

Analisis Empiris dari Variasi Kontinu dan Lompatan dalam Model *Threshold* GARCH dengan Ukuran *Realized*

Didit B. Nugroho^{1*}, Fika M. Hanafi², Agnes D. Puspitasari², Faldy Tita², Lennox Larwuy²

¹Magister Data Sains, Universitas Kristen Satya Wacana, Salatiga, Indonesia

Study Center for Multidisciplinary Applied Research and Technology (SeMARTy)

²Program Studi Matematika, Universitas Kristen Satya Wacana, Salatiga, Indonesia

*e-mail: didit.budinugroho@uksw.edu

Diajukan: 21 Mei 2024, Diperbaiki: 4 Nopember 2024, Diterima: 5 Nopember 2024

Abstrak

Volatilitas adalah ukuran fluktuasi harga aset keuangan yang tak terpisahkan dari dinamika pasar, tidak hanya sebagai indikator risiko tetapi juga sebagai sumber informasi tentang peluang dan ketidakpastian bagi investor. Pendekatan utama dalam mengukur risiko pasar keuangan yaitu dengan pemodelan dan estimasi volatilitas. Studi ini fokus pada pemodelan volatilitas menggunakan kerangka *Threshold Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity* (TGARCH) dengan order (1,1). Pertama kali studi mengkonstruksi model TGARCH-X dan *Realized* TGARCH (RealTGARCH) yang memperhatikan ukuran *Realized Volatility* (RV) sebagai variabel eksogen. Selanjutnya, model tersebut dikembangkan menjadi model TGARCH-CJ dan RealTGARCH-CJ dengan cara mendekomposisi komponen RV menjadi komponen kontinu dan lompatan. Sebagai ilustrasi empiris, analisis didasarkan pada hasil estimasi model menggunakan metode *Adaptive Random Walk* Metropolis untuk data Tokyo Stock Price Index (TOPIX) Jepang, yang merupakan representasi yang baik dari keseluruhan pergerakan saham Jepang karena mencakup sebagian besar perusahaan yang terdaftar di Bursa Efek Jepang, dimana Jepang merupakan negara ekonomi terbesar ketiga dunia berdasarkan *Gross Domestic Product* tahun 2024. Aplikasi model memanfaatkan data frekuensi 1 dan 5 menit, yang secara umum menawarkan keunggulan dalam menangkap perubahan volatilitas yang cepat, lebih akurat dan *real-time*. Perbandingan pencocokan model berdasarkan empat kriteria informasi (*Akaike Information Criterion* (AIC), *Consistent AIC*, *Bayesian Information Criterion* (BIC), dan *Adjusted BIC*) menunjukkan keunggulan yang signifikan untuk model-model dengan komponen kontinu dan lompatan. Dengan pengaplikasian ukuran RV interval waktu 1 dan 5 menit, model terbaik diberikan oleh RealTGARCH-CJ yang mengadopsi ukuran RV 1 menit. Secara khusus, ini juga didukung oleh signifikansi dari efek *leverage*. Hasil ini mengindikasikan bahwa penambahan persamaan ukuran realisasi, komponen lompatan, dan penggunaan frekuensi yang lebih tinggi mampu memperbaiki model.

Kata Kunci: data frekuensi tinggi, inferensi Bayes, volatilitas

Abstract

Volatility is a measure of financial asset price fluctuations that is integral to market dynamics, not only as an indicator of risk but also as a source of information about opportunities and uncertainties for investors. The main approaches in measuring financial market risk are volatility modeling and estimation. This study focuses on volatility modeling using the Threshold Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity (TGARCH) framework with order (1,1). It first constructs the TGARCH-X and Realized TGARCH (RealTGARCH) models that consider the Realized Volatility (RV) measure as an exogenous variable. Furthermore, the model is developed into TGARCH-CJ and RealTGARCH-CJ models by decomposing the RV component into continuous and jump components. As an empirical illustration, the analysis is based on the model estimation results using the Adaptive Random Walk Metropolis method for the Japanese Tokyo Stock Price Index (TOPIX) data, which is a good representation of the overall

movement of Japanese stocks as it covers most of the companies listed on the Japan Stock Exchange, where Japan is the world's third largest economy by Gross Domestic Product in 2024. The model application utilizes 1 and 5 minute frequency data, which generally offers the advantage of capturing rapid, more accurate and real-time volatility changes. The comparison of model fit based on the four information criteria (Akaike Information Criterion (AIC), Consistent AIC, Bayesian Information Criterion (BIC), dan Adjusted BIC) shows significant advantages for models with continuous and jump components. With the application of RV with 1 and 5 minutes time scale, the best model is provided by RealTGARCH-CJ which adopts RV 1 minute. In particular, this is also supported by the significance of leverage effect. This results indicate that the addition of the realized measure equation, the jump component, and the use of higher frequencies improved the model.

Keywords: Bayesian inference, high frequency data, volatility

1 Pendahuluan

Volatilitas (*volatility*) merupakan ukuran variabilitas atau fluktuasi harga aset keuangan pada kurun waktu tertentu yang tidak terpisahkan dari dinamika pasar keuangan. Ukuran tersebut bukan hanya sebagai indikator risiko bagi para investor, tetapi juga sumber informasi penting tentang peluang dan ketidakpastian [1]. Dalam konteks keuangan, penelitian mengenai volatilitas aset seperti mata uang, suku bunga, indeks saham, dan komoditas menjadi dasar bagi berbagai aspek keuangan, seperti penetapan harga aset modal, derivatif keuangan, serta pengukuran dan manajemen risiko finansial [2].

