Limits: Journal of Mathematics and Its Applications
E-ISSN: 2579-8936
P-ISSN: 1829-605X
Vol. 21, No. 2, Juli 2024, 223-235
DOI: http://dx.doi.org/10.12962/limits.v21i2.20482

Kriteria Cauchy Integral Riemann di Ruang Riesz

Muhammad Arifin Ilham [1], Jerrico Nugroho [1], Made Tantrawan [1] *
[1]Departemen Matematika, Universitas Gadjah Mada, Indonesia
e-mail: made.tantrawan@ugm.ac.id

Diajukan: 29 Mei 2024, Diperbaiki: 3 Agustus 2024, Diterima: 17 September 2024

Abstrak

Pada tahun 2008, Boccuto dan Candeloro [1] memperkenalkan suatu versi integral Riemann untuk fungsi bernilai Riesz yang didefinisikan pada suatu interval urutan di ruang Riesz. Dalam tulisan ini, diberikan suatu ekuivalensi definisi dan beberapa versi Kriteria Cauchy dari integral tersebut. Lebih lanjut, diberikan beberapa aplikasi dari Kriteria Cauchy tersebut.

Kata Kunci: Integral Riemann, Kriteria Cauchy, Ruang Riesz

Abstract

In 2008, Boccuto and Candeloro [1] introduced a variant of Riemann integral for Riesz valued functions defined on an order interval in a Riesz space. In this paper, we present an equivalent definition and several Cauchy criterion versions of the integral. Furthermore, some applications of the Cauchy criterion are provided.

***Keywords**: Riemann Integral, Cauchy Criterion, Riesz Spaces*

1 Pendahuluan

Integral Riemann merupakan salah satu konsep yang memiliki peranan penting dalam kalkulus, khususnya dalam menentukan suatu kuantitas (luas, volume, panjang, dan lainnya) dari suatu objek yang dapat direpresentasikan oleh satu atau lebih fungsi. Sejak diperkenalkan pertama kali oleh Bernhard Riemann pada tahun 1854, integral Riemann menjadi dasar bagi banyak teori di bidang matematika dan menjadi alat yang penting di berbagai bidang lainnya, seperti fisika, ekonomi, maupun teknik [2].

Dalam beberapa dekade terakhir, penelitian mengenai integral Riemann telah berkembang secara signifikan. Perkembangannya pun melalui berbagai macam pendekatan dan generalisasi. Generalisasi yang dilakukan dapat berupa memperumum kondisi pada definisi integral Riemann [3], [4], [5] ataupun memperluas ruang model fungsi yang terlibat (baik domain ataupun kodomain) ke ruang yang lebih umum [1], [3], [5], [6], [7], [8]. Perumuman ini menjadi penting agar konsep integral tersebut masih dapat digunakan dalam konteks yang lebih luas dan aplikasi yang lebih kompleks.

Integral Riemann pada mulanya didefinisikan pada fungsi bernilai real dengan domain suatu interval di $\mathbb{R}$. Kemudian, konsep ini dikembangkan untuk fungsi bernilai vektor di $\mathbb{R}^n$ dengan domain suatu himpunan bagian dari $\mathbb{R}^m$ [4]. Beberapa peneliti pun selanjutnya mengembangkan konsep ini ke ruang vektor yang lebih umum seperti pada [1], [6], [7], [8]. Salah satu ruang vektor umum yang cukup menarik perhatian peneliti dewasa ini adalah ruang Riesz, yang merupakan suatu ruang vektor yang dilengkapi suatu relasi urutan parsial yang kompatibel di dalamnya [9], [10]. Ruang Riesz yang merupakan perumuman dari $\mathbb{R}^n$ ini telah banyak dijadikan sebagai ruang model dalam berbagai bidang di ekonomi dan matematika keuangan [11], [12].

Salah satu generalisasi integral Riemann di ruang Riesz diberikan oleh Boccuto dan Candeloro [1] pada tahun 2008 di mana mereka mendefinisikan integral Riemann untuk fungsi bernilai Riesz yang didefinisikan pada suatu interval di dalam suatu ruang Riesz. Dalam tulisannya, mereka menjelaskan sifat dasar integral Riemann dan aplikasinya ke suatu model persamaan diferensial yang terkait dengan Kalkulus Stokastik dan Teori Fraktal. Namun, sifat dasar yang dibahas hanya terbatas pada sifat linearitas, keterintegralan fungsi kontinu seragam, dan Teorema Fundamental Kalkulus. Sejauh pengamatan penulis, Kriteria Cauchy dari generalisasi integral Riemann di ruang Riesz belum pernah dilakukan. Kriteria Cauchy dari integral Riemann di dalam kasus ruang model $\mathbb{R}$ sendiri memiliki banyak manfaat di antaranya, menunjukkan sifat keterintegralan Riemann suatu fungsi yang dapat dipertahankan ketika domain dibatasi menjadi sebarang subinterval bagiannya dan memperoleh versi Teorema Apit untuk integral Riemann [13]. Hal ini menyebabkan Kriteria Cauchy dari integral Riemann menjadi penting untuk dipelajari dan menjadi motivasi utama penulis dalam menyelidiki Kriteria Cauchy untuk versi integral Riemann di ruang Riesz.

Dalam tulisan ini, pertama-tama diberikan suatu ekuivalensi dari definisi fungsi terintegral Riemann di ruang Riesz. Kemudian, disajikan beberapa versi Kriteria Cauchy dari integral Riemann tersebut, yang selanjutnya ditunjukkan bahwa semua versi tersebut ekuivalen dengan keterintegralan Riemann suatu fungsi. Lebih lanjut, beberapa aplikasi dari Kriteria Cauchy tersebut diberikan di bagian akhir pembahasan tulisan ini.

