Limits: Journal of Mathematics and Its Applications
E-ISSN: 2579-8936
P-ISSN: 1829-605X
Vol. 21, No. 3, Nopember 2024, 335-346
DOI: http://dx.doi.org/10.12962/limits.v21i3.20816

Bilangan Kromatik Lokasi Graf Amal($\boldsymbol{K_n, K_m}$)

Syafrizal Sy [1*], Rizki Ladipa YM [2], Monika Rianti Helmi [3]
[1,2,3]Departemen Matematika dan Sains Data, FMIPA, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis, Pauh, Padang, Indonesia
e-mail: [1*] syafrizalsy@sci.unand.ac.id, [2]2010432003_rizki@student.unand.ac.id,
[3]monikariantihelmi@sci.unand.ac.id

Diajukan: 5 Juli 2024, Diperbaiki: 30 September 2024, Diterima: 30 Oktober 2024

Abstrak

Misalkan $G = (V, E)$ graf terhubung dan c adalah suatu pemetaan warna pada graf G yang didefinisikan sebagai $c: V(G) \to \{1,2, \ldots, t\}$, dengan t bilangan asli. Jika u dan v bertetangga di G, maka $c(u) \neq c(v)$. Misalkan S_h adalah himpunan titik yang diberi warna h untuk $h \in \{1,2, \ldots, t\}$, maka S_h disebut kelas warna. Misalkan $\Pi = \{S_1, S_2, \ldots, S_t\}$ adalah partisi dari himpunan titik $V(G)$ untuk suatu pewarnaan. Kode warna $c_\Pi(v)$ untuk titik v di G didefinisikan sebagai t-vektor $c_\Pi(v) = (d(v, S_1), d(v, S_2), \ldots, d(v, S_t))$, dimana $d(v, S_h) = \min\{d(v, x) | x \in S_h\}$ untuk $h \in \{1,2, \ldots, t\}$. Jika setiap titik di G mempunyai kode warna yang berbeda untuk suatu Π, maka c disebut sebagai pewarnaan lokasi. Minimum t sedemikian sehingga G mempunyai pewarnaan lokasi dengan t warna disebut bilangan kromatik lokasi, dinotasikan sebagai $\chi_L(G)$. Pada penelitian ini dibahas tentang bilangan kromatik lokasi graf Amal(K_n, K_m). Graf Amal(K_n, K_m) adalah suatu graf yang diperoleh dengan menggabungkan satu titik di setiap K_n ke setiap titik di K_m secara satu-satu, dengan $m, n \geq 2, m, n \in \mathbb{N}$. Dengan menentukan batas bawah dan batas atas bilangan kromatik lokasi, diperoleh bahwa bilangan kromatik lokasi graf Amal(K_n, K_m) adalah $n + 1$ untuk $m \leq n$ dan m untuk $m > n$.

Kata Kunci: Kelas Warna, Kode Warna, Pewarnaan Lokasi, Bilangan Kromatik Lokasi, Graf Amal(K_n, K_m).

Abstract

Let $G = (V, E)$ is a connected graph and c is a color mapping on graph G defined as $c: V(G) \to \{1,2, \ldots, t\}$, where t is a natural number. If u and v are adjacent vertices in G, then $c(u) \neq c(v)$. Suppose S_h is a set of vertices that are colored with color h for $h \in \{1,2, \ldots, t\}$, then S_h is called a color class. Suppose $\Pi = \{S_1, S_2, \ldots, S_t\}$ is a partition of the vertex set $V(G)$ for a coloring. The color code $c_\Pi(v)$ for vertex v in G is defined as the t-vector $c_\Pi(v) = (d(v, S_1), d(v, S_2), \ldots, d(v, S_t))$, where $d(v, S_h) = \min\{d(v, x) | x \in S_h\}$ for $h \in \{1,2, \ldots, t\}$. If every vertex in G has a different color code for a given partition Π, then c is called a locating coloring. The minimum t such that G has a locating coloring with t colors is called the locating chromatic number, denoted as $\chi_L(G)$. In this paper, we discuss about locating chromatic number for Amal(K_n, K_m) graph. The Amal(K_n, K_m) graph is a graph obtained by connecting one vertex in each K_n to each vertex in K_m one-to-one, with $m, n \geq 2, m, n \in \mathbb{N}$. By finding lower bound dan upper bound of the locating chromatic number of that graphs, it conclude that the locating chromatic number of Amal(K_n, K_m) graph is $n + 1$ for $m \leq n$ and m for $m > n$.

