

Analisis Model Epidemi SVEIR Pada Penyebaran Penyakit Campak dengan Tiga Kali Vaksinasi

Silvitasari¹, Kridha Pusawidjayanti^{2*},

^{1,2,3}Departemen Matematika, Universitas Negeri Malang, Malang Indonesia

*Corresponding author: kridha.pusawidjayanti.fmipa@um.ac.id

Diajukan: 24 Juni 2024, Diperbaiki: 11 September 2024, Diterima: 27 September 2024

Abstrak

Pada tahun 2021, terdapat 9 juta kasus campak di seluruh dunia. Dua puluh dua negara diantaranya terjangkit campak dalam jumlah besar. Kementerian Kesehatan Republik Indonesia atau Kemenkes mencatat terdapat lebih dari 3.341 kasus campak yang tersebar di 223 kabupaten/kota di 31 provinsi. Pengendalian kasus campak yang dilakukan pemerintah Indonesia adalah dengan melakukan vaksinasi sejak tahun 2000. Vaksin pertama dilakukan pada anak usia 9 bulan, vaksin kedua dilakukan pada anak usia 18 bulan, dan dosis ketiga pada saat kelas 1-6 jenjang Sekolah Dasar (SD). Pada penelitian ini menggunakan model matematika SVEIR pada penyebaran penyakit campak dengan penyesuaian upaya pemerintah serta anjuran dari Ikatan Dokter Anak Indonesia (IDAI) untuk mencegah kenaikan penyebaran penyakit campak melalui pencegahan preventif pemberian vaksin. Model SVEIR ini, terdapat tujuh kelas, yaitu *Susceptible* (S), vaksinasi dosis pertama (V1), vaksinasi dosis kedua (V2), vaksinasi dosis ketiga (V3), *Exposed* (E), *Infected* (I), dan *Recovered* (R). Tujuan penelitian ini adalah menganalisis model SVEIR pada penyebaran penyakit campak dengan tiga kali vaksinasi, kestabilan titik ekuilibrium dan mengetahui pengaruh vaksinasi dalam menanggulangi penyakit campak. Hasil analisis menunjukkan bahwa titik ekuilibrium endemik tidak stabil asimtotik dan titik ekuilibrium non endemik stabil asimtotik dengan $R_0 = 0,0736829 < 1$. Hasil simulasi menunjukkan bahwa penyakit campak hilang pada hari ke-260 atau sekitar 8,5 bulan setelah program vaksinasi dilaksanakan.

Kata Kunci: Campak, Model SVEIR, Titik Setimbang, Kestabilan, *Basic Reproduction Number*

Abstract

In 2021, there will be 9 million cases of measles worldwide. Twenty-two countries have large numbers of measles infections. The Ministry of Health of the Republic of Indonesia or Ministry of Health recorded that there were more than 3,341 cases of measles spread across 223 districts/cities in 31 provinces. The control of measles cases carried out by the Indonesian government has been through vaccination since 2000. The first vaccine is given to children aged nine months, the second vaccine is given to children aged 18 months, and the third dose is in grades 1-6 of elementary school (SD). This research uses the SVEIR mathematical model for the spread of measles with adjustments to government efforts and recommendations from the Indonesian Pediatrician Association (IDAI) to prevent an increase in the spread of measles through preventative vaccination. In this SVEIR model, there are seven classes, namely Susceptible (S), first dose vaccination (V1), second dose vaccination (V2), third dose vaccination (V3), Exposed (E), Infected (I), and Recovered (R). This research aims to analyze the SVEIR model on the spread of measles with three vaccinations, the stability of the equilibrium point, and determine the effect of vaccination in controlling measles. The analysis results show that the endemic equilibrium point is asymptotically unstable, and the non-endemic equilibrium point is asymptotically stable with $R_0 = 0.0736829 < 1$. This indicates that measles will disappear on the 260th day or around 8.5 months after implementing the vaccination program.

Keywords: Measles, SVEIR Model, Stability, Basic Reproduction Number, Equilibrium Point

1 Pendahuluan

Penyakit campak disebabkan oleh virus *Rubeola* yang merupakan virus golongan *Ramyxovirus* dengan genus *Morbilivirus* [1]. Campak juga dikenal sebagai *morbili* atau *measles*. Penyakit ini merupakan penyakit menular melalui droplet yang tercemar dari hidung, mulut, dan tenggorokan individu yang terinfeksi [2]. Campak memiliki masa inkubasi sekitar 8-12 hari [3]. Gejala yang ditimbulkan setelah masa inkubasi adalah demam tinggi yang disertai pilek, batuk, mata merah dan berair, serta Koplik's spot [4]. Kemudian muncul gejala ruam yang dimulai dari wajah dan leher, lalu menyebar ke seluruh tubuh [5]. Sekitar 1 dari 1000 kasus campak mengalami komplikasi neurologis seperti *Encephalitis* dan *Encephalitis* yang dapat mengakibatkan peradangan pada otak dan sumsum tulang belakang [6].

Pada tahun 2021, terdapat 9 juta kasus campak di seluruh dunia. Dua puluh dua negara diantaranya terjangkit campak dalam jumlah besar [7]. Dibandingkan dengan tahun 2021, campak mengalami kenaikan 18% pada tahun 2022 [8]. Penurunan cakupan vaksin, pengawasan campak yang melemah, dan dampak Covid-19 menyebabkan kasus campak semakin membesar di tahun 2022 [9]. Kementerian Kesehatan Republik Indonesia atau Kemenkes mencatat terdapat lebih dari 3.341 kasus campak yang tersebar di 223 kabupaten/kota di 31 provinsi [5].

Pengendalian kasus campak yang dilakukan pemerintah Indonesia adalah dengan melakukan vaksinasi sejak tahun 2000 [10]. WHO merekomendasikan anak-anak mendapatkan dua dosis vaksin untuk mencegah campak, yakni pada umur 9-12 bulan, dan 15-18 bulan [11]. Sedangkan Ikatan Dokter Anak Indonesia (IDAI) merekomendasikan tiga kali vaksinasi campak. Vaksin pertama dilakukan pada anak usia 9 bulan, vaksin kedua dilakukan pada anak usia 18 bulan, dan dosis ketiga pada saat kelas 1-6 [12].

Model epidemi dapat dirumuskan ke dalam bentuk matematika, salah satu model dasar tentang penyebaran penyakit adalah model yang dirumuskan oleh Kermack dan McKendrick pada tahun 1927. Dalam modelnya, Kermack dan McKendrick memperkenalkan tiga kompartemen yang membagi populasi, yaitu kompartemen populasi rentan (S), kompartemen populasi terinfeksi (I), dan kompartemen populasi sembuh (R) yang dikenal dengan model SIR [13].

Beberapa model matematika yang telah dikaji beberapa peneliti untuk menggambarkan penyebaran campak seperti *SIR*, *SEIR*, dan *SVEIR*. Dalam Juhari *et al.* [14], digunakan model *SIR* (*Susceptible, Infected, Recovered*) dengan mengelompokkan yang terinfeksi berdasarkan umur. Selanjutnya, Sihotang *et al.* [15] menggunakan model *SEIR* (*Susceptible, Exposed, Infected, Recovered*) dengan menambahkan faktor imunisasi dan vaksin MR. Selanjutnya Widyaningsih *et al.* [16] menggunakan model *SVEIR* (*Susceptible, Vaccinated, Exposed, Infected, Recovered*)

dengan memperhatikan pengaruh vaksinasi. Kemudian Peter *et al.* [17] menggunakan model *SVEIR* dengan modifikasi kompartemen vaksin kedua.

