2677, 2023.

[3] S. Dalal, J. Kumar, and S. Singh, "On the Connectivity and Equality of Some Graphs on Finite Semigroups," *Bull. Malaysian Math. Sci. Soc.*, vol. 46, no. 1, p. 25, 2022, doi: 10.1007/s40840-022-01411-z.

[4] I. Chakrabarty, J. V. Kureethara, and M. Acharya, "a Study of an Undirected Graph on a Finite Subset of Natural Numbers," *South East Asian J. Math. Math. Sci.*, vol. 18, no. 3, pp. 433–448, 2022, doi: 10.56827/SEAJMMS.2022.1803.35.

[5] I. Chakrabarty, M. Acharya, and J. V. Kureethara, "on the Generalized Complement of Some Graphs," *Asia Pacific J. Math.*, vol. 8, no. 22, pp. 1–7, 2021, doi: 10.28924/APJM/8-22.

[6] I. Chakrabarty, J. V. Kureethara, and M. Acharya, "THE G (m,n) GRAPH ON A FINITE SUBSET OF NATURAL NUMBERS," India, 2021, pp. 45–59.

[7] I. Chakrabarty, "On some structural properties of (Gm,n) graphs," *Mapana Jounal Sci.*, vol. 18, no. 2, pp. 45–52, 2019, doi: 10.12723/mjs.50.3.

[8] S. A. Kauser and M. Siva Parvathi, "Domatic number of an undirected graph G(m,n)," *Adv. Math. Sci. J.*, vol. 9, no. 10, pp. 7859–7864, 2020, doi: 10.37418/amsj.9.10.18.

[9] S. A. Kauser and A. Khan, "Clique Domination in an Undirected Graph G (m, n)," *J. Comput. Math. Sci.*, vol. 10, no. September, pp. 1585–1588, 2019.

[10] S. A. Kauser and M. S. Parvati, "Independent, Connected and Connected Total Domination in an Undirected Graph G (m,n)," *J. Comput. Math. Sci.*, vol. 10, no. 5, pp. 1077–1081, 2019, doi: 10.29055/jcms/1093.

[11] A. Asriadi, "Sebuah Generalisasi Graf Tak Berarah Pada Himpunan Bagian Terbatas Dari Bilangan Asli," *J. Mat. UNAND*, vol. 11, no. 1, p. 47, 2022, doi: 10.25077/jmu.11.1.47-52.2022.

[12] I. Chakrabarty, J. V. Kureethara, and M. Acharya, "An Undirected Graph On A Finite Subset Of Natural Numbers," *Indian J. Discret. Math*, vol. 1, no. 3, pp. 128–138, 2021, doi: 10.56827/SEAJMMS.2022.1803.35.

[13] G. Costain, "On the Additive Graph Generated by a Subset of the Natural Numbers," McGILL University, 2008.