2 Metode Penelitian

Metode penelitian yang dilakukan menggunakan pendekatan kualitatif, di mana penulis melakukan analisis menyeluruh terhadap literatur-literatur terkait, khususnya berkaitan dengan ruang Riesz dan integral Riemann di ruang Riesz, guna mendapatkan ide dan gambaran yang mendalam untuk mencapai hasil sesuai dengan tujuan penelitian. Dalam rangka mempermudah pemahaman terhadap hasil dan pembahasan pada Bab 3, berikut diberikan beberapa konsep dasar yang diperlukan terkait ruang Riesz dan integral Riemann di ruang Riesz.

2.1 Ruang Riesz

Berikut diberikan definisi ruang Riesz.

Definisi 1 *Suatu ruang vektor R yang dilengkapi dengan relasi urutan parsial "$\leq$" disebut ruang Riesz jika berlaku*

(i) *Untuk setiap $x, y, z \in R$, jika $x \leq y$, maka $x + z \leq y + z$.*

(ii) *Untuk setiap $x, y \in R$ dan bilangan real $\alpha \geq 0$, jika $x \leq y$, maka $\alpha x \leq \alpha y$.*

(iii) *Untuk setiap $x, y \in R$, supremum dan infimum dari $\{x, y\}$ di R ada dan berturut-turut dinotasikan dengan $x \vee y$ dan $x \wedge y$.*

Beberapa contoh ruang Riesz di antaranya $\mathbb{R}^n$, ruang barisan ℓ^p, ruang fungsi kontinu $C[a, b]$ yang masing-masing dilengkapi dengan relasi urutan titik-demi-titik. Selanjutnya, ruang Riesz R disebut lengkap-Dedekind jika setiap himpunan bagian takkosong dari R yang terbatas ke atas di R memiliki supremum di R dan setiap himpunan bagian takkosong dari R yang terbatas ke bawah memiliki infimum di R. Ruang vektor $\mathbb{R}^n$ yang dilengkapi dengan relasi urutan titik-demi-titik salah satu contoh ruang Riesz yang lengkap-Dedekind.

Diberikan ruang Riesz R. Himpunan semua $x \in R$ tak nol dengan $0 \leq x$ dinotasikan dengan R^+. Selanjutnya, untuk setiap $a, b \in R$ dengan $a \leq b$, himpunan semua $r \in R$ dengan $a \leq r \leq b$ disebut interval urutan (disingkat interval) dan dinotasikan dengan $[a, b]$. Himpunan $T = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subseteq R$ disebut partisi dari interval $[a, b]$ jika berlaku $x_0 = a, x_n = b$, dan $x_i \leq x_{i+1}, x_i \neq x_{i+1}, \forall i = 0, 1, \ldots, n-1$. Norma partisi T didefinisikan sebagai $\sup_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})$ dan dinotasikan dengan $\|T\|$. Selanjutnya, suatu partisi bertanda pada $[a, b]$ merupakan suatu himpunan $P = \{([x_{i-1}, x_i], \zeta_i) : i = 1, 2, \ldots, n\}$, dengan $T = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ merupakan suatu partisi pada $[a, b]$ dan $\zeta_i \in [x_{i-1}, x_i], \forall\, i = 1, 2, \ldots, n$. Untuk sebarang partisi bertanda P, norma P didefinisikan sebagai norma partisi T terkait, yakni $\|P\| = \|T\|$.

Selain konsep partisi, dalam tulisan ini diperlukan konsep net di ruang Riesz R. Konsep net merupakan perumuman dari konsep barisan. Suatu net di ruang Riesz R adalah fungsi $x : A \to R$ dengan A merupakan himpunan berarah, yakni himpunan yang dilengkapi dengan suatu relasi $\leq$ yang bersifat refleksif, transitif, dan untuk setiap dua elemen $a, b \in A$, terdapat $c \in A$ sehingga $a \leq c$ dan $b \leq c$ [11]. Lebih lanjut, net (x_α) dikatakan naik jika untuk setiap $\alpha, \beta \in A$ dengan $\alpha \geq \beta$ berlaku $x_\alpha \geq x_\beta$. Untuk selanjutnya, net $x : A \to R$ dinotasikan $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ atau cukup dengan (x_α) apabila tidak menimbulkan kerancuan. Untuk selanjutnya pula, notasi dan sifat-sifat ruang Riesz yang digunakan dalam tulisan ini mengacu pada buku [9], [10], [11].

2.2 Integral Riemann di Ruang Riesz

Diberikan R_1, R_2, R_3 merupakan tiga ruang Riesz lengkap-Dedekind.

Definisi 2 [1] *Tripel* (R_1, R_2, R_3) *disebut product triple jika terdapat suatu pemetaan* $\cdot : R_1 \times R_2 \to R_3$, *yang disebut product sedemikian hingga untuk setiap* $r_1, s_1 \in R_1$ *dan* $r_2, s_2 \in R_2$ *berlaku*

(i) $(r_1 + s_1) \cdot r_2 = r_1 \cdot r_2 + s_1 \cdot r_2$;
$r_1 \cdot (r_2 + s_2) = r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot s_2$;

(ii) *Jika* $r_1 \leq s_1$ *dan* $0 \leq r_2$, *maka* $r_1 \cdot r_2 \leq s_1 \cdot r_2$;
Jika $0 \leq r_1$ *dan* $r_2 \leq s_2$, *maka* $r_1 \cdot r_2 \leq r_1 \cdot s_2$;

(iii) *Jika* $(a_\lambda)_\lambda$ *merupakan sebarang net di* R_1 *dengan* $\inf_\lambda a_\lambda = 0$, *maka untuk setiap* $b \in R_2$ *dengan* $b \geq 0$ *berlaku* $\inf_\lambda (a_\lambda \cdot b) = 0$; *dan jika* $(b_\lambda)_\lambda$ *merupakan sebarang net di* R_2 *dengan* $\inf_\lambda b_\lambda = 0$, *maka untuk setiap* $a \in R_1$ *dengan* $a \geq 0$ *berlaku* $\inf_\lambda (a \cdot b_\lambda) = 0$.