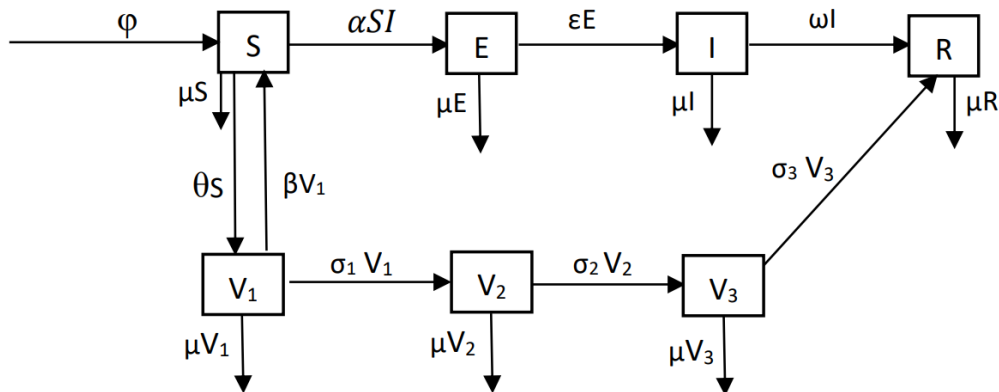
Pada penelitian ini menggunakan model matematika *SVEIR* pada penyebaran penyakit campak dengan penyesuaian upaya pemerintah untuk mencegah kenaikan penyebaran penyakit campak lewat pencegahan preventif pemberian vaksin. Selain itu, penelitian ini memodifikasi model *SVEIR* penyebaran penyakit campak milik Peter *et al.* [17] dengan menambahkan satu kompartemen vaksin ketiga. Tujuan penelitian ini adalah menganalisis model *SVEIR* pada penyebaran penyakit campak dengan tiga kali vaksinasi, kestabilan titik ekuilibrium, dan mengetahui dampak vaksinasi dalam menanggulangi penyakit campak.

2 Model Matematika

Penelitian ini menggunakan model penyebaran campak *Susceptible-Vaccinated-Exposed-Infected-Recovered (SVEIR)* yang dikembangkan oleh Peter *et al.* [17]. Modifikasi model dilakukan dengan menambahkan populasi vaksin dosis ketiga. Model pada penelitian ini terdiri dari tujuh kelas, yaitu kelas individu rentan terkena penyakit Campak, *Susceptible (S)*, kelas individu yang menerima vaksin dosis pertama (V_1), kelas individu yang menerima vaksin dosis kedua (V_2), kelas individu yang menerima vaksin dosis ketiga (V_3), kelas individu yang terpapar atau *Exposed (E)*, kelas individu yang terinfeksi penyakit Campak atau *Infected (I)*, dan kelas individu yang sembuh atau *Recovered (R)*. Model *SVEIR* penyebaran campak pada penelitian ini menggunakan asumsi sebagai berikut:

1. Populasi bersifat tertutup, artinya tidak ada perpindahan penduduk
2. Kematian yang terjadi adalah kematian alami, bukan karena penyakit campak
3. Terdapat tiga kali vaksinasi, yakni pada umur 9 bulan, 18 bulan, dan 5-7 tahun [12]
4. Individu yang hanya menerima vaksin dosis pertama memiliki kemungkinan kembali menjadi individu rentan
5. Vaksin merupakan upaya pencegahan pemerintah terhadap campak
6. Individu yang telah menerima vaksin ketiga menjadi individu sembuh (R) yang kebal terhadap campak.

Gambar 1 menampilkan diagram kompartemen dari deskripsi yang telah dipaparkan dengan keterangan variabel di Tabel 1 dan keterangan parameter di Tabel 2.



Gambar 1. Diagram kompartemen model *SVEIR* penyakit campak dengan tiga kali vaksinasi

Tabel 1. Variabel model *SVEIR* penyakit campak dengan tiga kali vaksinasi

Variabel	Definisi
$S(t)$	Jumlah individu rentan terkena campak pada waktu ke-t
$V_1(t)$	Jumlah individu yang menerima dosis pertama pada waktu ke-t
$V_2(t)$	Jumlah individu yang menerima dosis kedua pada waktu ke-t
$V_3(t)$	Jumlah individu yang menerima dosis ketiga pada waktu ke-t
$E(t)$	Jumlah individu yang terpapar campak pada waktu ke-t
$I(t)$	Jumlah individu yang terinfeksi campak pada waktu ke-t
$R(t)$	Jumlah individu yang sembuh dari campak pada waktu ke-t

Tabel 2. Parameter model *SVEIR* penyakit campak dengan tiga kali vaksinasi

Parameter	Deskripsi	Nilai	Sumber
φ	Laju kelahiran	$\varphi = \frac{\text{jumlah kelahiran Indonesia 2022}}{\text{jumlah penduduk Indonesia 2022}}$ $= \frac{4650000}{275770000} = 1,69 \times 10^{-2}$	[18]
θ	Laju individu yang menerima vaksin pertama	0,94	[19]
β	Laju individu yang	$\beta = \frac{\text{kasus campak 2022} \times \text{persentase vaksin pertama yang terkena campak}}{\text{individu yang telah menerima vaksin pertama tahun 2022}}$ $= \frac{4884 \times 0,067}{441862491} = 7,345 \times 10^{-7}$	[18]

Parameter	Deskripsi	Nilai	Sumber
σ_1	menerima vaksin pertama menjadi individu kelas rentan Laju individu yang menerima vaksin dosis kedua	0,93	[19]
σ_2	Laju individu yang menerima vaksin ketiga	$\varphi = \frac{\text{individu yang telah menerima vaksin ketiga tahun 2022}}{\text{individu yang telah menerima vaksin kedua tahun 2022}}$ $= \frac{4165284}{6839546798} = 6,09 \times 10^{-4}$	[18]
σ_3	Laju individu yang menerima vaksin ketiga menjadi individu pulih	$\sigma_3 = \frac{\text{individu pulih} \times \text{persentase vaksin ketiga}}{\text{individu yang telah menerima vaksin ketiga tahun 2022}}$ $= \frac{74551060 \times 6,09 \times 10^{-4}}{4165284} = 0,0109$	[18]
α	Laju efektivitas	0,33	[20]

Parameter	Deskripsi	Nilai	Sumber
ε	kontak fisik	0,018	[19]
	Laju individu terpapar menjadi terinfeksi		
ω	Laju individu terinfeksi menjadi pulih	0,6	[19]
	Laju kematian alami		
μ	Laju kematian alami	$\mu = \frac{1}{\text{angka harapan hidup Indonesia tahun 2022}}$ $= \frac{1}{73,6} = 1,36 \times 10^{-2}$	[18]

Model *SVEIR* penyebaran campak dengan tiga kali vaksinasi dapat dituliskan ke dalam persamaan diferensial non-linear sebagai berikut.

$$\frac{dS}{dt} = \varphi + \beta V_1 - \alpha SI - (\theta + \mu)S$$

$$\frac{dV_1}{dt} = \theta S - (\beta + \sigma_1 + \mu)V_1$$

$$\frac{dV_2}{dt} = \sigma_1 V_1 - (\sigma_2 + \mu)V_2$$

$$\frac{dV_3}{dt} = \sigma_2 V_2 - (\sigma_3 + \mu)V_3 \quad \dots(1)$$

$$\frac{dE}{dt} = \alpha SI - (\varepsilon + \mu)E$$

$$\frac{dI}{dt} = \varepsilon E - (\omega + \mu)I$$

$$\frac{dR}{dt} = \omega I + \sigma_3 V_3 - \mu R$$

3 Hasil dan Pembahasan

Analisis kestabilan titik ekuilibrium dalam model matematika penyebaran campak dibahas pada bagian ini. Sebelum melakukan analisis kestabilan, titik ekuilibrium model dan bilangan reproduksi dasar ditentukan terlebih dahulu. Berdasarkan model (1) didapatkan dua titik ekuilibrium yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik.