Dalam upaya untuk mengukur risiko pasar keuangan, pemodelan dan estimasi volatilitas menjadi salah satu pendekatan utama yang digunakan. Model *Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity* (GARCH) yang diperkenalkan di [3] merupakan model yang populer dalam menggambarkan volatilitas aset keuangan yang bersifat heteroskedastik atau berfluktuasi sepanjang waktu [4].

Studi di [5] memperbaiki model GARCH dengan memasukkan komponen ukuran *realized* sebagai variabel eksogen dalam proses dinamika volatilitas, yang selanjutnya dinamai sebagai model GARCH-X. Namun di pasar keuangan yang realistis, volatilitas seringkali tidak hanya merupakan proses yang kontinu, tetapi mungkin terdapat komponen lompatan yang signifikan. Oleh karena itu, [6] mendekomposisi variabel eksogen menjadi komponen kontinu (*continuous*) C dan lompatan (*jump*) J dan membuktikan secara empiris bahwa model yang diusulkan mampu memprediksi volatilitas di masa depan dengan lebih baik. Model tersebut kemudian disebut sebagai model GARCH-CJ.

Model GARCH-X juga telah dikembangkan di [7] menjadi model *Realized* GARCH (RealGARCH) dengan cara menyatakan variabel eksogen sebagai suatu volatilitas bersyarat ditambah kesalahan acak. Model ini menyediakan kerangka kerja yang efektif dan fleksibel untuk pemodelan yang menggabungkan proses *return* dan proses ukuran *realized* [8].

Dalam realitas pasar, volatilitas seringkali tidak selalu simetris, yang berarti adanya kemungkinan hasil volatilitas yang berbeda ketika *return* masa lalu bernilai positif atau negatif pada besaran yang sama. Mempertimbangkan hal tersebut, [9] memperluas model GARCH menjadi *Threshold Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity* (TGARCH) sebagai salah satu model yang memasukkan relasi asimetris antara volatilitas dan *return*. Model ini telah ditunjukkan untuk menyediakan pencocokan yang lebih baik dibandingkan dengan GARCH simetris, bahkan dengan GARCH asimetris lainnya seperti Exponential GARCH.

Termotivasi oleh studi-studi di [5], [6], [7], [9], studi ini memperluas model TGARCH menjadi TGARCH-X, TGARCH-CJ, RealTGARCH, dan RealTGARCH-CJ. Sejauh pengetahuan penulis, belum ada literatur yang mempelajari keempat model tersebut. Karena itu kontribusi pertama dari studi ini yaitu menyediakan perbandingan empiris dari kinerja pencocokan model-model bertipe TGARCH dalam mengukur volatilitas aset keuangan.

Metode estimasi parameter untuk model bertipe TGARCH pada studi ini yaitu menggunakan *Adaptive Random Walk Metropolis* (ARWM) yang diperkenalkan pertama kali di [10]. Metode tersebut dikerjakan dalam algoritma *Markov Chain Monte Carlo* (MCMC). Dalam konteks model GARCH-X dan RealGARCH, metode ARWM dalam MCMC telah dibuktikan efisien secara statistik di [2], [11], [12]. Karena itu, kontribusi kedua dari studi ini yaitu mengevaluasi efisiensi dari metode ARWM dalam mengestimasi model bertipe TGARCH.

2 Metode Penelitian

2.1 Konstruksi model-model TGARCH-X dan RealTGARCH

Dimisalkan pengembalian (*return*) aset pada waktu t dinyatakan oleh R_t . Prosedur yang sangat umum digunakan di bidang keuangan dalam menghitung *return* aset pada periode waktu t :

$$R_t = 100 \times [\ln S_t - \ln S_{t-1}],$$

yang mana S_t menyatakan harga aset pada waktu t . Dengan asumsi proses *return* pada waktu t berdistribusi Normal dengan rerata nol dan simpangan baku σ_t , persamaan untuk *return* dinyatakan sebagai

$$R_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0,1),$$

dimana dinamika dari proses volatilitas σ_t yang mengikuti model TGARCH(1,1) bergantung pada variabel *return* positif dan negatif lag-1 dan volatilitas bersyarat lag-1, yang dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \sigma_t &= \omega + \alpha_1 R_{t-1}^+ - \alpha_2 R_{t-1}^- + \beta \sigma_{t-1}, \\ \omega &> 0 \text{ dan } \alpha_1, \alpha_2, \beta \geq 0, \end{aligned}$$

yang mana $R_{t-1}^+ = \max\{R_t, 0\}$ dan $R_{t-1}^- = \min\{R_t, 0\}$ berturut-turut menyatakan bagian-bagian positif dan negatif dari *return*. Serupa dengan model GARCH-X(1,1), dinamika untuk proses volatilitas TGARCH-X(1,1) dibentuk seperti berikut:

$$\begin{aligned}\sigma_t &= \omega + \alpha_1 R_{t-1}^+ - \alpha_2 R_{t-1}^- + \beta \sigma_{t-1} + \gamma X_{t-1}, \\ \omega, \gamma &> 0 \text{ dan } \alpha_1, \alpha_2, \beta \geq 0,\end{aligned}$$

yang mana X_{t-1} menyatakan variabel eksogen.