Selanjutnya, diberikan interval $[a, b] \subseteq R_1$. Jika $f : [a, b] \to R_2$ fungsi dan $P = \{([x_{i-1}, x_i], \zeta_i) : i = 1, 2, \dots, n\}$ merupakan suatu partisi bertanda pada $[a, b]$, jumlahan

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot f(\zeta_i)$$

disebut sebagai jumlahan Riemann dari fungsi f atas P dan dinotasikan dengan $S(f, P)$.

Definisi 3 [1] *Fungsi* $f : [a, b] \to R_2$ *dikatakan terintegral Riemann pada* $[a, b]$ *jika terdapat* $Y \in R_3$ *sehingga*

$$\inf_{r \in R_1^+} (\sup\{|S(f, P) - Y| : \|P\| \leq r\}) = 0. \tag{1}$$

Lebih lanjut, Y *disebut nilai integral Riemann fungsi* f *pada* $[a, b]$ *dan dinotasikan* $\int_a^b f(t)\, dt$.

Boccuto dan Candeloro [1] telah menunjukkan bahwa nilai integral Riemann suatu fungsi pada $[a, b]$ adalah tunggal dan integral Riemann tersebut mempertahankan sifat linearitas seperti pada kasus di $\mathbb{R}$.

Catatan 4 Terdapat dua hal penting yang perlu diperhatikan terkait pendefinisian fungsi terintegral Riemann pada Definisi 3.

(i) Eksistensi partisi P pada $[a, b]$ dengan $\|P\| \leq r$ mungkin tidak ada sehingga ruas kiri pada Persamaan (1) bisa tidak terdefinisi dengan baik. Sebagai contoh, diambil $R_1 = \mathbb{R}^2$ dengan relasi urutan titik-demi-titik, $a = (0, 0)$, $b = (1, 1)$, dan $r = (t, 0)$ dengan $t > 0$. Dapat ditunjukkan bahwa tidak ada partisi P pada $[a, b]$ dengan $\|P\| \leq r$ sebab komponen kedua dari $\|P\|$ haruslah positif. Agar ruas kiri pada Persamaan (1) terdefinisi dengan baik, dalam tulisan ini perhitungan infimum dan supremum hanya dikenakan untuk $r \in R_1^+$ yang memiliki eksistensi partisi P pada $[a,b]$ dengan $\|P\| \leq r$. Himpunan r yang memenuhi kondisi tersebut dinotasikan dengan $R_1^{*,[a,b]}$. Jelas $R_1^{*,[a,b]} \neq \emptyset$ sebab $b - a \in R_1^{*,[a,b]}$. Dalam tulisan ini, diasumsikan juga bahwa untuk setiap $r, s \in R_1^{*,[a,b]}$ berlaku $r \wedge s \neq 0$ dan $r \wedge s \in R_1^{*,[a,b]}$. Dapat dicek asumsi ini berlaku untuk ruang Riesz $\mathbb{R}^n$ dengan relasi urutan titik-demi-titik.

(ii) Himpunan $\{|S(f,P) - Y| : \|P\| \leq r\}$ yang tidak kosong tidaklah selalu terbatas sehingga kondisi R_3 lengkap-Dedekind tidaklah cukup untuk menjamin eksistensi supremum pada Persamaan (1) ada di R_3. Diperhatikan kembali bahwa syarat perlu fungsi terintegral Riemann pada kasus $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ adalah terbatas [13]. Salah satu perumuman kondisi tersebut di ruang Riesz adalah terbatas urutan. Fungsi $f : [a,b] \to R_2$ dikatakan terbatas urutan jika terdapat $y \in R_2^+$ sehingga $|f(r)| \leq y$ untuk setiap $r \in [a,b]$. Dapat ditunjukkan bahwa kondisi ini menjamin keterbatasan himpunan $\{|S(f,P) - Y| : \|P\| \leq r\}$ sehingga eksistensi supremum pada Persamaan (1) terjamin.

Selanjutnya, diberikan contoh fungsi yang terintegral Riemann berikut.

Contoh 5 Diberikan ruang Riesz $\mathbb{R}$ dengan relasi urutan biasa dan $\mathbb{R}^2$ dengan relasi urutan titik-demi-titik. Diperhatikan *product triple* $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ dengan *product* $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *yang* didefinisikan sebagai berikut

$$x \cdot (y_1, y_2) = (xy_1, xy_2), \quad \forall x \in \mathbb{R}, (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Dibentuk fungsi $f : [0,4] \to \mathbb{R}^2$ dengan $f(t) = (5,6)$ untuk setiap $t \in [0,4]$. Diperhatikan bahwa untuk sebarang partisi bertanda $P = \{([x_{i-1}, x_i], \zeta_i) : i = 1, 2, \dots, n\}$ pada $[0,4]$ berlaku

$$S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot (5,6) = \sum_{i=1}^{n} \big(5(x_i - x_{i-1}), 6(x_i - x_{i-1})\big) = (20, 24).$$

Akibatnya,

$$\inf_{r \in \mathbb{R}^{*,[a,b]}} (\sup\{|S(f,P) - (20,24)| : \|P\| \leq r\}) = \inf_{r>0} 0 = 0.$$

Dengan demikian, fungsi f terintegral Riemann pada $[0,4]$ dengan $\int_0^4 f(t)\,dt = (20, 24)$.