3.1 Titik Ekuilibrium Model *SVEIR*

3.1.1 Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit

Titik ekuilibrium disebut juga titik tetap atau titik kesetimbangan. Titik ekuilibrium bebas penyakit maupun endemik terjadi ketika

$$\frac{dS}{dt} = 0, \frac{dV_1}{dt} = 0, \frac{dV_2}{dt} = 0, \frac{dV_3}{dt} = 0, \frac{dE}{dt} = 0, \frac{dI}{dt} = 0, \frac{dR}{dt} = 0 \quad [21]. \quad \dots(2)$$

Misalkan $P_0 = (S^*, V_1^*, V_2^*, V_3^*, E^*, I^*, R^*)$ merupakan model titik ekuilibrium bebas penyakit. Titik ekuilibrium bebas penyakit terjadi ketika penyakit tidak menyebar, yakni nilai $I = E = 0$. Menggunakan sistem Persamaan (2), diperoleh titik ekuilibrium bebas penyakit

$$P_0 = (S^*, V_1^*, V_2^*, V_3^*, 0, 0, R^*) \quad \dots(3)$$

dengan

$$S^* = \frac{\varphi(\beta + \sigma_1 + \mu)}{(\beta\mu + (\sigma_1 + \mu)(\theta + \mu))}$$

$$V_1^* = \frac{\theta\varphi}{(\beta\mu + (\sigma_1 + \mu)(\theta + \mu))}$$

$$V_2^* = \frac{\sigma_1\theta\varphi}{(\sigma_2 + \mu)(\beta\mu + (\sigma_1 + \mu)(\theta + \mu))}$$

$$V_3^* = \frac{\sigma_1\sigma_2\theta\varphi}{(\sigma_3 + \mu)(\sigma_2 + \mu)(\beta\mu + (\sigma_1 + \mu)(\theta + \mu))}$$

$$R^* = \frac{\sigma_3\sigma_2\sigma_1\theta\varphi}{\mu(\sigma_3 + \mu)(\sigma_2 + \mu)(\beta\mu + (\sigma_1 + \mu)(\theta + \mu))}$$

Hasil titik ekuilibrium bebas penyakit pada kelas individu yang menerima vaksin pertama, kedua, dan ketiga tidak sama dengan nol karena pada asumsi dijelaskan bahwa vaksin merupakan program preventif pemerintah untuk mencegah penyakit campak. Hal tersebut sejalan dengan kelas individu sembuh tidak sama dengan nol karena populasi yang telah menerima vaksin dosis ketiga menjadi kebal terhadap campak.

3.1.2 Titik Ekuilibrium Endemik

Misalkan $P_1 = (S^{**}, V_1^{**}, V_2^{**}, V_3^{**}, E^{**}, I^{**}, R^{**})$ merupakan titik ekuilibrium endemik. Titik ekuilibrium endemik terjadi ketika terdapat penyebaran penyakit, yakni nilai $I > 0, E > 0$. Menggunakan sistem Persamaan (2) diperoleh titik ekuilibrium endemik

$$P_1 = (S^{**}, V_1^{**}, V_2^{**}, V_3^{**}, E^{**}, I^{**}, R^{**}) \quad \dots(4)$$

dengan

$$S^{**} = \frac{(\varepsilon + \mu)(\omega + \mu)}{\varepsilon\alpha}$$

$$V_1^{**} = \frac{\theta(\varepsilon + \mu)(\omega + \mu)}{\varepsilon\alpha(\beta + \sigma_1 + \mu)}$$

$$V_2^{**} = \frac{\sigma_1\theta(\varepsilon + \mu)(\omega + \mu)}{\varepsilon\alpha(\beta + \sigma_1 + \mu)(\sigma_2 + \mu)}$$

$$V_3^{**} = \frac{\sigma_2\sigma_1\theta(\varepsilon + \mu)(\omega + \mu)}{\varepsilon\alpha(\beta + \sigma_1 + \mu)(\sigma_2 + \mu)(\sigma_3 + \mu)}$$

$$E^{**} = \frac{\beta\theta(\varepsilon + \mu)(\omega + \mu) + \varphi\varepsilon\alpha(\beta + \sigma_1 + \mu) - \varepsilon\alpha(\beta + \sigma_1 + \mu)(\theta + \mu)}{\varepsilon\alpha(\beta + \sigma_1 + \mu)(\varepsilon + \mu)}$$

$$I^{**} = \frac{\beta\theta(\varepsilon + \mu)(\omega + \mu) + \varphi\varepsilon\alpha(\beta + \sigma_1 + \mu) - \varepsilon\alpha(\beta + \sigma_1 + \mu)(\theta + \mu)}{\alpha(\beta + \sigma_1 + \mu)(\varepsilon + \mu)(\omega + \mu)}$$

$$R^{**} = \frac{\omega(\beta\theta(\varepsilon + \mu)(\omega + \mu) + \varphi\varepsilon\alpha(\beta + \sigma_1 + \mu) - \varepsilon\alpha(\beta + \sigma_1 + \mu)(\theta + \mu))}{\alpha\mu(\beta + \sigma_1 + \mu)(\varepsilon + \mu)(\omega + \mu)} + \frac{\sigma_1\sigma_2\sigma_3\theta(\varepsilon + \mu)(\omega + \mu)}{\mu\varepsilon\alpha(\beta + \sigma_1 + \mu)(\sigma_2 + \mu)(\sigma_3 + \mu)}$$

3.1.3 Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar yang dinotasikan dengan (R_0) merupakan nilai yang menggambarkan rerata individu rentan yang dapat terinfeksi secara langsung oleh individu terinfeksi [22]. Bilangan reproduksi dasar ditentukan dengan mengidentifikasi nilai eigen terbesar dari *next generation matrix* (NGM). Langkah-langkah mencari R_0 adalah sebagai berikut.

1. Mengambil persamaan populasi terpapar (E) dan populasi terinfeksi (I) dari sistem Persamaan (1), yaitu

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \alpha SI - (\varepsilon + \mu)E \\ \frac{dI}{dt} &= \varepsilon E - (\omega + \mu)I \end{aligned} \quad \dots(5)$$

2. Melakukan linearisasi pada sistem Persamaan (5) yang direpresentasikan dengan matriks Jacobian (J_{R_0}) berikut.

$$J_{R_0} = \begin{bmatrix} -(\varepsilon + \mu) & \frac{\alpha\varphi(\beta + \sigma_1 + \mu)}{(\beta\mu + (\sigma_1 + \mu)(\theta + \mu))} \\ \varepsilon & -(\omega + \mu) \end{bmatrix}$$

3. Dekomposisi matriks Jacobian (J_{R_0}) menjadi $J_{R_0} = F - V$, dimana F merupakan matriks transmisi yang menyatakan laju infeksi baru, sedangkan V merupakan matriks transisi yang menyatakan laju perpindahan keluar masuk subpopulasi terinfeksi.

$$F = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\alpha\varphi(\beta+\sigma_1+\mu)}{(\beta\mu+(\sigma_1+\mu)(\theta+\mu))} \\ \varepsilon & 0 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} \varepsilon + \mu & 0 \\ 0 & \omega + \mu \end{bmatrix}$$

4. Mencari R_0 dengan $R_0 = \rho(FV^{-1})$, dimana ρ adalah nilai eigen terbesar dari *next generation matriks* (FV^{-1}). Misalkan K adalah *next generation matriks*, maka $K = (FV^{-1})$. Dengan menyelesaikan persamaan karakteristik $\det(\lambda I - K) = 0$ [23]

$$\lambda^2 - \frac{\varepsilon\alpha\varphi(\beta+\sigma_1+\mu)}{(\beta\mu+(\sigma_1+\mu)(\theta+\mu))(\omega+\mu)(\varepsilon+\mu)} = 0 \quad \text{diperoleh} \quad \lambda_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon\alpha\varphi(\beta+\sigma_1+\mu)}{(\beta\mu+(\sigma_1+\mu)(\theta+\mu))(\omega+\mu)(\varepsilon+\mu)}} \quad \text{dan}$$

$$\lambda_2 = -\sqrt{\frac{\varepsilon\alpha\varphi(\beta+\sigma_1+\mu)}{(\beta\mu+(\sigma_1+\mu)(\theta+\mu))(\omega+\mu)(\varepsilon+\mu)}}. \quad \text{Kemudian } R_0 \text{ didapat dari nilai eigen terbesar, maka}$$

$$R_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon\alpha\varphi(\beta + \sigma_1 + \mu)}{(\beta\mu + (\sigma_1 + \mu)(\theta + \mu))(\omega + \mu)(\varepsilon + \mu)}}$$

Terdapat tiga kemungkinan kondisi yang muncul, yakni:

- (1) Penyakit diperkirakan dapat hilang jika $R_0 < 1$,
- (2) Penyakit dapat dikatakan mewabah jika $R_0 > 1$,
- (3) Penyakit tetap ada jika $R_0 = 1$ [24].