***Keywords**: Color Class, Color code, Locating Coloring, Locating Chromatic Number, Amal(K_n, K_m) Graph.*

1 Pendahuluan

Misalkan graf berhingga tak kosong G adalah pasangan terurut $(V(G), E(G))$, dengan $V(G)$ adalah himpunan berhingga tak kosong yang beranggotakan titik-titik di G dan $E(G)$ adalah himpunan berhingga yang beranggotakan sisi-sisi di G[1]. Salah satu kajian dalam teori graf yang akan dibahas dalam penelitian ini adalah bilangan kromatik lokasi. Konsep bilangan kromatik lokasi ini pertama kali diperkenalkan oleh Chartrand dkk.[2] pada tahun 2002 yang merupakan perluasan dari bilangan kromatik. Misalkan pewarnaan titik sejati adalah pemberian warna di setiap titik di graf G dimana titik yang bertetangga harus diberi warna yang berbeda, maka banyak warna minimum k yang digunakan sedemikian sehingga G mempunyai suatu pewarnaan titik sejati disebut bilangan kromatik dari G, dinotasikan dengan $\chi(G)$ [3]. Kemudian Chartrand dkk.[2] mendefinisikan konsep bilangan kromatik lokasi sebagai berikut. Misalkan c adalah suatu pemetaan warna pada graf G yang didefinisikan sebagai $c: V(G) \rightarrow \{1,2, \ldots, t\}$, dengan t bilangan asli. Jika u dan v titik yang bertetangga di G, maka $c(u) \neq c(v)$. Misalkan S_h adalah himpunan titik yang diberi warna h untuk $h \in \{1,2, \ldots, t\}$, maka S_h disebut kelas warna. Misalkan $\Pi = \{S_1, S_2, \ldots, S_t\}$ adalah partisi dari himpunan titik $V(G)$ untuk suatu pewarnaan. Kode warna $c_\Pi(v)$ untuk titik v di G didefinisikan sebagai t-vektor,

$$c_\Pi(v) = (d(v, S_1), d(v, S_2), \ldots, d(v, S_t)),$$

dengan $d(v, S_h) = min\,\{d(v,x) | x \in S_h\}$ untuk $h \in \{1,2, \ldots, t\}$, dimana $d(v,x)$ adalah jarak antara titik u dan v. Jika setiap titik di G mempunyai kode warna yang berbeda untuk suatu Π, maka c disebut sebagai pewarnaan lokasi. Banyak warna minimum t sedemikian sehingga G mempunyai pewarnaan lokasi disebut bilangan kromatik lokasi, dinotasikan sebagai $\chi_\mathrm{L}(G)$ [2].

Berikut adalah beberapa penelitian yang sudah ada mengenai bilangan kromatik lokasi. Pada tahun 2003, Chartrand dkk.[4] memperoleh klasterisasi graf berorde n dengan hasil bilangan kromatik lokasi $n-1$. Pada tahun 2013, Welyyanti dkk. memperoleh bilangan kromatik lokasi graf *Complete n-Ary Tree* [5]. Pada tahun 2014, Welyyanti dkk. memperluas definisi bilangan kromatik lokasi untuk graf tak terhubung [6]. Pada tahun yang sama, A. Behtoei dan M. Anbarloei memperoleh bilangan kromatik lokasi dengan operasi join beberapa graf [7]. Pada tahun 2018, Asmiati dkk. memperoleh bilangan kromatik lokasi untuk beberapa amalgamasi graf bintang yang dihubungkan oleh satu lintasan [8] dan bilangan kromatik lokasi untuk graf barbel tertentu [9]. Pada tahun 2023, Welyyanti dkk. memperoleh bilangan kromatik lokasi pada graf amalgamasi kipas berekor [10].

Kemudian Pada tahun 2018, Utomo dan Dewi [11] telah mengkonstruksi suatu graf dengan mengilustrasikan n buah graf lengkap K_m yang dioperasi amalgamasi titik dengan graf lengkap

K_n, dengan cara menyatukan titik pada setiap K_m tepat satu dengan setiap titik pada K_n, dinotasikan sebagai nK_m dan diperoleh dimensi metriknya. Pada penelitian ini akan membahas bilangan kromatik lokasi dari graf nK_m yang dinotasikan sebagai graf Amal(K_n, K_m).