3 Hasil dan Pembahasan

Pada bagian ini, selalu diasumsikan bahwa R_1, R_2, dan R_3 merupakan tiga ruang Riesz lengkap-Dedekind dan $[a,b] \subseteq R_1$. Pertama-tama, diberikan suatu syarat cukup dan perlu definisi fungsi terintegral Riemann yang serupa dengan definisi yang digunakan dalam pendefinisian integral Riemann pada kasus $\mathbb{R}$.

Proposisi 6 *Fungsi terbatas urutan* $f:[a,b]\to R_2$ *terintegral Riemann pada* $[a,b]$ *jika dan hanya jika terdapat* $Y\in R_3$ *dan net naik* $(p_r)_{r\in R_1^{*,[a,b]}}\subseteq R_3$ *dengan* $\inf_{r\in R_1^{*,[a,b]}} p_r=0$ *sehingga untuk setiap* $r\in R_1^{*,[a,b]}$ *dan partisi bertanda* P *pada* $[a,b]$ *dengan* $\|P\|\le r$ *berlaku*

$$|S(f,P)-Y|\le p_r.$$

Bukti. $(\Rightarrow)$ Diketahui fungsi f terintegral Riemann pada $[a,b]$. Artinya, terdapat $Y\in R_3$ sehingga

$$\inf_{r\in R_1^{*,[a,b]}}(\sup\{|S(f,P)-Y|:\|P\|\le r\})=0.$$

Karena fungsi f terbatas urutan, maka $\{|S(f,P)-Y|:\|P\|\le r\}$ merupakan himpunan yang terbatas ke atas di R_3 untuk setiap $r\in R_1^{*,[a,b]}$. Lebih lanjut, karena R_3 lengkap-Dedekind, diperoleh supremum $\{|S(f,P)-Y|:\|P\|\le r\}$ ada. Selanjutnya, didefinisikan net $(p_r)_{r\in R_1^{*,[a,b]}}$ dengan

$$p_r=\sup\{|S(f,P)-Y|:\|P\|\le r\}$$

untuk setiap $r\in R_1^{*,[a,b]}$. Diperhatikan bahwa untuk setiap $s,t\in R_1^{*,[a,b]}$ dengan $s\le t$ berlaku $p_s\le p_t$ sehingga diperoleh net (p_r) naik dan berlaku

$$\inf_{r\in R_1^{*,[a,b]}} p_r=\inf_{r\in R_1^{*,[a,b]}}(\sup\{|S(f,P)-Y|:\|P\|\le r\})=0.$$

Lebih lanjut, untuk sebarang $r\in R_1^{*,[a,b]}$ dan sebarang partisi bertanda D pada $[a,b]$ dengan $\|D\|\le r$ berlaku

$$|S(f,D)-Y|\le\sup\{|S(f,P)-Y|:\|P\|\le r\}=p_r.$$

$(\Leftarrow)$ Diketahui terdapat $Y\in R_3$ dan net naik $(p_r)_{r\in R_1^{*,[a,b]}}\subseteq R_3$ dengan $\inf_{r\in R_1^{*,[a,b]}} p_r=0$ sehingga untuk setiap $r\in R_1^{*,[a,b]}$ dan partisi bertanda P pada $[a,b]$ dengan $\|P\|\le r$ berlaku

$$|S(f,P)-Y|\le p_r.$$

Karena fungsi f terbatas urutan, maka $\{|S(f,P)-Y|:\|P\|\le r\}$ merupakan himpunan yang terbatas ke atas di R_3 untuk setiap $r\in R_1^{*,[a,b]}$. Kemudian, karena R_3 lengkap-Dedekind, diperoleh supremum $\{|S(f,P)-Y|:\|P\|\le r\}$ ada. Lebih lanjut, untuk setiap $r\in R_1^{*,[a,b]}$ berlaku

$$0\le\sup\{|S(f,P)-Y|:\|P\|\le r\}\le p_r$$

sehingga

$$0\le\inf_{r\in R_1^{*,[a,b]}}(\sup\{|S(f,P)-Y|:\|P\|\le r\})\le\inf_{r\in R_1^{*,[a,b]}} p_r=0.$$

Akibatnya,

$$\inf_{r\in R_1^{*,[a,b]}}(\sup\{|S(f,P)-Y|:\|P\|\le r\})=0.\ \blacksquare$$

Termotivasi oleh Proposisi 6 dan Kriteria Cauchy dari integral Riemann untuk kasus $\mathbb{R}$ [13], dapat didefinisikan Kriteria Cauchy dari integral Riemann di ruang Riesz sebagai berikut.

Definisi 7 (Kriteria Cauchy) *Fungsi terbatas urutan $f : [a,b] \to R_2$ dikatakan memenuhi* ***Kriteria Cauchy*** *pada $[a,b]$ jika terdapat net naik $(p_r)_{r\in R_1^{*,[a,b]}} \subseteq R_3$ dengan $\inf_{r\in R_1^{*,[a,b]}} p_r = 0$ sehingga untuk setiap $r \in R_1^{*,[a,b]}$ dan partisi bertanda P_1 dan P_2 pada $[a,b]$ dengan $\|P_1\|, \|P_2\| \le r$ berlaku*

$$|S(f,P_1) - S(f,P_2)| \le p_r.$$

Kriteria Cauchy pada Definisi 7 memiliki suatu ekuivalensi yang serupa seperti halnya pada Definisi 3 yang diberikan dalam proposisi berikut.