3.2 Analisis Kestabilan Titik Ekuilibrium Model

Menganalisis kestabilan titik ekuilibrium dilakukan agar dapat mengetahui titik ekuilibrium yang telah diperoleh stabil atau tidak. Model (1) merupakan sistem persamaan diferensial non-linear, sehingga analisis dapat dilakukan dengan melakukan linearisasi sistem persamaan diferensial tersebut dengan matriks Jacobian (J).

$$J = \begin{bmatrix} -\alpha I - (\theta + \mu) & \beta & 0 & 0 & 0 & -\alpha S & 0 \\ \theta & -(\beta + \sigma_1 + \mu) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1 & -(\sigma_2 + \mu) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_2 & -(\sigma_3 + \mu) & 0 & 0 & 0 \\ \alpha I & 0 & 0 & 0 & -(\varepsilon + \mu) & \alpha S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon & -(\omega + \mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_3 & 0 & \omega & -\mu \end{bmatrix} \quad \dots(6)$$

3.2.1 Analisis Kestabilan Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit

Analisis kestabilan titik ekuilibrium bebas penyakit dilakukan dengan menyubstitusikan titik ekuilibrium bebas penyakit yang telah diperoleh (3) ke matriks (J) sehingga diperoleh matriks (J_{P_0}) sebagai berikut:

$$J_{P_0} = \begin{bmatrix} -(\theta + \mu) & \beta & 0 & 0 & 0 & -\frac{\alpha\varphi(\beta + \sigma_1 + \mu)}{\beta\mu + (\sigma_1 + \mu)(\theta + \mu)} & 0 \\ \theta & -(\beta + \sigma_1 + \mu) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1 & -(\sigma_2 + \mu) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_2 & -(\sigma_3 + \mu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(\varepsilon + \mu) & \frac{\alpha\varphi(\beta + \sigma_1 + \mu)}{\beta\mu + (\sigma_1 + \mu)(\theta + \mu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon & -(\omega + \mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_3 & 0 & \omega & -\mu \end{bmatrix}$$

Suatu titik ekuilibrium stabil asimtotik apabila semua nilai eigen dari matriks Jacobian memiliki nilai eigen negatif. Nilai eigen tersebut dapat diketahui dengan mencari akar-akar persamaan karakteristik dari persamaan berikut.

$$\det(\lambda I - J_{P_0}) = 0$$

$$\begin{bmatrix} \lambda + \theta + \mu & \beta & 0 & 0 & 0 & -\frac{\alpha\varphi(\beta + \sigma_1 + \mu)}{\beta\mu + (\sigma_1 + \mu)(\theta + \mu)} & 0 \\ \theta & \lambda + \beta + \sigma_1 + \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1 & \lambda + \sigma_2 + \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_2 & \lambda + \sigma_3 + \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda + \varepsilon + \mu & \frac{\alpha\varphi(\beta + \sigma_1 + \mu)}{\beta\mu + (\sigma_1 + \mu)(\theta + \mu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon & \lambda + \omega + \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_3 & 0 & \omega & \lambda + \mu \end{bmatrix} = 0$$

Didapat persamaan karakteristik berikut.

$$\begin{aligned} &(\lambda + \sigma_2 + \mu)(\lambda + \sigma_3 + \mu)(\lambda + \mu)(\lambda^4 - (A_1 + B_1 + C_1 + E_1)\lambda^3 \\ &\quad + ((A_1 + B_1)(C_1 + E_1) + A_1B_1 + C_1E_1 - (\varepsilon D_1 + \theta\beta))\lambda^2 \\ &\quad + (\varepsilon D_1(A_1 + B_1) + \theta\beta(C_1 + E_1) - (A_1B_1(C_1 + E_1) + C_1E_1(A_1 + B_1)))\lambda \\ &\quad + A_1B_1(C_1E_1 - \varepsilon D_1) + \theta\beta(\varepsilon D_1 - C_1E_1)) = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

dengan

$$\begin{aligned} A_1 &= -(\theta + \mu) & C_1 &= -(\varepsilon + \mu) & E_1 &= -(\omega + \mu) \\ B_1 & & D_1 & & & \\ &= -(\beta + \sigma_1 + \mu) & &= \frac{\alpha\varphi(\beta + \sigma_1 + \mu)}{\beta\mu + (\sigma_1 + \mu)(\theta + \mu)} \end{aligned}$$

Misalkan $P = (\lambda^4 - (A_1 + B_1 + C_1 + E_1)\lambda^3 + ((A_1 + B_1)(C_1 + E_1) + A_1B_1 + C_1E_1 - (\varepsilon D_1 + \theta\beta))\lambda^2 + (\varepsilon D_1(A_1 + B_1) + \theta\beta(C_1 + E_1) - (A_1B_1(C_1 + E_1) + C_1E_1(A_1 + B_1)))\lambda + A_1B_1(C_1E_1 - \varepsilon D_1) + \theta\beta(\varepsilon D_1 - C_1E_1)$

maka Persamaan (7) dapat ditulis menjadi $(\lambda + \sigma_2 + \mu)(\lambda + \sigma_3 + \mu)(\lambda + \mu)P = 0$. Didapatkan nilai eigen Persamaan (7) adalah $\lambda_1 = -(\sigma_2 + \mu), \lambda_2 = -(\sigma_3 + \mu), \lambda_3 = -\mu$. Sehingga terlihat bahwa $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 < 0$. Selanjutnya melihat nilai eigen pada persamaan P dapat diketahui menggunakan kriteria *Routh-Hurwitz*. Semua akar polinomial P adalah negatif jika dan hanya

jika determinan dari semua matriks *Routh-Hurwitz* (H) adalah positif. Berdasarkan persamaan P , diperoleh

$$l_0 = 1$$

$$l_1 = -(A_1 + B_1 + C_1 + E_1)$$

$$l_2 = (A_1 + B_1)(C_1 + E_1) + A_1B_1 + C_1E_1 - (\varepsilon D_1 + \theta\beta)$$

$$l_3 = \varepsilon D_1(A_1 + B_1) + \theta\beta(C_1 + E_1) - (A_1B_1(C_1 + E_1) + C_1E_1(A_1 + B_1))$$

$$l_4 = A_1B_1(C_1E_1 - \varepsilon D_1) + \theta\beta(\varepsilon D_1 - C_1E_1)$$

Matriks *Routh-Hurwitz* (H) yang dapat dibentuk dari sistem Persamaan (7), yakni

$$H = \begin{bmatrix} l_1 & l_0 & 0 & 0 \\ l_3 & l_2 & l_1 & l_0 \\ l_5 & l_4 & l_3 & l_2 \\ l_7 & l_6 & l_5 & l_4 \end{bmatrix}$$

Menggunakan bantuan aplikasi *Maple 2020* dan dengan memasukkan parameter pada Tabel 2, diperoleh determinan matriks *Routh-Hurwitz* (H) sebagai berikut.

$$\Delta_1 = |[l_1]| = l_1 = 2,5424$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} l_1 & 1 \\ l_3 & l_2 \end{vmatrix} = l_1l_2 - l_3 = 4,8507$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} l_1 & 1 & 0 \\ l_3 & l_2 & l_1 \\ 0 & l_4 & l_3 \end{vmatrix} = l_1l_2l_3 - l_3^2 - l_1^2l_4 = \Delta_2l_3 - l_1^2l_4 = 2,7891$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} l_1 & 1 & 0 & 0 \\ l_3 & l_2 & l_1 & 1 \\ 0 & l_4 & l_3 & l_2 \\ 0 & 0 & 0 & l_4 \end{vmatrix} = l_1l_2l_3l_4 - l_1^2l_4^2 - l_3^2l_4 = \Delta_3l_4 = 0,0483$$

Diketahui bahwa semua determinan matriks *Routh-Hurwitz* (H) adalah positif, yakni $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4 > 0$ maka semua bagian riil nilai eigen matriks J_{P_0} bernilai negatif, yakni memenuhi $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 < 0$. Oleh karena itu, titik ekuilibrium bebas penyakit $P_0 = (S^*, V_1^*, V_2^*, V_3^*, 0, 0, R^*)$ adalah stabil asimtotik lokal.