2 Metode Penelitian

Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini dapat dirumuskan sebagai berikut:

a. Mengkonstruksi Graf Amal(K_n, K_m) dan mendefinisikan himpunan titik beserta sisinya.
   Pada langkah ini, dilakukan perbaikan dan pendefinisian ulang terhadap Graf Amal(K_n, K_m) yang sebelumnya sudah didefinisikan oleh Utomo dan Dewi [11], serta didefinisikan himpunan titik dan sisinya beserta kardinalitasnya.

b. Menentukan teorema dan akibat yang diperlukan dalam menentukan bilangan kromatik lokasi graf Amal(K_n, K_m).
   Pada langkah ini, akan ditentukan teorema, akibat, atau proposisi yang diperlukan untuk menjamin dan mendukung pembuktian bilangan kromatik lokasi graf Amal(K_n, K_m).

c. Menentukan batas bawah bilangan kromatik lokasi graf Amal(K_n, K_m).
   Pada langkah ini akan ditunjukkan batas bawah bilangan kromatik lokasi graf Amal(K_n, K_m) menggunakan teorema dan proposisi yang sudah ada.

d. Menentukan batas atas bilangan kromatik lokasi graf Amal(K_n, K_m).
   Pada langkah ini akan ditunjukkan batas atas bilangan kromatik lokasi graf Amal(K_n, K_m) dengan menunjukkan setiap titik di graf Amal(K_n, K_m) memiliki kode warma yang berbeda.

e. Menentukan nilai eksak bilangan kromatik lokasi graf Amal(K_n, K_m) berdasarkan hasil batas bawah dan batas atas.
   Pada langkah ini, karena batas bawah dan batas atas sudah dibuktikan dengan benar, maka dapat ditarik kesimpulan untuk nilai eksak bilangan kromatik lokasi graf Amal(K_n, K_m).

3 Hasil dan Pembahasan

3.1 Graf Amal(K_n, K_m)

Graf lengkap K_n adalah graf terhubung berorde n dimana semua titiknya saling bertetangga. Misalkan $\{G_1, G_2, \dots, G_t\}$ adalah kumpulan graf sederhana yang terhubung dan berhingga dimana setiap graf G_i memiliki satu titik v_0. Amalgamasi titik dari $\{G_1, G_2, \dots, G_t\}$ adalah graf yang diperoleh dari penggabungan titik v_0 di G_i menjadi satu titik, dinotasikan Amal(G, v_0, t) [12]. Graf Amal(K_n, K_m) adalah graf yang diperoleh dengan menggabungkan satu titik di setiap K_n ke setiap titik di K_m secara satu-satu, dengan $m, n \geq 2, m, n \in \mathbb{N}$. Himpunan titik dan sisi graf Amal(K_n, K_m) adalah

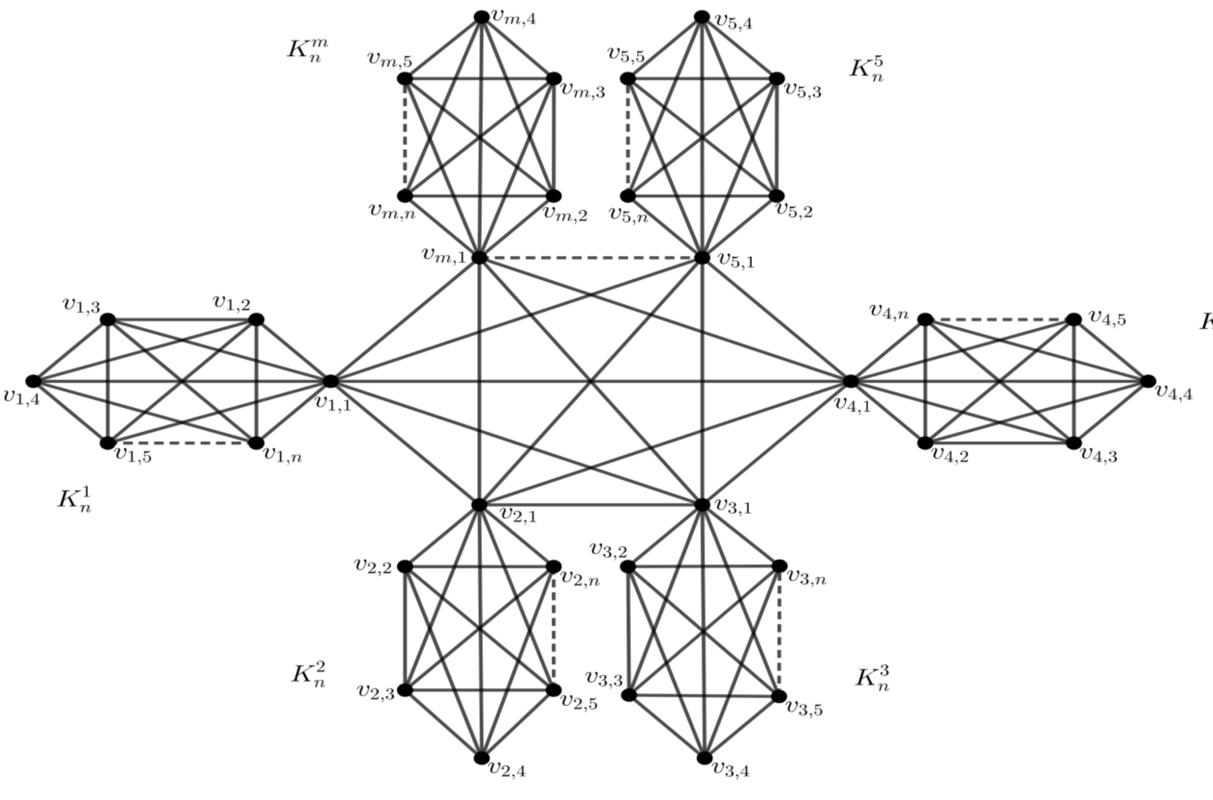
$V\big(Amal(K_n, K_m)\big) = \Big\{v_{i,j} \Big| i \in \{1,2, \dots, m\}, j \in \{1,2, \dots, n\}\Big\}$,