Proposisi 8 *Fungsi terbatas urutan $f : [a,b] \to R_2$ memenuhi Kriteria Cauchy pada $[a,b]$ jika dan hanya jika*

$$\inf_{r\in R_1^{*,[a,b]}} (\sup\{|S(f,P_1) - S(f,P_2)| : \|P_1\|, \|P_2\| \le r\}) = 0.$$

Bukti. $(\Rightarrow)$ Diketahui terdapat net naik $(p_r)_{r\in R_1^{*,[a,b]}} \subseteq R_3$ dengan $\inf_{r\in R_1^{*,[a,b]}} p_r = 0$ sehingga untuk setiap $r \in R_1^{*,[a,b]}$ dan partisi bertanda P_1 dan P_2 pada $[a,b]$ dengan $\|P_1\|, \|P_2\| \le r$ berlaku

$$0 \le |S(f,P_1) - S(f,P_2)| \le p_r.$$

Diperhatikan bahwa untuk setiap $r \in R_1^{*,[a,b]}$ berlaku

$$0 \le \sup\{|S(f,P_1) - S(f,P_2)| : \|P_1\|, \|P_2\| \le r\} \le p_r.$$

Akibatnya, diperoleh

$$\inf_{r\in R_1^{*,[a,b]}} (\sup\{|S(f,P_1) - S(f,P_2)| : \|P_1\|, \|P_2\| \le r\}) = 0.$$

$(\Leftarrow)$ Karena fungsi f terbatas urutan, maka $\{|S(f,P_1) - S(f,P_2)| : \|P_1\|, \|P_2\| \le r\}$ merupakan himpunan yang terbatas ke atas di R_3 untuk setiap $r \in R_1^{*,[a,b]}$. Kemudian, karena R_3 lengkap-Dedekind, diperoleh supremum $\{|S(f,P_1) - S(f,P_2)| : \|P_1\|, \|P_2\| \le r\}$ ada. Didefinisikan net $(p_r)_{r\in R_1^{*,[a,b]}}$ dengan

$$p_r = \sup\{|S(f,P_1) - S(f,P_2)| : \|P_1\|, \|P_2\| \le r\}$$

untuk setiap $r \in R_1^{*,[a,b]}$. Diperhatikan bahwa untuk setiap $s,t \in R_1^{*,[a,b]}$ dengan $s \le t$ berlaku $p_s \le p_t$ sehingga diperoleh net (p_r) naik dan berlaku

$$\inf_{r\in R_1^{*,[a,b]}} p_r = \inf_{r\in R_1^{*,[a,b]}} (\sup\{|S(f,P_1) - S(f,P_2)| : \|P_1\|, \|P_2\| \le r\}) = 0.$$

Selanjutnya, diambil sebarang $r \in R_1^{*,[a,b]}$. Dapat diamati bahwa untuk partisi bertanda P_1 dan P_2 pada $[a,b]$ dengan $\|P_1\|, \|P_2\| \le r$ berlaku

$$|S(f,P_1) - S(f,P_2)| \leq p_r.$$

Terbukti fungsi f memenuhi Kriteria Cauchy pada $[a,b]$. ■

Selanjutnya, ditunjukkan bahwa Kriteria Cauchy dan keterintegralan Riemann ekuivalen.

Teorema 9 *Fungsi terbatas urutan* $f : [a,b] \to R_2$ *terintegral Riemann pada* $[a,b]$ *jika dan hanya jika* f *memenuhi Kriteria Cauchy pada* $[a,b]$.

Bukti. ($\Rightarrow$) Karena fungsi f terintegral Riemann pada $[a,b]$, maka terdapat $Y \in R_3$ dan net naik $(p_r)_{r\in R_1^{*,[a,b]}} \subseteq R_3$ dengan $\inf_{r\in R_1^{*,[a,b]}} p_r = 0$ sehingga untuk setiap $r \in R_1^{*,[a,b]}$ berlaku

$$|S(f,P\ ) - Y| \leq p_r$$

untuk setiap partisi bertanda P pada $[a,b]$ dengan $\|P\| \leq r$. Didefinisikan net $(q_r)_{r\in R_1^{*,[a,b]}} \subseteq R_3$ dengan $q_r = 2p_r$ untuk setiap $r \in R_1^{*,[a,b]}$. Net $(q_r)_{r\in R_1^{*,[a,b]}}$ merupakan net naik dengan $\inf_{r\in R_1^{*,[a,b]}} q_r = \inf_{r\in R_1^{*,[a,b]}} 2p_r = 2 \inf_{r\in R_1^{*,[a,b]}} p_r = 0$. Diperhatikan bahwa untuk setiap $r \in R_1^{*,[a,b]}$ dan partisi bertanda P_1 dan P_2 pada $[a,b]$ dengan $\|P_1\|, \|P_2\| \leq r$ berlaku

$$\begin{aligned}|S(f,P_1) - S(f,P_2)| &= |S(f,P_1) - Y + Y - S(f,P_2)|\\ &\leq |S(f,P_1) - Y| + |S(f,P_2) - Y|\\ &\leq p_r + p_r\\ &= q_r.\end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Diketahui terdapat net naik $(p_r)_{r\in R_1^{*,[a,b]}} \subseteq R_3$ dengan $\inf_{r\in R_1^{*,[a,b]}} p_r = 0$ sehingga untuk setiap $r \in R_1^{*,[a,b]}$ dan partisi bertanda P_1 dan P_2 dengan $\|P_1\|, \|P_2\| \leq r$ berlaku

$$|S(f,P_1) - S(f,P_2)| \leq p_r.$$

Didefinisikan net $(a_r)_{r\in R_1^{*,[a,b]}}, (b_r)_{r\in R_1^{*,[a,b]}} \subseteq R_3$ dengan

$$a_r = \inf\{S(f,P) : \|P\| \leq r\} \quad \text{dan} \quad b_r = \sup\{S(f,P) : \|P\| \leq r\}$$

untuk setiap $r \in R_1^{*,[a,b]}$. Diperoleh untuk setiap $s,t \in R_1^{*,[a,b]}$ berlaku