Sementara itu, model RealGARCH(1,1) menghubungkan variabel eksogen dengan volatilitas bersyarat melalui suatu persamaan acak. Termotivasi dari model ini, model RealTGARCH(1,1) dikonstruksi seperti berikut:

$$\begin{aligned}\sigma_t &= \omega + \alpha_1 R_{t-1}^+ - \alpha_2 R_{t-1}^- + \beta \sigma_{t-1} + \gamma X_{t-1}, \\ X_t &= \xi + \varphi \sigma_t^2 + \tau(y_t) + \eta u_t, \quad u_t \sim N(0,1),\end{aligned}$$

dengan $\xi, \varphi, \eta > 0$ dan $\tau(y_t) = \tau_1 y_t + \tau_2 (y_t^2 - 1)$ untuk $y_t = \frac{R_t}{\sigma_t}$.

Ide dari kedua model di atas yaitu menambahkan ukuran *realized* sebagai variabel eksogen X . Studi-studi literatur menegaskan bahwa model RealGARCH yang memasukkan ukuran-ukuran *realized* seperti *Realized Volatility* (RV), *Realized Bipower Volatility* (RBV), *Realized Kernel* (RK) memberikan estimasi volatilitas yang lebih akurat dan bahwa volatilitas di masa depan mungkin lebih dipengaruhi oleh kerugian saat ini, yang dikenal sebagai ukuran risiko [1]. Sebagai kerangka dasar, ukuran RV dihitung sebagai akar kuadrat dari *realized variance*. Studi di [13] mengusulkan *realized variance* yang dihitung dengan cara menjumlahkan hasil kuadrat dari selisih harga saat ini dengan harga sebelumnya pada interval waktu yang singkat (seperti detik atau menit) dalam *intra-harian* (*intraday*). Dimisalkan pada hari ke- t terdapat *return* *intra-harian* $\{R_{t,1}, R_{t,2}, \dots, R_{t,n}\}$, *realized variance* dirumuskan oleh:

$$X_t^2 = \sum_{i=1}^n R_{t,i}^2.$$

2.2 Konstruksi model-model TGARCH-CJ dan RealTGARCH-CJ

Serupa dengan studi di [6], model TGARCH-CJ(1,1) dikonstruksi seperti berikut:

$$\begin{aligned}\sigma_t &= \omega + \alpha_1 R_{t-1}^+ - \alpha_2 R_{t-1}^- + \beta \sigma_{t-1} + \lambda_1 C_{t-1} + \lambda_2 J_{t-1}, \\ \omega, \lambda_1, \lambda_2 &> 0 \text{ dan } \alpha_1, \alpha_2, \beta \geq 0.\end{aligned}$$

Komponen kontinu C_t dan lompatan J_t dihitung dari data *intra-harian* dengan rumus:

$$\begin{aligned}C_t &= I_{Z_t > \theta_a} (X_t - M_t), \\ J_t &= I_{Z_t \leq \theta_a} X_t + I_{Z_t > \theta_a} M_t,\end{aligned}$$

yang mana M_t menyatakan ukuran median RV, $I_{q(Z)}$ menyatakan fungsi indikator bernilai 1 jika pernyataan $q(Z)$ adalah benar, Φ_α menyatakan kuantil- α (seperti $\alpha = 1\%$, 5% , 10%) dari fungsi distribusi Normal baku, dan statistik Z_t dinyatakan oleh:

$$Z_t = \frac{\sqrt{n} \left(1 - \frac{B_t}{X_t}\right)}{\sqrt{\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \pi - 5\right) \max\left\{1, \frac{Q_t}{B_t^2}\right\}}}$$

dengan n menyatakan banyaknya sampel *return* intra-harian pada hari ke- t , B_t menyatakan *realized bipower variation* dan Q_t menyatakan *realized tripower quarticity*. Ukuran-ukuran *realized* M_t , B_t , dan Q_t dihitung menggunakan rumus-rumus seperti berikut (lihat [14]):

$$M_t = \frac{\pi}{6 - 4\sqrt{3} + \pi} \left(\frac{n}{n-2}\right) \sum_{i=2}^{n-1} \text{Median}(|R_{t,i-1}|, |R_{t,i}|, |R_{t,i+1}|)^2,$$

$$B_t = \frac{\pi}{2} \left(\frac{n}{n-1}\right) \sum_{i=2}^n |R_{t,i-1}| |R_{t,i}|,$$

$$Q_t = \frac{n}{\left(2^{\frac{2}{3}} \Gamma\left(\frac{7}{6}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^3} \left(\frac{n}{n-2}\right) \times \sum_{i=2}^{n-1} |R_{t,i-1}|^{\frac{4}{3}} |R_{t,i}|^{\frac{4}{3}} |R_{t,i+1}|^{\frac{4}{3}},$$

yang mana Γ menyatakan fungsi gamma.

Selanjutnya, model RealTGARCH-CJ dikonstruksi dengan menyatakan komponen kontinu C_t sebagai suatu persamaan dari volatilitas bersyarat ditambah kesalahan acak. Model dapat dinyatakan seperti berikut:

$$\sigma_t = \omega + \alpha_1 R_{t-1}^+ - \alpha_2 R_{t-1}^- + \beta \sigma_{t-1} + \lambda_1 C_{t-1} + \lambda_2 J_{t-1},$$

$$C_t = \xi + \varphi \sigma_t^2 + \tau(y_t) + \eta u_t, \quad u_t \sim N(0,1).$$

2.3 Metode estimasi

Studi ini mengevaluasi potensi metode ARWM sebagai alat yang efisien dalam mengestimasi model-model bertipe TGARCH. Metode ARWM diperkenalkan di [10] sebagai pengembangan metode RWM untuk meningkatkan efisiensi dalam hal konvergensi dengan cara memperbarui sampel parameter secara adaptif. Metode ini telah dibuktikan efisien secara empiris di [2], [11], [12], [15] dalam pengestimasian model GARCH-X, RealEGARCH, dan RealGJR.