$E\big(Amal(K_n, K_m)\big) = \big\{v_{i,1}, v_{x,1} \big| i, x \in \{1,2, \dots, m\}, i \neq x\big\} \cup$

$\big\{v_{i,j}, v_{i,y} \big| i \in \{1,2, \dots, m\}, j, y \in \{1,2, \dots, n\}, j \neq y\big\}$, dengan

$\big|V\big(Amal(K_n, K_m)\big)\big| = mn$, $\big|E\big(Amal(K_n, K_m)\big)\big| = \frac{m.(n).(n-1)+(m).(m-1)}{2}$.

Misalkan K_n^i subgraf dari Amal(K_n, K_m) yang memuat satu titik $v_{i,1}$ dengan $i \in \{1,2, \dots, m\}$, dimana $V(K_n^i) \subset V\big(Amal(K_n, K_m)\big)$ dan $E(K_n^i) \subset E\big(Amal(K_n, K_m)\big)$. Misalkan K_m subgraf dari Amal(K_n, K_m) yang memuat semua titik $v_{i,1}$ dengan $i \in \{1,2, \dots, m\}$ dan himpunan sisinya $\big\{v_{i,1}, v_{x,1} \big| i, x \in \{1,2, \dots, m\}, i \neq x\big\}$. Graf Amal($K_n, K_m$) ditunjukkan pada Gambar 1.



Gambar 1. Graf Amal(K_n, K_m)

3.2 Bilangan Kromatik Lokasi Graf Amal(K_n, K_m)

Dalam menentukan bilangan kromatik lokasi graf Amal(K_n, K_m), diperlukan beberapa teorema dan proposisi agar menjamin kebenaran pembuktian pada teorema 3. Berikut Teorema dan proposisi yang berkaitan dengan bilangan kromatik lokasi graf Amal(K_n, K_m) yang diambil dari [2].

Teorema 1. [2] *Misalkan c adalah pewarnaan lokasi pada graf terhubung G. Jika u dan v adalah dua titik berbeda di G sedemikian sehingga $d(u,w) = d(v,w)$ untuk setiap $w \in V(G) - \{u,v\}$, maka $c(u) \neq c(v)$. Misalkan $N(v)$ sebagai himpunan titik yang bertetangga dengan v. Secara khusus jika u dan v titik yang tidak bertetangga di G sedemikian sehingga $N(u) = N(v)$, maka $c(u) \neq c(v)$.*

Proposisi 2. [2] *Misalkan G adalah graf terhubung berorde $n \geq 3$, maka $\chi_L(G) = n$ jika dan hanya jika G adalah graf multipartite lengkap.*

Pada Teorema 3 akan dibahas tentang bilangan kromatik lokasi graf Amal(K_n, K_m) dengan $m, n \geq 2, m, n \in \mathbb{N}$.