$$a_s \leq S(f,D) \leq b_t$$

untuk setiap partisi bertanda D dengan $\|D\| \leq s \wedge t$. Akibatnya,

$$\sup_{s\in R_1^{*,[a,b]}} a_s \leq \inf_{t\in R_1^{*,[a,b]}} b_t.$$

Sekarang, diambil sebarang $r \in R_1^{*,[a,b]}$. Diperhatikan bahwa untuk setiap partisi bertanda P_1 dan P_2 pada $[a,b]$ dengan $\|P_1\|, \|P_2\| \leq r$ berlaku

$$\begin{aligned}&|S(f,P_1) - S(f,P_2)| \leq p_r\\ &\Longrightarrow S(f,P_1) - S(f,P_2) \leq |S(f,P_1) - S(f,P_2)| \leq p_r\end{aligned}$$

$$\Rightarrow S(f,P_1) \leq S(f,P_2) + p_r.$$

Dengan mengambil supremum atas semua partisi bertanda P_1 pada $[a,b]$ dengan $\|P_1\| \leq r$ diperoleh

$$b_r = \sup\{S(f,P_1) : \|P_1\| \leq r\} \leq S(f,P_2) + p_r.$$

Selanjutnya, dengan mengambil infimum atas semua partisi bertanda P_2 pada $[a,b]$ dengan $\|P_2\| \leq r$ diperoleh

$$b_r \leq a_r + p_r \Leftrightarrow b_r - a_r \leq p_r.$$

Berikutnya, dengan memanfaatkan sifat pada ruang Riesz, diperoleh

$$\inf_{t\in R_1^{*,[a,b]}} b_t - \sup_{s\in R_1^{*,[a,b]}} a_s = \inf_{t\in R_1^{*,[a,b]}} \left(b_t - \sup_{s\in R_1^{*,[a,b]}} a_s\right) \leq \inf_{t\in R_1^{*,[a,b]}} (b_t - a_t) \leq \inf_{t\in R_1^{*,[a,b]}} p_t = 0.$$

Dengan demikian, $\sup_{s\in R_1^{*,[a,b]}} a_s = \inf_{t\in R_1^{*,[a,b]}} b_t$ dan misalkan nilainya adalah Y.

Kemudian, akan ditunjukkan bahwa fungsi f terintegral Riemann pada $[a,b]$ dengan $\int_a^b f(t)\,dt = Y$. Diamati bahwa untuk setiap $r \in R_1^{*,[a,b]}$ dan untuk setiap partisi bertanda P pada $[a,b]$ dengan $\|P\| \leq r$ berlaku

$$S(f,P) - Y \leq b_r - a_r \leq p_r \quad \text{dan} \quad Y - S(f,P) \leq b_r - a_r \leq p_r$$

sehingga

$$|S(f,P) - Y| \leq p_r.$$

Berdasarkan Proposisi 6, diperoleh bahwa fungsi f terintegral Riemann pada $[a,b]$ dengan $\int_a^b f(t)\,dt = Y$. ■

Dengan memanfaatkan cara yang serupa seperti bukti arah kanan ke kiri dari Teorema 9, diperoleh hasil berikut.

Akibat 10 *Jika fungsi terbatas urutan* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *terintegral Riemann pada* $[a,b]$, *maka*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \inf_{r\in R_1^{*,[a,b]}} (\sup\{S(f,P) : \|P\| \leq r\}) = \sup_{r\in R_1^{*,[a,b]}} (\inf\{S(f,P) : \|P\| \leq r\}).$$

Selanjutnya, diberikan beberapa aplikasi Kriteria Cauchy. Pertama, akan ditunjukkan fungsi terintegral Riemann pada $[a,b]$ juga terintegral Riemann pada setiap subinterval $[c,d] \subseteq [a,b]$. Sebelumnya, diperlukan Lema 11 sebagai berikut.

Lema 11 *Untuk setiap* $[c,d] \subseteq [a,b]$ *berlaku* $R_1^{*,[a,b]} \subseteq R_1^{*,[c,d]}$.

Bukti. Diambil sebarang $r \in R_1^{*,[a,b]}$. Artinya, terdapat partisi bertanda $P = \{([x_{i-1},x_i],\zeta_i) : i = 1,2,\dots,n\}$ pada $[a,b]$ dengan $\|P\| \leq r$. Diperhatikan bahwa $Q = \{([y_{i-1},y_i],\nu_i) : i = 1,2,\dots,n\}$ partisi bertanda pada $[c,d]$ dengan $y_i = (x_i \wedge d) \vee c$ dan $\nu_i = (\zeta_i \wedge d) \vee c$ untuk setiap $i =$

$1,2,\dots,n$ dan $y_0 = c$. Lebih lanjut, berdasarkan ketaksamaan Birkhoff [9, Proposisi 1.1.16 No viii], diperoleh $\|Q\| \leq \|P\| \leq r$. Akibatnya, $r \in R_1^{*,[c,d]}$. Dengan demikian, $R_1^{*,[a,b]} \subseteq R_1^{*,[c,d]}$. ■

Teorema 12 *Diberikan* $[c,d] \subseteq [a,b]$ *dengan* $R_1^{*,[c,d]} \subseteq R_1^{*,[a,b]}$. *Jika fungsi terbatas urutan* $f : [a,b] \to R_2$ *terintegral Riemann pada* $[a,b]$, *maka* f *terintegral Riemann pada* $[c,d]$.