Metode ARWM dikerjakan dalam algoritma MCMC, yang menurut [16] merupakan metode yang semakin populer untuk mendapatkan informasi estimasi distribusi *posterior* dalam inferensi Bayes, yang mana distribusi *posterior* sulit didapatkan secara analitik. Algoritma MCMC memiliki

dua tahap yaitu menghasilkan rantai Markov dan memperkirakan sifat distribusi parameter (seperti rerata, simpangan baku, dan interval Bayes) berdasarkan pendekatan Monte Carlo. Secara khusus, interval Bayes untuk mengukur signifikansi nilai parameter dapat menggunakan interval *Highest Posterior Density* (HPD), lihat [2] untuk algoritmanya. Secara umum, teorema Bayes untuk mencari estimasi parameter θ dalam algoritma MCMC berdasarkan pada distribusi *posterior* dinyatakan sebagai berikut :

$$f(\theta|\text{data}) = L(\text{data}|\theta) \times p(\theta),$$

yang mana L merupakan fungsi *likelihood* dan p merupakan distribusi *prior*.

Dimisalkan $\mathbf{R} = \{R_1, R_2, \dots, R_T\}$ adalah data *return* harian, $\mathbf{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_T\}$ adalah komponen kontinu, dan $\mathbf{J} = \{J_1, J_2, \dots, J_T\}$ adalah komponen lompatan. Fungsi *log-likelihood* total dari *return* untuk model TGARCH-CJ(1,1) dan RealTGARCH-CJ(1,1) dengan parameter $\theta_1 = (\omega, \alpha_1, \alpha_2, \beta, \lambda_1, \lambda_2)$ dinyatakan sebagai berikut :

$$\ln L(\mathbf{R}|\theta_1, \mathbf{C}, \mathbf{J}) = -\frac{T}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln(\sigma_t^2) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{R_t^2}{\sigma_t^2} .$$

Fungsi *log-likelihood* total dari persamaan ukuran *realized* untuk model RealTGARCH-CJ(1,1) dengan parameter $\theta_2 = (\xi, \varphi, \tau_1, \tau_2, \eta^2)$ dinyatakan sebagai berikut :

$$\ln L(\mathbf{C}|\theta_1, \theta_2, \mathbf{R}) = -\frac{T}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln(\eta^2) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{[C_t - \xi - \varphi \sigma_t^2 - \tau(y_t)]^2}{\eta^2} .$$

Karena itu, fungsi *log-likelihood* total dari model RealTGARCH-CJ(1,1) dengan parameter $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ dinyatakan sebagai berikut :

$$\ln L(\mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{J}|\theta) = \ln L(\mathbf{R}|\theta_1, \mathbf{C}, \mathbf{J}) + \ln L(\mathbf{C}|\theta, \mathbf{R}).$$

Untuk mengukur efisiensi dari metode estimasi, studi ini menghitung *Integrated Autocorrelation Time* (IACT) berdasarkan rantai Markov (nilai-nilai estimasi parameter). IACT mengukur seberapa sampel-sampel parameter berkorelasi dalam urutan MCMC. Dengan kata lain, IACT digunakan untuk memperkirakan banyaknya iterasi yang diperlukan untuk mendapatkan satu sampel yang independen secara statistik. Semakin kecil nilai IACT, semakin efisien metode estimasi, sehingga estimasi menjadi lebih akurat. Salah satu metode yang umum digunakan dalam penghitungan nilai IACT yaitu dengan penaksir periodogram terpotong adaptif di [17]. Kode Matlab untuk estimasi IACT disediakan oleh Marko Laine di <https://github.com/mjllaine/mcmcstat/blob/master/iact.m>

2.4 Kriteria pemilihan model

Dalam memilih model pencocokan yang baik, studi ini menggunakan empat kriteria informasi berdasarkan fungsi *log-likelihood*, seperti *Akaike Information Criterion* (AIC), *Consistent Akaike Information Criterion* (CAIC), *Bayesian Information Criterion* (BIC), dan *Adjusted Bayesian Information Criterion* (ABIC). Setiap kriteria terdiri dari *goodness-of-fit* ditambah penalti untuk mengurangi risiko *overfitting* dan menyediakan cara standar untuk menyeimbangkan sensitivitas dan spesifisitas [18]. Perlu dicatat bahwa kriteria yang berbeda terkadang mendukung model yang berbeda. AIC lebih banyak digunakan dan mudah dihitung, sedangkan CAIC merupakan modifikasi dari AIC dan lebih konsisten dalam memilih model yang benar ketika sampel semakin besar. BIC menggunakan pendekatan Bayes dan memberikan penalti yang lebih besar dibandingkan AIC dan CAIC untuk model yang kompleks. Kriteria ini lebih konsisten dalam memilih model yang benar, terutama ketika model mempunyai banyak parameter. Sementara itu, ABIC yang merupakan modifikasi dari BIC dapat menangani data dengan heteroskedastisitas yang lebih baik dibandingkan dengan BIC, yang dapat menjadi masalah dalam model bertipe GARCH.