3.2.2 Analisis Kestabilan Titik Ekuilibrium Endemik (P_1)

Analisis kestabilan titik ekuilibrium bebas penyakit dilakukan dengan mensubstitusikan titik ekuilibrium bebas penyakit yang telah diperoleh, yakni $P_1 = (S^{**}, V_1^{**}, V_2^{**}, V_3^{**}, E^{**}, I^{**}, R^{**})$ ke matriks (J) sehingga diperoleh matriks (J_{P_1}) berikut.

$$J_{P_1} = \begin{bmatrix} A_2 & \beta & 0 & 0 & 0 & -G_2 & 0 \\ \theta & C_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1 & D_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_2 & E_2 & 0 & 0 & 0 \\ B_2 & 0 & 0 & 0 & F_2 & G_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon & H_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_3 & 0 & \omega & -\mu \end{bmatrix}$$

dengan

$$A_2 = -\frac{\alpha\beta\theta(\varepsilon + \mu)(\omega + \mu) + \varphi\varepsilon\alpha(\beta + \sigma_1 + \mu) - \varepsilon\alpha(\beta + \sigma_1 + \mu)(\theta + \mu)}{\alpha(\beta + \sigma_1 + \mu)(\varepsilon + \mu)(\omega + \mu)} - (\theta + \mu)$$

$$B_2 = \frac{\alpha\beta\theta(\varepsilon + \mu)(\omega + \mu) + \varphi\varepsilon\alpha(\beta + \sigma_1 + \mu) - \varepsilon\alpha(\beta + \sigma_1 + \mu)(\theta + \mu)}{\alpha(\beta + \sigma_1 + \mu)(\varepsilon + \mu)(\omega + \mu)}$$

$$C_2 = -(\beta + \sigma_1 + \mu)$$

$$D_2 = -(\sigma_2 + \mu)$$

$$E_2 = -(\sigma_3 + \mu)$$

$$F_2 = -(\varepsilon + \mu)$$

$$G_2 = \frac{(\varepsilon + \mu)(\omega + \mu)}{\varepsilon}$$

$$H_2 = -(\omega + \mu)$$

Kemudian menentukan nilai eigen dari persamaan $\det(\lambda I - J_{P_1}) = 0$ sebagai berikut.

$$\begin{vmatrix} \lambda - A_2 & -\beta & 0 & 0 & 0 & G_2 & 0 \\ -\theta & \lambda - C_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_1 & \lambda - D_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_2 & \lambda - E_2 & 0 & 0 & 0 \\ -B_2 & 0 & 0 & 0 & \lambda - F_2 & -G_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon & \lambda - H_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sigma_3 & 0 & -\omega & \lambda + \mu \end{vmatrix} = 0$$

Persamaan karakteristik yang diperoleh sebagai berikut.

$$\begin{aligned} & (\lambda - G_2)(\lambda - I_2)(\lambda + \mu)(\lambda^4 - (H_2 + F_2 + C_2 + A_2)\lambda^3 \\ & + (F_2H_2 + C_2H_2 + C_2F_2 + A_2H_2 + A_2F_2 + A_2C_2 - (\beta\theta + G_2\varepsilon))\lambda^2 \\ & + (H_2\beta\theta + F_2\beta\theta + C_2G_2\varepsilon + B_2G_2\varepsilon + A_2G_2\varepsilon \\ & - (C_2F_2H_2 + A_2F_2H_2 + A_2C_2H_2 + A_2C_2F_2))\lambda \\ & + (G_2\beta\theta\varepsilon + A_2C_2F_2H_2 - (F_2H_2\beta\theta + B_2C_2G_2\varepsilon + A_2C_2G_2\varepsilon)) = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Misalkan $Q = (\lambda^4 - (H_2 + F_2 + C_2 + A_2)\lambda^3 + (F_2H_2 + C_2H_2 + C_2F_2 + A_2H_2 + A_2F_2 + A_2C_2 - (\beta\theta + G_2\varepsilon))\lambda^2 + (H_2\beta\theta + F_2\beta\theta + C_2G_2\varepsilon + B_2G_2\varepsilon + A_2G_2\varepsilon - (C_2F_2H_2 + A_2F_2H_2 + A_2C_2H_2 + A_2C_2F_2))\lambda + (G_2\beta\theta\varepsilon + A_2C_2F_2H_2 - (F_2H_2\beta\theta + B_2C_2G_2\varepsilon + A_2C_2G_2\varepsilon))$

Maka Persamaan (8) dapat ditulis menjadi $(\lambda - G_2)(\lambda - I_2)(\lambda + \mu)Q = 0$ dengan nilai eigen yang diperoleh $\lambda_1 = G_2 = -(\sigma_2 + \mu)$, $\lambda_2 = I_2 = -(\sigma_3 + \mu)$, $\lambda_3 = -\mu$. Nilai eigen persamaan Q dapat diketahui menggunakan kriteria *Routh-Hurwitz*. Matriks *Routh-Hurwitz* (H_1) yang dapat dibentuk dari sistem Persamaan (8), yakni

$$H_1 = \begin{bmatrix} k_1 & k_0 & 0 & 0 \\ k_3 & k_2 & k_1 & k_0 \\ k_5 & k_4 & k_3 & k_2 \\ k_7 & k_6 & k_5 & k_4 \end{bmatrix}$$

dengan

$$k_0 = 1$$

$$k_1 = -(H_2 + F_2 + C_2 + A_2)$$

$$k_2 = (C_2 + F_2)(A_2 + H_2) + C_2F_2 + A_2H_2 - (\beta\theta + G_2\varepsilon)$$

$$k_3 = \beta\theta(H_2 + F_2) + G_2\varepsilon(C_2 + B_2 + A_2) - (F_2H_2(C_2 + A_2) + A_2C_2(H_2 + F_2))$$

$$k_4 = \beta\theta(G_2\varepsilon - F_2H_2) + A_2C_2(F_2H_2 - G_2\varepsilon) - B_2C_2G_2\varepsilon$$

Menggunakan bantuan aplikasi *Maple 2020* dan dengan menyubstitusi parameter pada Tabel 2, diperoleh determinan matriks *Routh-Hurwitz* (H_1) sebagai berikut.

$$\Delta_1 = |[k_1]| = k_1 = 3,1362$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} k_1 & 1 \\ k_3 & k_2 \end{vmatrix} = k_1k_2 - k_3 = 7,2711$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} k_1 & 1 & 0 \\ k_3 & k_2 & k_1 \\ 0 & k_4 & k_3 \end{vmatrix} = k_1k_2k_3 - k_3^2 - k_1^2k_4 = \Delta_2k_3 - k_1^2k_4 = 4,1034$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} k_1 & 1 & 0 & 0 \\ k_3 & k_2 & k_1 & 1 \\ 0 & k_4 & k_3 & k_2 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{vmatrix} = k_1k_2k_3k_4 - k_1^2k_4^2 - k_3^2k_4 = \Delta_3k_4 = -0,0462$$

Diketahui bahwa determinan matriks *Routh-Hurwitz* (H_1) mendapatkan hasil $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 > 0$ sedangkan $\Delta_4 < 0$. Karena terdapat hasil determinan matriks (H_1) yang memiliki tanda yang berbeda. Oleh karena itu, pada titik ekuilibrium endemik $P_1 = (S^{**}, V_1^{**}, V_2^{**}, V_3^{**}, E^{**}, I^{**}, R^{**})$ kondisi tidak stabil.

4 Simulasi Model

Pada bagian ini membahas simulasi dari model *SVEIR* penyebaran campak dengan tiga kali vaksinasi. Simulasi dilakukan menggunakan *Maple 2020* untuk melihat kesetimbangan bebas penyakit dengan cara menyubstisukan parameter pada Tabel 2 dan nilai awal variabel pada Tabel 3 yang diperoleh dari data Badan Pusat Statistik dan Laporan Kinerja 2022 Direktorat Pengelolaan

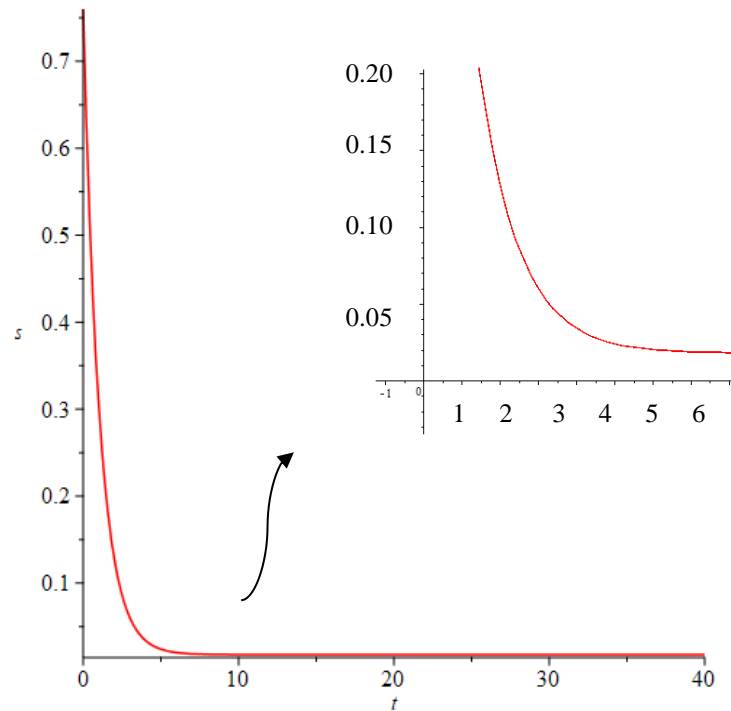
Imunisasi Kementerian Kesehatan Republik Indonesia. Dalam memudahkan proses simulasi numerik, nilai awal variabel diubah menjadi skala yang lebih kecil, yakni dengan cara membagi nilai awal variabel dengan total populasi N dengan $N = 362842314$.