Teorema 3. *Jika terdapat graf $Amal(K_n, K_m)$ untuk $m, n \geq 2, m, n \in \mathbb{N}$, maka*

$$\chi_L\big(Amal(K_n, K_m)\big) = \begin{cases} n+1, untuk\ m \leq n, \\ m, \qquad untuk\ m > n. \end{cases}$$

Bukti. Menentukan bilangan kromatik lokasi graf Amal(K_n, K_m) akan dibagi dalam dua kasus sebagai berikut.

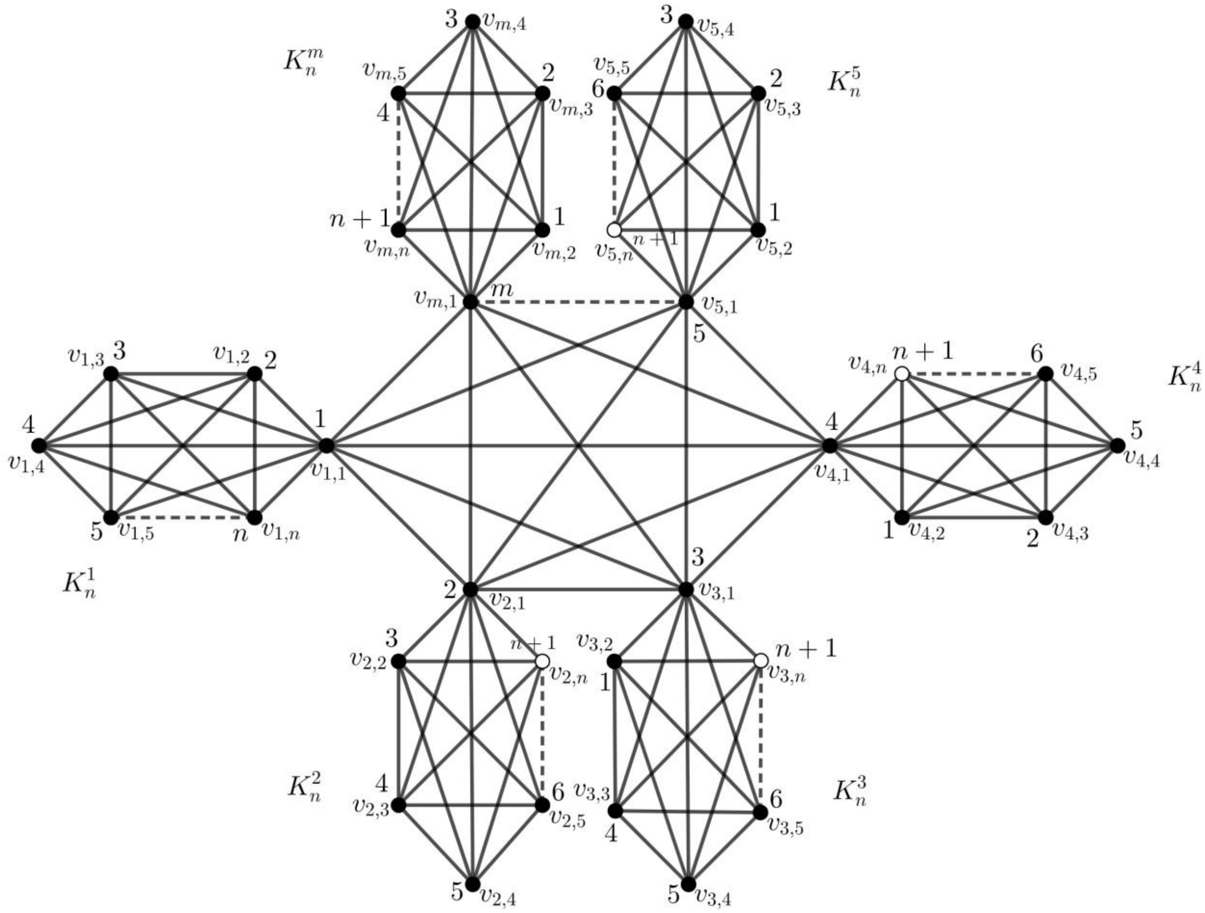
Kasus 1. Untuk $m \leq n$, akan dibuktikan $\chi_L\big(Amal(K_n, K_m)\big) = n + 1$.