Bukti. Karena fungsi f terintegral Riemann pada $[a,b]$, f memenuhi Kriteria Cauchy pada $[a,b]$. Artinya, terdapat net naik $(p_r)_{r\in R_1^{*,[a,b]}} \subseteq R_3$ dengan $\inf_{r\in R_1^{*,[a,b]}} p_r = 0$ sehingga untuk setiap $r \in R_1^{*,[a,b]}$ dan partisi bertanda P_1 dan P_2 pada $[a,b]$ dengan $\|P_1\|, \|P_2\| \leq r$ berlaku

$$|S(f,P_1) - S(f,P_2)| \leq p_r.$$

Diperhatikan bahwa berdasarkan Lema 11, $R_1^{*,[c,d]} = R_1^{*,[a,b]} \subseteq R_1^{*,[a,c]}, R_1^{*,[d,b]}$. Diambil sebarang $r \in R_1^{*,[c,d]}$, P_1 dan P_2 partisi bertanda pada $[c,d]$ dengan $\|P_1\|, \|P_2\| \leq r$, serta P_3 dan P_4 berturut-turut partisi bertanda pada $[a,c]$ dan $[d,b]$ dengan $\|P_3\|, \|P_4\| \leq r$. Selanjutnya, dapat diamati bahwa $P_3 \cup P_1 \cup P_4$ dan $P_3 \cup P_2 \cup P_4$ merupakan partisi bertanda pada $[a,b]$ dengan $\|P_3 \cup P_1 \cup P_4\|, \|P_3 \cup P_2 \cup P_4\| \leq r$ dan untuk $i = 1,2$ berlaku

$$S(f, P_3 \cup P_i \cup P_4) = S(f,P_3) + S(f,P_i) + S(f,P_4).$$

Akibatnya,

$$|S(f,P_1) - S(f,P_2)| = |S(f, P_3 \cup P_1 \cup P_4) - S(f, P_3 \cup P_2 \cup P_4)| \leq p_r.$$

Dengan demikian, fungsi f memenuhi Kriteria Cauchy pada $[c,d]$ sehingga berdasarkan Teorema 9, f terintegral Riemann pada $[c,d]$. ■

Sebagai penutup bagian ini, diberikan aplikasi kedua dari Kriteria Cauchy, yakni Teorema Apit yang merupakan perumuman Teorema Apit untuk integral Riemann di $\mathbb{R}$.

Teorema 13 (Teorema Apit). *Fungsi terbatas urutan* $f : [a,b] \to R_2$ *terintegral Riemann pada* $[a,b]$ *jika dan hanya jika terdapat net naik* $(p_r)_{r\in R_1^{*,[a,b]}} \subseteq R_3$ *dengan* $\inf_{r\in R_1^{*,[a,b]}} p_r = 0$ *sehingga untuk setiap* $r \in R_1^{*,[a,b]}$ *terdapat fungsi terbatas urutan* $\alpha_r : [a,b] \to R_2$ *dan* $\omega_r : [a,b] \to R_2$ *yang terintegral Riemann pada* $[a,b]$ *dengan sifat untuk setiap* $r \in R_1^{*,[a,b]}$ *berlaku*

$$\alpha_r(t) \leq f(t) \leq \omega_r(t), \quad \forall t \in [a,b]$$

dan

$$\sup\{S(\omega_r, P) : \|P\| \leq r\} - \inf\{S(\alpha_r, P) : \|P\| \leq r\} \leq p_r.$$

Bukti. ($\Rightarrow$) Karena fungsi f terintegral Riemann pada $[a,b]$, maka fungsi f memenuhi Kriteria Cauchy pada $[a,b]$ sehingga terdapat net naik $(p_r)_{r\in R_1^{*,[a,b]}} \subseteq R_3$ dengan $\inf_{r\in R_1^{*,[a,b]}} p_r = 0$ sehingga untuk setiap $r \in R_1^{*,[a,b]}$ dan partisi bertanda P_1 dan P_2 dari $[a,b]$ dengan $\|P_1\|, \|P_2\| \leq r$ berlaku

$$|S(f,P_1)-S(f,P_2)|\leq p_r.$$

Untuk setiap $r\in R_1^{*,[a,b]}$, dapat dipilih fungsi $\alpha_r=f$ dan $\omega_r=f$ sehingga berlaku $\alpha_r(t)=f(t)=\omega_r(t)$ untuk setiap $t\in[a,b]$. Lebih lanjut, dengan menggunakan bukti yang sama seperti arah kanan ke kiri pada Teorema 9, diperoleh

$$\begin{aligned}\sup\{S(\omega_r,P):\|P\|\leq r\}-\inf\{S(\alpha_r,P):\|P\|\leq r\}\\ =\sup\{S(f,P):\|P\|\leq r\}-\inf\{S(f,P):\|P\|\leq r\}\leq p_r.\end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Diketahui terdapat net naik $(p_r)_{r\in R_1^{*,[a,b]}}\subseteq R_3$ dengan $\inf_{r\in R_1^{*,[a,b]}} p_r=0$ sehingga untuk setiap $r\in R_1^{*,[a,b]}$, terdapat fungsi terbatas urutan $\alpha_r:[a,b]\to R_2$ dan $\omega_r:[a,b]\to R_2$ yang terintegral Riemann pada $[a,b]$ dengan sifat untuk setiap $r\in R_1^{*,[a,b]}$ berlaku $\alpha_r(t)\leq f(t)\leq\omega_r(t)$ untuk setiap $t\in[a,b]$ dan

$$\sup\{S(\omega_r,P):\|P\|\leq r\}-\inf\{S(\alpha_r,P):\|P\|\leq r\}\leq p_r.$$

Diperhatikan bahwa untuk setiap $r\in R_1^{*,[a,b]}$ dan partisi bertanda P_1 dan P_2 pada $[a,b]$ dengan $\|P_1\|,\|P_2\|\leq r$ berlaku

$$S(\alpha_r,P_1)\leq S(f,P_1)\quad\text{dan}\quad S(f,P_2)\leq S(\omega_r,P_2).$$