Tabel 3. Nilai awal variabel model *SVEIR* penyakit campak dengan tiga kali vaksinasi

Variabel	Nilai	Nilai perbandingan dengan total populasi
$S(0)$	275770000	0,7600271
$V_1(0)$	36400000	0,100319
$V_2(0)$	26500000	0,073034
$V_3(0)$	24141500	0,06653441
$E(0)$	21175	$5,84 \times 10^{-5}$
$I(0)$	4844	$1,34 \times 10^{-5}$
$R(0)$	4795	$1,32 \times 10^{-5}$

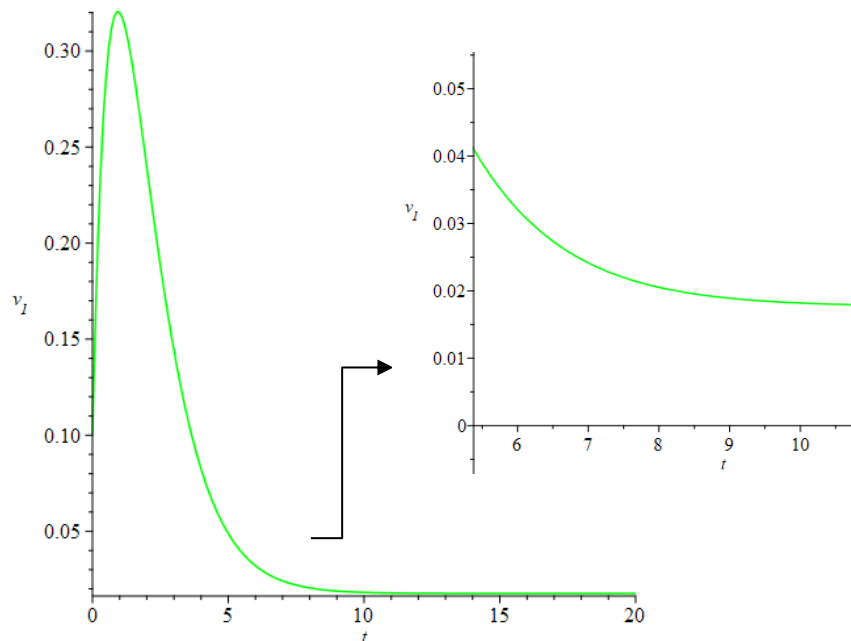
Nilai R_0 yang diperoleh setelah melakukan substitusi parameter adalah sebesar 0,0736829, yakni dalam kondisi $R_0 < 1$. Pada kondisi ini, sistem stabil asimtotik menuju titik ekuilibrium bebas penyakit, $P_0 = (S^*, V_1^*, V_2^*, V_3^*, E^*, I^*, R^*) = (0,0177223, 0,0176547, 1,1555262, 0,028723, 0, 0, 0,0230207)$ dan tidak stabil pada titik ekuilibrium endemik $P_1 = (S^{**}, V_1^{**}, V_2^{**}, V_3^{**}, E^{**}, I^{**}, R^{**}) = (3,2642693, 3,251813, 212,8359598, 5,2904938, -29,6423294, -0,8695598, -34,1227598)$. Hal ini mengonfirmasi hasil analisis yang telah dibahas sebelumnya.

Grafik simulasi model *SVEIR* penyakit campak dengan tiga kali vaksinasi untuk masing-masing kelas populasi sebagai berikut, dengan sumbu horizontal (sumbu-x) merepresentasikan waktu ke-t dalam satuan hari dan sumbu vertical (sumbu-y) merepresentasikan nilai sebuah kelas populasi.



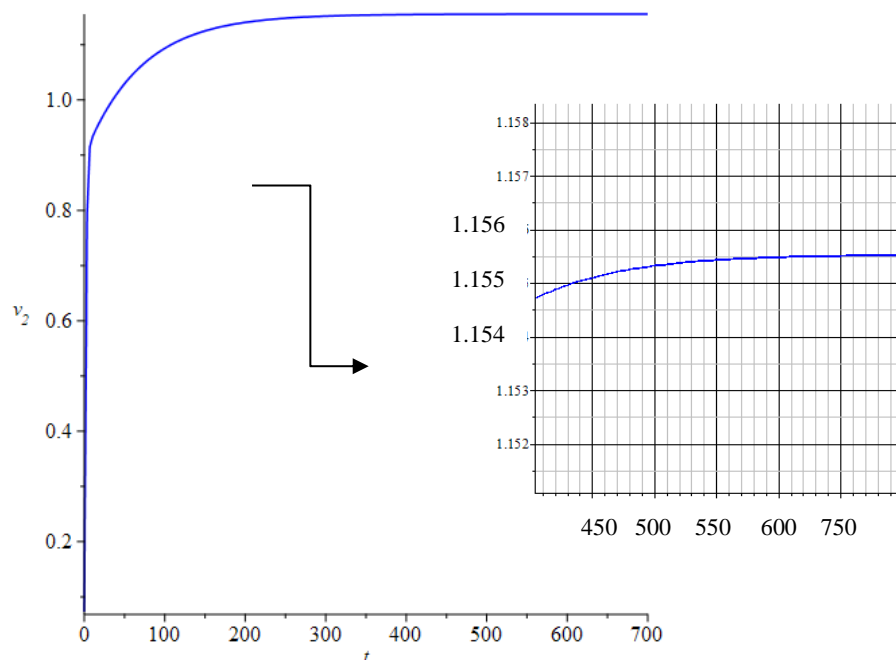
Gambar 2. Simulasi kelas populasi individu rentan (S)

Gambar 2 menunjukkan grafik kelas populasi individu rentan (S) dengan nilai awal populasi sebesar 0,7600271. Terlihat bahwa pada hari ke-2 hingga hari ke-7 terus mengalami penurunan menuju 0,0169000123 dan stabil pada titik tersebut pada hari-hari selanjutnya. Dengan kata lain, populasi individu rentan (S) yang awalnya sebanyak 275.770.000 jiwa mengalami penurunan selama 7 hari menjadi 6.430.400 jiwa.



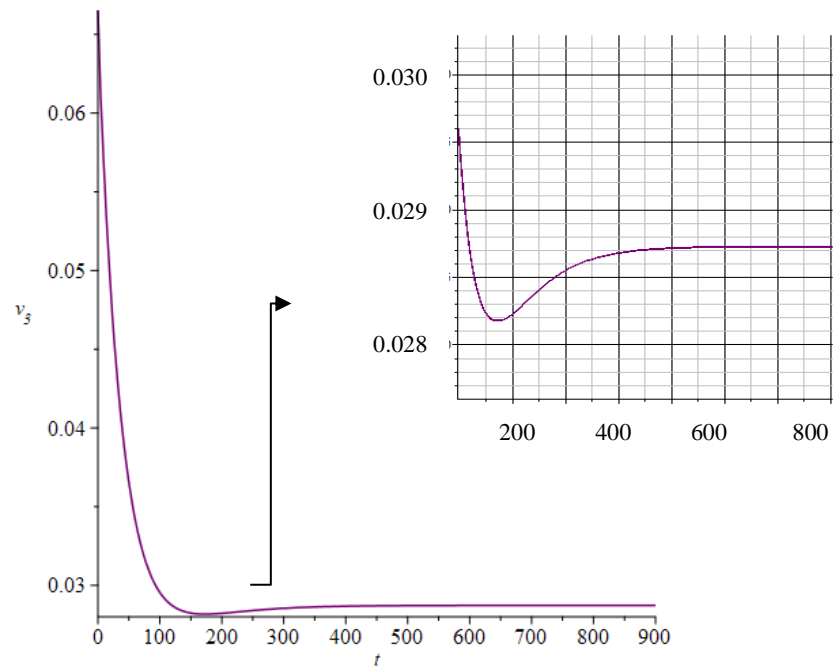
Gambar 3. Simulasi kelas populasi yang mendapatkan vaksinasi dosis pertama (V_1).