Akan ditentukan batas bawah bilangan kromatik lokasi graf Amal(K_n, K_m) untuk $m \leq n$ dengan menunjukkan $\chi_L\big(Amal(K_n, K_m)\big) \geq n + 1$. Andaikan pada graf Amal(K_n, K_m) diberikan n-pewarnaan lokasi. Subgraf K_n^i berorde n dan ada sebanyak m, maka di setiap subgraf K_n^i untuk $i \in \{1,2, \dots, m\}$ memiliki kombinasi pewarnaan yang sama. Akibatnya, setiap titik di subgraf K_n^i terdapat kode warna yang sama. Oleh karena itu, maka diperlukan penambahan satu warna lagi agar diperoleh kode warna yang berbeda di setiap titiknya. Jadi, $\chi_L\big(Amal(K_n, K_m)\big) \geq n + 1$ untuk $m \leq n$.

Akan ditentukan batas atas bilangan kromatik lokasi graf Amal(K_n, K_m) untuk $m \leq n$ dengan menunjukkan $\chi_L\big(Amal(K_n, K_m)\big) \leq n + 1$. Kemudian definisikan pewarnaan titik $c: V\big(Amal(K_n, K_m)\big) \to \{1,2, \dots, n+1\}$, dengan

$$c(v)=\begin{cases} 1,\text{untuk } v\in\{v_{1,1}\}\cup\ \{v_{i,2}|i\in\{3,4,\dots,m\}\}, \\ 2,\ \ \text{untuk } v\in\{v_{1,2},v_{2,1}\}\cup\ \{v_{i,3}|i\in\{4,5,\dots,m\}\}, \\ 3,\ \ \text{untuk } v\in\{v_{1,3},v_{3,1}\}\cup\{v_{2,2}\}\cup\{v_{i,4}|i\in\{5,6,\dots,m\}\}, \\ 4,\ \ \text{untuk } v\in\{v_{1,4},v_{4,1}\}\cup\{v_{2,3},v_{3,3}\}\cup\{v_{i,5}|i\in\{6,7,\dots,m\}\}, \\ 5,\ \ \text{untuk } \ v\in\{v_{1,5},v_{5,1}\}\cup\{v_{2,4},v_{3,4},v_{4,4}\}\cup\{v_{i,6}|i\in\{7,8,\dots,m\}\}, \\ 6,\ \ \text{untuk } v\in\{v_{1,6},v_{6,1}\}\cup\{v_{2,5},v_{3,5},v_{4,5},v_{5,5}\}\cup\{v_{i,7}|i\in\{8,9,\dots,m\}\}, \\ i,\ \ \text{untuk } v\in\{v_{1,i},v_{i,1}\}\cup\{v_{k,i-1}|k\in\{2,3,\dots,i-1\}\}\cup\{v_{l,i+1}|i+2\le l\le m\}, \\ n,\ \ \text{untuk } v\in\{v_{1,n}\}\cup\ \{v_{k,n-1}|k\in\{2,3,\dots,n-1\}\}, \\ n+1,\ \ \text{untuk } v\in\{v_{i,n}|i\in\{2,3,\dots,n\}\}. \end{cases}$$

Kemudian berikut adalah ilustrasi pewarnaan lokasi graf Amal(K_n,K_m) untuk $m\le n$.



Gambar 2. $(n+1)$-Pewarnaan Lokasi Graf Amal(K_n,K_m) untuk $m\le n$.

Misalkan $\Pi=\{S_1,S_2,\dots,S_{n+1}\}$ himpunan partisi titik graf Amal(K_n,K_m) dengan S_h adalah himpunan titik yang berwarna h, dimana $h\in\{1,2,\dots,n+1\}$. Selanjutnya akan ditunjukkan setiap titik graf Amal(K_n,K_m) memiliki kode warna yang berbeda terhadap Π. Kemudian diperoleh kode warna setiap titik pada graf Amal(K_n,K_m) terhadap Π sebagai berikut, dimana $i\in\{1,2,\dots,m\}$ dan $j\in\{1,2,\dots,n\}$.