Keempat kriteria tersebut dirumuskan seperti berikut:

$$\begin{aligned} \text{AIC} &= -2 \ln L + 2k, \\ \text{CAIC} &= -2 \ln L + k(1 + \ln T), \\ \text{BIC} &= -2 \ln L + k \ln T, \\ \text{ABIC} &= -2 \ln L + k \ln \left(\frac{T + 2}{24} \right), \end{aligned}$$

yang mana k menyatakan banyaknya parameter, L menyatakan nilai *likelihood*, T menyatakan banyaknya sampel data. Nilai empat kriteria menunjukkan sejauh mana model mempunyai keseimbangan terbaik antara akurasi dan kompleksitas. Semakin kecil nilainya maka model semakin baik.

3 Hasil dan Pembahasan

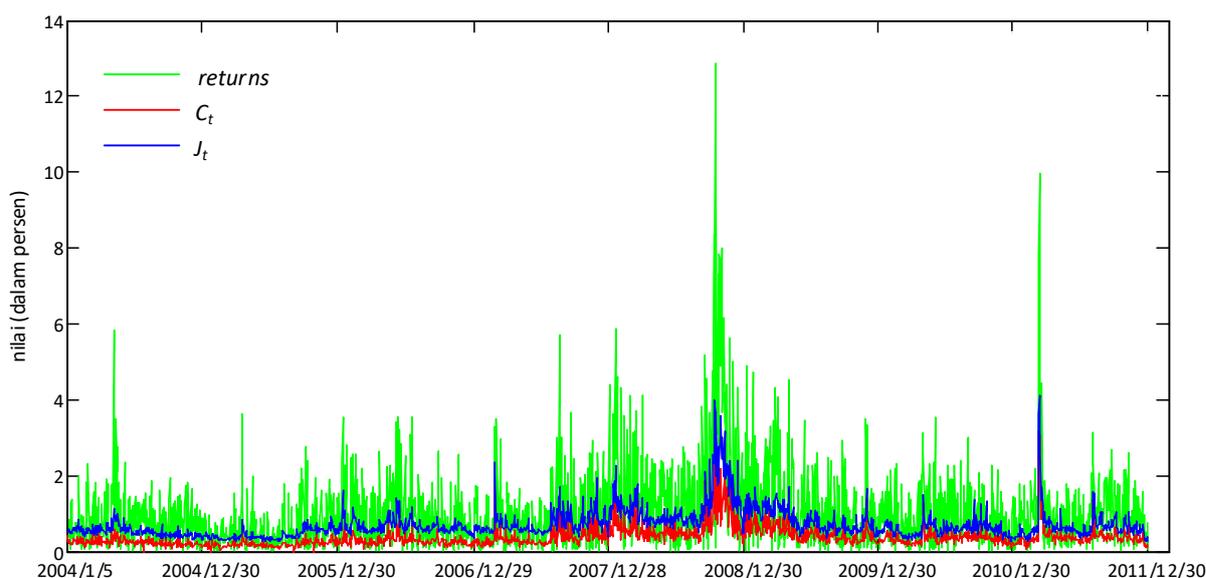
3.1 Deskripsi data

Jepang sebagai negara ekonomi terbesar ketiga dunia dengan GDP terbesar ketiga pada tahun 2024 menjadi salah satu gambaran dari ekonomi dunia. Penggunaan data Tokyo Stock Price Index (TOPIX) sebagai ilustrasi empiris dalam pemodelan volatilitas merupakan pilihan yang tepat karena TOPIX adalah indeks yang melacak kinerja sebagian besar perusahaan yang terdaftar di Bursa Efek Tokyo. Dengan demikian, TOPIX merepresentasikan pasar saham Jepang secara

keseluruhan. Selain itu, TOPIX juga memiliki data historis yang lengkap dan model bertipe GARCH sangat cocok untuk menangkap karakteristik volatilitas pasar saham.

Di sini, data TOPIX yang tersedia mencakup periode dari Januari 2004 hingga Desember 2011. Data pengamatan melibatkan dua jenis, yaitu data *return* dan data eksogen ukuran RV yang dihitung dari data intra-harian. Karena pasar keuangan seringkali mengalami fluktuasi yang sangat cepat dalam skala menit, data frekuensi tinggi memungkinkan untuk menangkap perubahan volatilitas secara lebih akurat dan *real-time*. Secara umum, data frekuensi tinggi (1 menit dan 5 menit) menawarkan keunggulan dalam menangkap perubahan volatilitas yang cepat dan tren volatilitas yang lebih detail.

Gambar 1 menyajikan pergerakan nilai *return* mutlak dan nilai-nilai eksogen selama periode harian yang dihitung dari data TOPIX intra-harian interval waktu 1 menit. Gambar memperlihatkan bukti pengelompokan volatilitas, yang merupakan salah satu dari beberapa fakta runtun waktu keuangan. Dalam hal ini, volatilitas berubah dari waktu ke waktu dan tingkatnya menunjukkan kecenderungan untuk bertahan, yaitu ada periode dengan volatilitas rendah dan periode dengan volatilitas tinggi. Para ahli ekonometrika menyebutnya sebagai *autoregressive conditional heteroskedasticity*. Terdapat pengelompokan volatilitas yang lebih tinggi selama hari-hari perdagangan di tahun 2007, diindikasikan oleh nilai-nilai *return* yang mencapai puncaknya pada musim panas tahun 2007 sebagai dampak finansial dari krisis keuangan global. Terlihat juga adanya lonjakan nilai *return* di tahun 2010 akibat krisis utang Eropa pada awal tahun 2010. Untuk runtun komponen kontinu dan lompatan yang dihitung dari data intra-harian, keduanya serupa dengan pergerakan *return*, sehingga ini menunjukkan terjadinya lompatan yang ekstrim pada periode waktu yang sama dengan *return*.