Terlihat pada Gambar 3 grafik mengalami kenaikan pada hari ke-1 menjadi sekitar 0,32, kemudian mengalami penurunan pada hari ke-2 hingga hari ke-11 menjadi **0,017654**, dan stabil pada titik tersebut pada hari-hari selanjutnya. Dengan kata lain, jumlah kelas populasi individu yang mendapatkan vaksin dosis pertama (V_1) mula-mula sebesar 36.400.000 jiwa mengalami kenaikan pada hari pertama menjadi 116.109.540 jiwa kemudian mengalami penurunan pada hari ke-2 hingga hari ke-11 menjadi 6.405.691 jiwa.



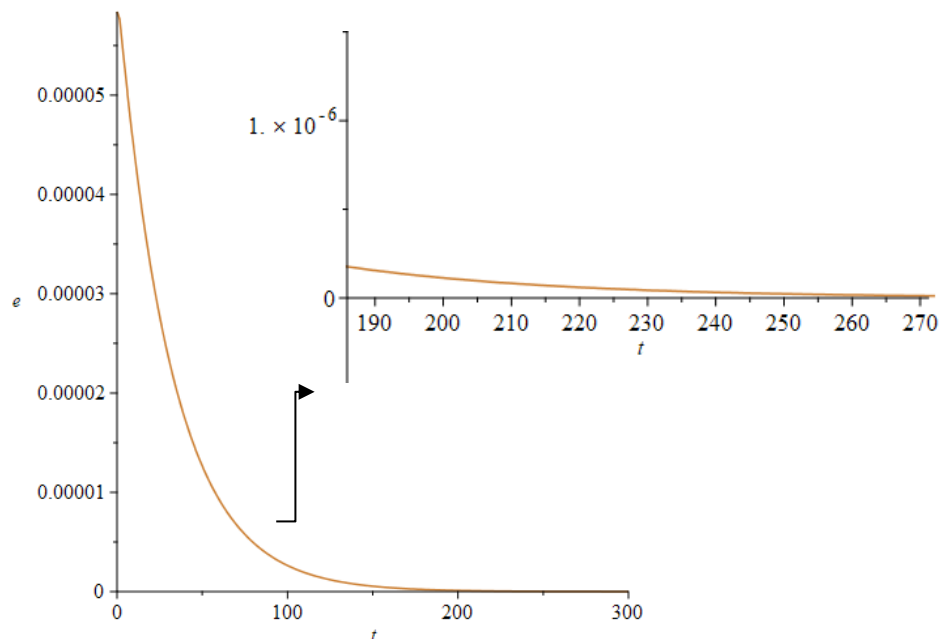
Gambar 4. Simulasi kelas populasi individu yang menerima vaksinasi dosis kedua (V_2)

Pada Gambar 4 menunjukkan bahwa populasi individu yang menerima vaksinasi dosis kedua mengalami kenaikan dan stabil menuju titik ekuilibrium bebas penyakit, dengan nilai awal $V_2(0) = 0,073034$ atau 26.500.000 jiwa menjadi $V_2(t) = 1,155262$ atau 419.273.800 jiwa pada hari ke-600 ($t = 600$).



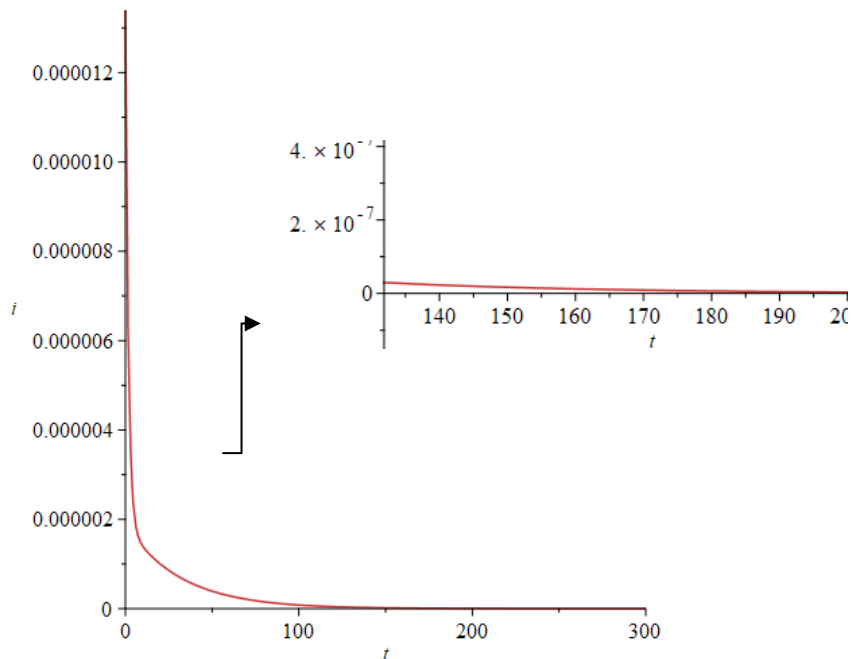
Gambar 5. Simulasi kelas populasi individu yang telah menerima vaksin dosis ketiga (V_3).

Terlihat bahwa grafik mengalami penurunan menuju titik ekuilibrium bebas penyakit, yakni dengan nilai awal $V_3(0) = 0,0665344$ atau 24.141.500 jiwa turun menjadi $V_3(t) = 0,028723$ atau 10.421.919 jiwa.



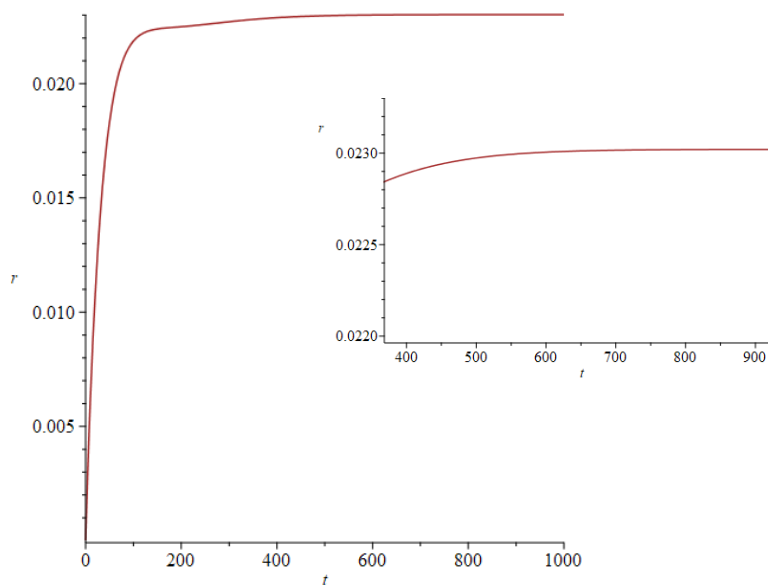
Gambar 6. Simulasi kelas populasi individu terpapar (E).

Terlihat bahwa grafik mengalami penurunan menuju 0 dari nilai awal $E(0) = 5,84 \times 10^{-6}$ atau 21.175 jiwa pada hari ke 260. Semakin hari individu yang terpapar semakin sedikit dan mendekati nol. Hal ini cukup memberikan penurunan individu yang terpapar dari hari ke hari menjadi lebih sedikit, sehingga penyebaran penyakit campak sangat lambat.



Gambar 7. Simulasi kelas populasi individu yang terinfeksi penyakit campak (I).

Pada Gambar 7 terlihat bahwa grafik kelas populasi individu penyakit campak mengalami penurunan, yakni dari titik awal $I(0) = 1,34 \times 10^{-6}$ atau 4.844 jiwa turun menuju 0 pada hari ke 260. Hal ini menggambarkan bahwa semakin hari penderita campak semakin sedikit dan penyebaran penyakit campak semakin melambat.



Gambar 8. Simulasi kelas populasi individu yang pulih (R).

Pada Gambar 8 terlihat bahwa grafik mengalami kenaikan, yakni dengan nilai awal $1,32 \times 10^{-5}$ atau 4.795 jiwa mengalami kenaikan hingga hari ke-100 menuju 0,0736829 atau 26.735.273 jiwa dan stabil pada titik tersebut dan hari-hari selanjutnya.