Akibatnya, diperoleh

$$\begin{aligned}S(f,P_2)-S(f,P_1)&\leq S(\omega_r,P_2)-S(\alpha_r,P_1)\\ &\leq\sup\{S(\omega_r,P):\|P\|\leq r\}-\inf\{S(\alpha_r,P):\|P\|\leq r\}\leq p_r.\end{aligned}$$

Dengan cara yang sama,

$$S(f,P_1)-S(f,P_2)\leq\sup\{S(\omega_r,P):\|P\|\leq r\}-\inf\{S(\alpha_r,P):\|P\|\leq r\}\leq p_r.$$

Dengan demikian,

$$|S(f,P_1)-S(f,P_2)|\leq p_r$$

sehingga diperoleh

$$\sup\{|S(f,P_1)-S(f,P_2)|:\|P_1\|,\|P_2\|\leq r\}\leq p_r.$$

Selanjutnya, dengan mengambil infimum atas semua $r\in R_1^{*,[a,b]}$ diperoleh

$$\inf_{r\in R_1^{*,[a,b]}}(\sup\{|S(f,P_1)-S(f,P_2)|:\|P_1\|,\|P_2\|\leq r\})\leq\inf_{r\in R_1^{*,[a,b]}}p_r=0.$$

Dengan demikian,

$$\inf_{r\in R_1^{*,[a,b]}}(\sup\{|S(f,P_1)-S(f,P_2)|:\|P_1\|,\|P_2\|\leq r\})=0$$

sehingga disimpulkan bahwa fungsi f terintegral Riemann pada $[a,b]$. ■

Apabila diambil $R_1=R_2=R_3=\mathbb{R}$ dengan pemetaan *product* merupakan operasi perkalian biasa di $\mathbb{R}$, maka Teorema 13 ekuivalen dengan Teorema Apit pada kasus $\mathbb{R}$ [13, Teorema 7.2.3]. Dengan demikian, keterintegralan Riemann fungsi kontinu ataupun fungsi monoton pada $[a,b]\subseteq$

$\mathbb{R}$ dapat ditunjukkan dengan memanfaatkan teorema tersebut (lihat [13, Teorema 7.2.7 dan Teorema 7.2.8]).

4 Simpulan

Berdasarkan hasil yang diperoleh pada Bab 3, telah diperoleh suatu ekuivalensi dari definisi fungsi terintegral Riemann di ruang Riesz yang kemudian memotivasi pendefinisian Kriteria Cauchy dari integral Riemann tersebut beserta ekuivalensinya. Kriteria Cauchy tersebut juga telah berhasil ditunjukkan ekuivalen dengan keterintegralan Riemann suatu fungsi. Selanjutnya, pada bagian akhir Bab 3, telah berhasil diperoleh beberapa aplikasi dari Kriteria Cauchy, yakni keterintegralan Riemann suatu fungsi pada inverval $[a, b]$ dapat dipertahankan pada setiap subintervalnya dan Teorema Apit untuk integral Riemann di ruang Riesz.

5 Daftar Pustaka

[1] A. Boccuto and D. Candeloro, “Integral and differential calculus in Riesz spaces and applications,” *J. Appl. Funct. Anal.*, vol. 3, pp. 89–111, Jan. 2008.

[2] A. Torchinsky, *A Modern View of the Riemann Integral*. in Lecture Notes in Mathematics. Springer International Publishing, 2022. [Online]. Available: https://books.google.co.id/books?id=E5-TEAAAQBAJ

[3] R. E. Maza and S. R. Canoy Jr, “Denjoy-type integrals in locally convex topological vector space,” *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol. 14, no. 4, pp. 1169–1183, 2021.

[4] R. R. Reitano, *Foundations of Quantitative Finance: Book III. The Integrals of Riemann, Lebesgue and (Riemann-) Stieltjes*. Chapman and Hall/CRC, 2023.

[5] X. You, D. Zhao, and D. F. M. Torres, “On the Henstock-Kurzweil integral for Riesz-space-valued functions on time scales,” *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, vol. 10, no. 5, pp. 2487--2500, 2017, doi: 10.22436/jnsa.010.05.18.

[6] S. Ali and P. Mondal, “Riemann and Riemann-type Integration in Banach Spaces,” *Real Analysis Exchange*, vol. 39, pp. 403–440, Jan. 2014, doi: 10.14321/realanalexch.39.2.0403.

[7] N. H. S. Haidar, “A Sobolev Space Inroad to Riemann Integrability,” *Turkish Journal of Analysis and Number Theory*, vol. 8, no. 2, pp. 34–38, 2020.

[8] A. C. M. van Rooij and W. B. van Zuijlen, “Integrals for functions with values in a partially ordered vector space,” *Positivity*, vol. 20, no. 4, pp. 877–916, Dec. 2016, doi: 10.1007/s11117-015-0392-y.

[9] A. Kalauch and O. van Gaans, *Pre-Riesz Spaces*. De Gruyter, 2019. doi: doi:10.1515/9783110476293.

[10] W. A. J. Luxemburg and A. C. Zaanen, *Riesz Spaces*, vol. 1. in Mathematical studies. North-Holland, 1971. [Online]. Available: https://books.google.co.id/books?id=CQjWnLIqKEgC

[11] C. Aliprantis and O. Burkinshaw, *Locally Solid Riesz Spaces with Applications to Economics*, vol. 105. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2003. doi: 10.1090/surv/105.

[12] F.-B. Liebrich and G. Svindland, “Model spaces for risk measures,” *Insurance: Mathematics and Economics*. vol. 77, pp. 150–165, 2017, doi: https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2017.09.006.

[13] R. G. Bartle and D. R. Sherbert, *Introduction to Real Analysis*. Wiley, 2011. [Online]. Available: https://books.google.co.id/books?id=ulveQwAACAAJ