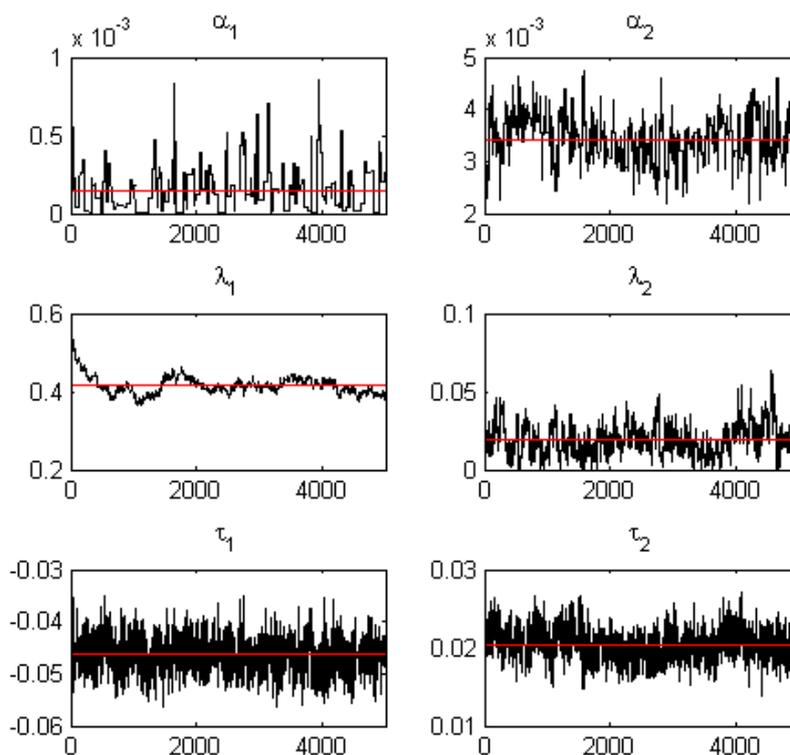


Gambar 1. Plot *return* mutlak $|R_t|$, kontinu (C_t), dan lompatan (J_t) dari data TOPIX 2004–2011 dalam periode harian dari data intra-harian interval waktu 1 menit

3.2 Estimasi model

Pertama kali, konvergensi dari metode ARWM didiagnosis secara visual melalui *trace plot*. *Trace plot* adalah plot deret waktu yang menggambarkan realisasi rantai Markov pada setiap iterasi. Dalam konteks ini, konvergensi dianggap baik jika grafiknya berfluktuasi di sekitar rerata, tampak lebih padat, dan menumpuk [19].

Karena keterbatasan tempat, sebagai contoh, Gambar 2 menampilkan *trace plot* dari nilai estimasi parameter kunci pada model RealTGARCH-CJ(1,1), yaitu parameter-parameter asimetrik, kontinu, dan lompatan. Di sini, MCMC dijalankan sebanyak 6000 iterasi, yang mana 1000 iterasi awal dihapus, sehingga 5000 iterasi sisanya digunakan untuk inferensi. Secara visual ini terlihat bahwa nilai-nilai estimasi dari setiap nilai parameter adalah stasioner (berfluktuasi di sekitar rerata) sehingga rantai Markov dari setiap parameter dapat dikatakan sudah konvergen. Konvergensi dari parameter α_2 , λ_2 , τ_1 , τ_2 bisa dikatakan cepat, sedangkan konvergensi dari α_1 dan λ_1 adalah lambat. Hal ini dikonfirmasi oleh nilai-nilai IACT dalam Tabel 2, dimana nilai-nilai IACT adalah kurang dari 100 untuk α_2 , λ_2 , τ_1 , τ_2 dan lebih besar dari 100 untuk α_1 dan λ_1 . Konvergensi yang lambat ini dikarenakan perlunya sampel yang lebih banyak untuk mencapai tingkat akurasi, yang tentu saja akan membutuhkan waktu komputasi yang lebih lama. Selain itu, masalah tersebut juga disebabkan oleh metode ARWM yang dianggap kurang efisien dalam mengestimasi parameter. Meskipun begitu, karena semuanya sudah konvergen, maka rantai-rantai Markov tersebut bisa digunakan untuk inferensi. Hal ini juga didukung oleh simpangan baku yang relatif sangat kecil (lihat Tabel 1), yang mengindikasikan nilai-nilai estimasi cenderung dekat dengan rerata. Selain itu, berdasarkan beberapa kali menjalankan MCMC, hasil-hasil estimasi juga menunjukkan nilai-nilai yang tidak jauh berbeda, artinya konvergensi yang lambat dalam kasus di atas tidak ada implikasi yang signifikan terhadap hasil estimasi.



Gambar 2. Trace plot estimasi parameter-parameter kunci pada model RealTGARCH-CJ(1,1) yang mengaplikasikan data TOPIX 2004–2011 dalam periode harian dari data intra-harian interval waktu 1 menit

Lebih lanjut, selain rerata dan Simpangan Baku (SB), Tabel 1 menyediakan nilai-nilai Batas Bawah (BB) dan Batas Atas (BB) dari 95% interval HPD untuk parameter-parameter kunci dari model-model RealTGARCH(1,1) dan RealTGARCH-CJ(1,1). Pada kedua model, interval-interval untuk parameter τ_1 dan τ_2 dari fungsi *leverage* tidak memuat nilai 0, yang mengindikasikan estimasinya signifikan pada tingkat 5%. Ini menyediakan bukti adanya sifat *leverage* antara *return* dan volatilitas. Ini berarti bahwa pada besaran *return* yang sama, *return* negatif di masa lalu mempunyai dampak yang lebih besar pada volatilitas saat ini dibandingkan dengan *return* positif. Oleh karena itu, ini penting untuk memasukan fungsi *leverage* dalam proses ukuran di model RealTGARCH(1,1) dan RealTGARCH-CJ(1,1).