Tabel 1. Kode Warna Titik Graf Amal(K_n, K_m)

Nama Subgraf	Kode Warna
K_n^1	$c_\Pi(v_{1,1}) = (0, 1, 1, 1, \dots, 1, 1, 1, 2)$ $c_\Pi(v_{1,2}) = (1, 0, 1, 1, \dots, 1, 1, 1, 3)$ $c_\Pi(v_{1,3}) = (1, 1, 0, 1, \dots, 1, 1, 1, 3)$ $c_\Pi(v_{1,j}) = (\underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}, 0, \underbrace{1, \dots, 1}_{n-j}, 3)$ $c_\Pi(v_{1,n-1}) = (1, 1, 1, 1, \dots, 1, 0, 1, 3)$ $c_\Pi(v_{1,n}) = (1, 1, 1, 1, \dots, 1, 1, 0, 3)$
K_n^2	$c_\Pi(v_{2,1}) = (1, 0, 1, 1, \dots, 1, 1, 1, 1)$ $c_\Pi(v_{2,2}) = (2, 1, 0, 1, \dots, 1, 1, 1, 1)$ $c_\Pi(v_{2,3}) = (2, 1, 1, 0, \dots, 1, 1, 1, 1)$ $c_\Pi(v_{2,j}) = (2, \underbrace{1, \dots, 1}_{j-1}, 0, \underbrace{1, \dots, 1}_{n-j})$ $c_\Pi(v_{2,n-1}) = (2, 1, 1, 1, \dots, 1, 1, 0, 1)$ $c_\Pi(v_{2,n}) = (2, 1, 1, 1, \dots, 1, 1, 1, 0)$
K_n^3	$c_\Pi(v_{3,1}) = (1, 1, 0, 1, \dots, 1, 1, 1, 1)$ $c_\Pi(v_{3,2}) = (0, 2, 1, 1, \dots, 1, 1, 1, 1)$ $c_\Pi(v_{3,3}) = (1, 2, 1, 0, \dots, 1, 1, 1, 1)$ $c_\Pi(v_{3,j}) = (1, 2, \underbrace{1, \dots, 1}_{j-2}, 0, \underbrace{1, \dots, 1}_{n-j})$ $c_\Pi(v_{3,n-1}) = (1, 2, 1, 1, \dots, 1, 1, 0, 1)$ $c_\Pi(v_{3,n}) = (1, 2, 1, 1, \dots, 1, 1, 1, 0)$
K_n^i	$c_\Pi(v_{i,1}) = (\underbrace{1, \dots, 1}_{i-1}, 0, \underbrace{1, \dots, 1}_{n-i+1})$ $c_\Pi(v_{i,2}) = (0, \underbrace{1, \dots, 1}_{i-3}, 2, \underbrace{1, \dots, 1}_{n-i+2})$ $c_\Pi(v_{i,3}) = (1, 0, \underbrace{1, \dots, 1}_{i-4}, 2, \underbrace{1, \dots, 1}_{n-i+2})$ $c_\Pi(v_{i,j}) = (\underbrace{1, \dots, 1}_{j-2}, 0, \underbrace{1, \dots, 1}_{i-j-1}, 2, \underbrace{1, \dots, 1}_{n-i+2})$, untuk $i > j$ $c_\Pi(v_{i,j}) = (\underbrace{1, \dots, 1}_{i-2}, 2, \underbrace{1, \dots, 1}_{j-i+1}, 0, \underbrace{1, \dots, 1}_{n-j})$, untuk $i \leq j$ $c_\Pi(v_{i,n-1}) = (\underbrace{1, \dots, 1}_{i-2}, 2, \underbrace{1, \dots, 1}_{n-i}, 0, 1)$ $c_\Pi(v_{i,n}) = (\underbrace{1, \dots, 1}_{i-2}, 2, \underbrace{1, \dots, 1}_{n-i}, 1, 0)$
K_n^{n-1}	$c_\Pi(v_{n-1,1}) = (1, 1, 1, 1, \dots, 1, 0, 1, 1)$ $c_\Pi(v_{n-1,2}) = (0, 1, 1, 1, \dots, 2, 1, 1, 1)$ $c_\Pi(v_{n-1,3}) = (1, 0, 1, 1, \dots, 2, 1, 1, 1)$ $c_\Pi(v_{n-1,j}) = (\underbrace{1, \dots, 1}_{j-2}, 0, \underbrace{1, \dots, 1}_{n-j-2}, 2, 1, 1, 1)$ $c_\Pi(v_{n-1,n-1}) = (1, 1, 1, 1, \dots, 2, 1, 0, 1)$ $c_\Pi(v_{n-1,n}) = (1, 1, 1, 1, \dots, 2, 1, 1, 0)$
K_n^n	$c_\Pi(v_{n,1}) = (1, 1, 1, 1, \dots, 1, 1, 0, 1)$