5 Simpulan

Model *SVEIR* pada penyebaran penyakit campak dengan tiga kali vaksinasi pada penelitian ini memiliki 10 parameter dan dua titik ekuilibrium, yakni titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik. Berdasarkan analisis yang telah dilakukan, model *SVEIR* tidak stabil pada titik ekuilibrium endemik (P_1) dan stabil asimtotik pada titik ekuilibrium bebas penyakit (P_0) dengan $R_0 = 0,0736829 < 1$. Hasil simulasi menunjukkan bahwa penyakit campak hilang pada hari ke-260 atau sekitar 8,5 bulan setelah program tiga kali vaksinasi dilaksanakan. Vaksinasi merupakan metode yang efektif untuk menghentikan epidemi campak, semakin banyak yang mendapatkan vaksinasi lengkap maka semakin cepat pula epidemi campak dapat dituntaskan.

6 Daftar Pustaka

- [1] Ferren, Horvat, and Mathieu, “Measles Encephalitis: Towards New Therapeutics,” *Viruses*, vol. 11, no. 11, p. 1017, Nov. 2019, doi: 10.3390/v11111017.
- [2] Kementerian Kesehatan Republik Indonesia, *Profil Kesehatan Indonesia 2022*. Kementerian Kesehatan Republik Indonesia, 2023.
- [3] D. Aldila and D. Asrianti, “A deterministic model of measles with imperfect vaccination and quarantine intervention,” *J. Phys.: Conf. Ser.*, vol. 1218, no. 1, p. 012044, May 2019, doi: 10.1088/1742-6596/1218/1/012044.
- [4] S. E. Lekana-Douki *et al.*, “Epidemiology and molecular characterization of the re-emerging measles virus among children and adults in the Haut-Ogooue, Gabon,” *BMC Infect Dis*, vol. 19, no. 1, p. 90, Dec. 2019, doi: 10.1186/s12879-019-3731-y.
- [5] Kementerian Kesehatan Republik Indonesia, “Waspada, Campak jadi Komplikasi Sebabkan Penyakit Berat.” Kemkes.go.id, 2023. Accessed: Feb. 18, 2024. [Online]. Available: <https://sehatnegeriku.kemkes.go.id/baca/rilis-media/20230120/1642247/waspada-campak-jadi-komplikasi-sebabkan-penyakit-berat>
- [6] C. I. Paules, H. D. Marston, and A. S. Fauci, “Measles in 2019 — Going Backward,” *N Engl J Med*, vol. 380, no. 23, pp. 2185–2187, Jun. 2019, doi: 10.1056/NEJMp1905099.
- [7] A. A. Minta *et al.*, “Progress Toward Measles Elimination — Worldwide, 2000–2022,” *MMWR Morb. Mortal. Wkly. Rep.*, vol. 72, no. 46, pp. 1262–1268, Nov. 2023, doi: 10.15585/mmwr.mm7246a3.
- [8] A. A. Minta *et al.*, “Progress Toward Regional Measles Elimination — Worldwide, 2000–2022,” vol. 71, no. 47, 2022.

-
- [9] WHO, “Nearly 40 Million Children Are Dangerously Susceptible To Growing Measles Threat.” who.int, 2022. Accessed: Feb. 18, 2024. [Online]. Available: <https://www.who.int/news/item/23-11-2022-nearly-40-million-children-are-dangerously-susceptible-to-growing-measles-threat>
- [10] Dinas Kesehatan Provinsi DKI Jakarta, *Profil Kesehatan DKI Jakarta Tahun 2017*. Dinas Kesehatan, 2018.
- [11] R. Magodi, E. J. Mmbaga, J. Massaga, D. Lyimo, A. Mphuru, and A. Abade, “Factors associated with non-uptake of measles-rubella vaccine second dose among children under five years in Mtwara district council, Tanzania, 2017,” *Pan Afr Med J*, vol. 33, 2019, doi: 10.11604/pamj.2019.33.67.17055.
- [12] Ikatan Dokter Anak Indonesia, “Imunisasi Campak-Rubella (MR).” idai.or.id, 2017. Accessed: Feb. 18, 2024. [Online]. Available: <https://www.idai.or.id/artikel/klinik/imunisasi/imunisasi-campak-rubella-mr>
- [13] W. O. Kermack and A. G. McKendrick, “Contributions to the mathematical theory of epidemics—I,” *Bulletin of Mathematical Biology*, vol. 53, no. 1, pp. 33–55, Jan. 1991, doi: 10.1016/S0092-8240(05)80040-0.
- [14] J. Juhari, O. Karinina, A. Aziz, and E. Alisah, “Global Stability Analysis of Susceptible, Infected, Recovered (S, I, R) Model Measles Vaccination Based on Age,” *InPrime:Ind.Jour.Pure.Applied.Math*, vol. 5, no. 2, pp. 144–160, Nov. 2023, doi: 10.15408/inprime.v5i2.32318.
- [15] W. D. Sihotang, C. C. Simbolon, J. Hartiny, D. Tindaon, and L. P. Sinaga, “Analisis Kestabilan Model SEIR Penyebaran Penyakit Campak dengan Pengaruh Imunisasi dan Vaksin MR,” *JMSK*, vol. 16, no. 1, p. 107, Jun. 2019, doi: 10.20956/jmsk.v16i1.6594.
- [16] P. Widyaningsih, L. F. Aminni, and D. R. S. Saputro, “Measles free prediction and control strategy to achieve measles elimination target in Indonesia based on SVEIR model,” presented at the INTERNATIONAL CONFERENCE OF MATHEMATICS AND MATHEMATICS EDUCATION (I-CMME) 2021, Surakarta, Indonesia, 2022, p. 030008. doi: 10.1063/5.0116992.
- [17] O. J. Peter, H. S. Panigoro, M. A. Ibrahim, O. M. Otunuga, T. A. Ayoola, and A. O. Oladapo, “Analysis and dynamics of measles with control strategies: a mathematical modeling approach,” *Int. J. Dynam. Control*, vol. 11, no. 5, pp. 2538–2552, Oct. 2023, doi: 10.1007/s40435-022-01105-1.
- [18] Badan Pusat Statistik, *STATISTIK INDONESIA 2022*. Online: Badan Pusat Statistik, 2022. Accessed: Feb. 10, 2024. [Online]. Available:

-
- <https://www.bps.go.id/id/publication/2022/02/25/0a2afea4fab72a5d052cb315/statistik-indonesia-2022.html>
- [19] S. Khanal *et al.*, “Morbidity and Mortality Weekly Report (MMWR),” *Centers for Disease Control and Prevention*, Jul. 21, 2017. Accessed: Mar. 12, 2023. [Online]. Available: <https://www.cdc.gov/mmwr/volumes/66/wr/mm6628a3.htm>
- [20] D. Aldila and D. Asrianti, “A deterministic model of measles with imperfect vaccination and quarantine intervention,” *J. Phys.: Conf. Ser.*, vol. 1218, no. 1, p. 012044, May 2019, doi: 10.1088/1742-6596/1218/1/012044.
- [21] P. Rodríguez-Zamorano, J. Otero Otero, A. Pérez González, L. E. Moro Rodríguez, and F. Marco, “[Translated article] Primary total hip arthroplasty in patients with sequelae of poliomyelitis,” *Revista Española de Cirugía Ortopédica y Traumatología*, vol. 67, no. 5, pp. T401–T410, Sep. 2023, doi: 10.1016/j.recot.2023.06.007.
- [22] L. Wang, Z. Liu, C. Guo, Y. Li, and X. Zhang, “New global dynamical results and application of several SVEIS epidemic models with temporary immunity,” *Applied Mathematics and Computation*, vol. 390, p. 125648, Feb. 2021, doi: 10.1016/j.amc.2020.125648.
- [23] H. Anton and C. Rorres, *Elementary Linear Algebra*, 11th ed. Canada, 2013.
- [24] R. Resmawan, A. R. Nuha, and L. Yahya, “Analisis Dinamik Model Transmisi COVID-19 dengan Melibatkan Intervensi Karantina,” *Jambura J. Math*, vol. 3, no. 1, pp. 66–79, Jan. 2021, doi: 10.34312/jjom.v3i1.8699.