Tabel 1. Hasil estimasi parameter kunci yang mengaplikasikan data TOPIX 2004–2011 dalam periode harian dari data intra-harian interval waktu 1 menit

Statistik	Parameter					
	α_1	α_2	λ_1	λ_2	τ_1	τ_2
RealTGARCH(1,1)						
Rerata	0,0001	0,0024	0,2445	-	-0,0420	0,0602
SB	0,0001	0,0005	0,0170	-	0,0043	0,0027
BB	0,0000	0,0015	0,2152	-	-0,0503	0,0553
BA	0,0002	0,0034	0,2746	-	-0,0339	0,0659
IACT	198,5	65,6	268,0	-	10,1	40,3
RealTGARCH-CJ(1,1)						
Rerata	0,0001	0,0034	0,4161	0,0194	-0,0464	0,0205
SB	0,0001	0,0004	0,0242	0,0100	0,0034	0,0020
BB	0,0000	0,0026	0,3753	0,0004	-0,0534	0,0166
BA	0,0004	0,0043	0,4584	0,0374	-0,0405	0,0244
IACT	38,5	89,9	174,5	102,2	8,1	26,2

3.3 Pemilihan model

Tabel 2 menyajikan nilai-nilai *log-likelihood* beserta empat kriteria untuk empat model, yaitu TGARCH-X(1,1), TGARCH-CJ(1,1), RealTGARCH(1,1), dan RealTGARCH-CJ(1,1). Pada model-model bertipe TGARCH(1,1) dengan pengaplikasian data intra-harian interval waktu 1 menit dan 5 menit, tiga kriteria mempunyai nilai yang lebih kecil untuk model TGARCH-X(1,1) dibandingkan model TGARCH-CJ(1,1). Ini mengindikasikan bahwa komponen kontinu dan lompatan tidak mampu memperbaiki model TGARCH-X(1,1).

Hasil berbeda ditunjukkan pada kasus model-model bertipe RealTGARCH(1,1). Di sini, keempat kriteria dari model RealTGARCH-CJ(1,1) mempunyai nilai yang jauh lebih kecil daripada model RealTGARCH(1,1) untuk kasus data intra-harian. Ini mengindikasikan bahwa model dengan komponen kontinu dan lompatan memperbaiki model RealTGARCH(1,1). Jika dibandingkan dengan model bertipe TGARCH(1,1), model-model bertipe RealTGARCH(1,1) lebih unggul untuk setiap kasus data. Karena itu, secara keseluruhan, model RealTGARCH-CJ(1,1) yang mengadopsi ukuran RV 1 menit memberikan pencocokan data terbaik.

Table 2. Nilai Log-Likelihood (LL) dan empat kriteria informasi pada empat model bertipe TGARCH(1,1)

Model	LL	AIC	ABIC	BIC	CAIC
Intra-harian 1 menit					
TGARCH-X(1,1)	-3136,21	6282,43	6294,45	6310,33	6315,33
TGARCH-CJ(1,1)	-3135,17	6282,35	6296,80	6315,84	6321,84
RealTGARCH(1,1)	-2680,54	5381,09	5405,14	5436,91	5446,91
RealTGARCH-CJ(1,1)	-2131,21	4284,43	4310,88	4345,83	4356,83
Intra-harian 5 menit					
TGARCH-X(1,1)	-3121,81	6253,63	6265,65	6281,54	6286,54
TGARCH-CJ(1,1)	-3120,81	6253,62	6268,05	6287,11	6293,11
RealTGARCH(1,1)	-3098,01	6216,03	6240,08	6271,85	6281,85
RealTGARCH-CJ(1,1)	-2957,12	5936,25	5962,70	5997,65	6008,65

4 Simpulan

Studi ini telah menganalisis kinerja pencocokan data untuk model-model TGARCH(1,1) yang memasukkan ukuran *realized* sebagai komponen eksogen. Komponen eksogen yang diperhatikan yaitu ukuran *Realized Volatility* interval waktu 1 menit dan 5 menit serta dekomposisinya menjadi komponen kontinu dan lompatan. Empat model yang dikonstruksi, yaitu TGARCH-X(1,1), TGARCH-CJ(1,1), RealTGARCH(1,1), dan RealTGARCH-CJ(1,1), diaplikasikan pada data TOPIX tahun 2004–2011. Model diestimasi menggunakan metode ARWM yang diimplementasikan dalam algoritma MCMC. Berdasarkan pengamatan visual melalui *trace plot*, metode ARWM telah ditunjukkan mampu menghasilkan estimasi-estimasi parameter kunci yang konvergen. Selanjutnya, berdasarkan kriteria pemilihan model, hasil empiris menunjukkan bahwa pendekomposisian ukuran *realized* menjadi komponen kontinu dan lompatan mampu memperbaiki pencocokan model RealTGARCH(1,1). Terlebih lagi, ukuran *Realized Volatility* 1 menit lebih direkomendasikan daripada interval 5 menit.

5 Ucapan Terima Kasih

Studi ini adalah bagian dari penelitian yang didanai oleh Kantor Wakil Rektor Bidang Riset, Inovasi, dan Kewirausahaan UKSW tahun anggaran 2024 dengan nomor kontrak 032/SPK-PF/RIK/07/2024.

6 Daftar Pustaka

- [1] Y. Wang, Y. Xiang, X. Lei, and Y. Zhou, “Volatility analysis based on GARCH-type models: Evidence from the Chinese stock market,” *Economic Research-Ekonomika Istrazivanja*, vol. 35, no. 1, pp. 2530–2554, 2022, doi: 10.1080/1331677X.2021.1967771.
- [2] D. B. Nugroho, B. A. A. Wicaksono, and L. Larwuy, “GARCH-X(1,1) model allowing a non-linear function of the variance to follow an AR(1) process,” *Commun Stat Appl Methods*, vol. 30, no. 2, pp. 163–178, 2023, doi: 10.29220/CSAM.2023.30.2.163.
- [3] T. Bollerslev, “Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity,” *J Econom*, vol. 31, no. 3, pp. 307–327, Apr. 1986, doi: 10.1016/0304-4076(86)90063-1.
- [4] D. B. Nugroho, A. Priyono, and B. Susanto, “Skew normal and skew Student-t distributions on GARCH(1,1) model,” *Media Statistika*, vol. 14, no. 1, pp. 21–32, 2021, doi: 10.14710/medstat.14.1.21-32.
- [5] R. Engle, “New frontiers for ARCH models,” *Journal of Applied Econometrics*, vol. 17, no. 5, pp. 425–446, 2002, doi: 10.1002/jae.683.
- [6] H. Zhang and Q. Lan, “GARCH-type model with continuous and jump variation for stock volatility and its empirical study in China,” *Math Probl Eng*, vol. 2014, 2014, doi: 10.1155/2014/386721.
- [7] P. R. Hansen, Z. Huang, and H. H. Shek, “Realized GARCH: A joint model for returns and realized measures of volatility,” *Journal of Applied Econometrics*, vol. 27, no. 6, pp. 877–906, 2012, doi: 10.1002/jae.1234.
- [8] H. Xie and C. Yu, “Realized GARCH models: Simpler is better,” *Financ Res Lett*, vol. 33, no. 15, 2020, doi: 10.1016/j.frl.2019.06.019.
- [9] J. M. Zakoian, “Threshold heteroskedastic models,” *J Econ Dyn Control*, vol. 18, no. 5, pp. 931–955, 1994, doi: 10.1016/0165-1889(94)90039-6.
- [10] Y. F. Atchade and J. S. Rosenthal, “On adaptive Markov chain Monte Carlo algorithms,” *Bernoulli*, vol. 11, no. 5, pp. 815–828, 2005, doi: 10.3150/bj/1130077595.
- [11] D. B. Nugroho, O. C. Dimitrio, and F. Tita, “The GARCH-X(1,1) model with exponentially transformed exogenous variables,” *Jurnal Sains dan Teknologi*, vol. 12, no. 1, pp. 65–72, 2023, doi: 10.23887/jstundiksha.v12i1.50714.
- [12] D. B. Nugroho, J. Wijaya, and A. Setiawan, “Modeling of returns volatility through EGARCH model using high-frequency data,” *J Appl Probab Stat*, vol. 18, no. 2, pp. 55–73, 2023.

-
- [13] T. G. Andersen and T. Bollerslev, “Answering the skeptics: Yes, standard volatility models do provide accurate forecasts,” *Int Econ Rev (Philadelphia)*, vol. 39, no. 4, pp. 885–905, 1998, doi: <https://doi.org/10.2307/2527343>.
- [14] S. Degiannakis, G. Filis, T. Klein, and T. Walther, “Forecasting realized volatility of agricultural commodities,” *Int J Forecast*, vol. 38, no. 1, pp. 74–96, Jan. 2022, doi: [10.1016/J.IJFORECAST.2019.08.011](https://doi.org/10.1016/J.IJFORECAST.2019.08.011).
- [15] D. B. Nugroho, H. Wibowo, and A. Saragih, “Modeling daily return volatility through GJR(1, 1) model and realized volatility measure,” *Thailand Statistician*, vol. 22, no. 1, pp. 50–62, 2024, [Online]. Available: <https://ph02.tci-thaijo.org/index.php/thaistat/article/view/252221>
- [16] D. van Ravenzwaaij, P. Cassey, and S. D. Brown, “A simple introduction to Markov Chain Monte–Carlo sampling,” *Psychon Bull Rev*, vol. 25, no. 1, pp. 143–154, Feb. 2018, doi: [10.3758/S13423-016-1015-8/FIGURES/3](https://doi.org/10.3758/S13423-016-1015-8/FIGURES/3).
- [17] A. Sokal, “Monte Carlo methods in statistical mechanics: Foundations and new algorithms,” in *Functional Integration: Basic and Applications*, C. DeWitt-Morette, P. Cartier, and A. Folacci, Eds., New York: Springer, 1997, pp. 131–192.
- [18] J. J. Dziak, D. L. Coffman, S. T. Lanza, R. Li, and L. S. Jermiin, “Sensitivity and specificity of information criteria,” *Brief Bioinform*, vol. 21, no. 2, pp. 553–565, 2020, doi: [10.1093/bib/bbz016](https://doi.org/10.1093/bib/bbz016).
- [19] V. Roy, “Convergence diagnostics for Markov chain Monte Carlo,” *Annu Rev Stat Appl*, vol. 7, pp. 387–412, 2020, doi: [10.1146/annurev-statistics-031219-041300](https://doi.org/10.1146/annurev-statistics-031219-041300).