Nama Subgraf	Kode Warna
	$c_\Pi(v_{n,2}) = (0, 1, 1, 1, \dots, 1, 2, 1, 1)$ $c_\Pi(v_{n,3}) = (1, 0, 1, 1, \dots, 1, 2, 1, 1)$ $c_\Pi(v_{n,j}) = (\underbrace{1, \dots, 1}_{j-2}, 0, \underbrace{1, \dots, 1}_{n-j-1}, 2, 1, 1)$ $c_\Pi(v_{n,n-1}) = (1, 1, 1, 1, \dots, 0, 2, 1, 1)$ $c_\Pi(v_{n,n}) = (1, 1, 1, 1, \dots, 1, 2, 1, 0)$

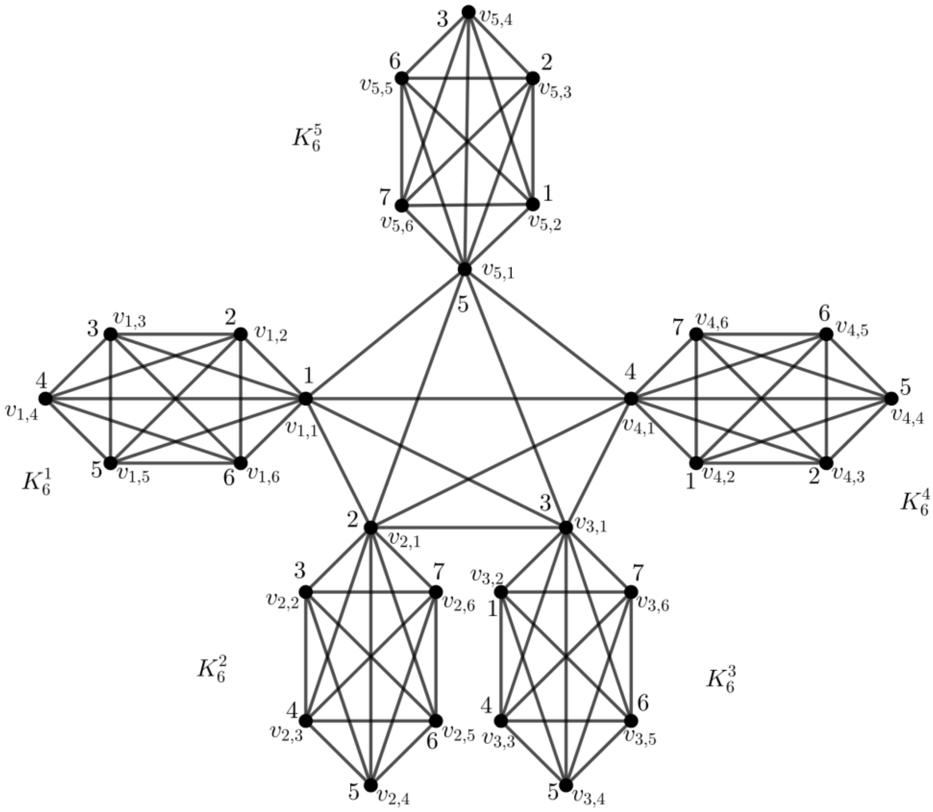
Pada Tabel 1 dibuat perumuman kode warna sampai nilai m maksimum, yaitu $m = n$. Jika $m < n$, maka cukup menghapus kode warna pada subgraf K_n^i untuk $i \in \{m+1, m+2, \dots, n\}$. Dengan demikian, setiap titik memiliki kode warna yang berbeda. Maka, $\chi_L(Amal(K_n, K_m)) \leq n + 1$. Jadi, diperoleh $\chi_L(Amal(K_n, K_m)) = n + 1$ untuk $m \leq n$.

Kasus 2. Untuk $m > n$, akan dibuktikan $\chi_L(Amal(K_n, K_m)) = m$.

Akan ditentukan batas bawah bilangan kromatik lokasi graf Amal(K_n, K_m) untuk $m > n$ dengan menunjukkan $\chi_L(Amal(K_n, K_m)) \geq m$. Diketahui bahwa Subgraf K_m berorde m dan $m > n$, maka graf Amal(K_n, K_m) haruslah diberikan minimum m-pewarnaan lokasi. Jadi diperoleh $\chi_L(Amal(K_n, K_m)) \geq m$.

Akan ditentukan batas atas bilangan kromatik lokasi graf Amal(K_n, K_m) untuk $m > n$ dengan menunjukkan $\chi_L(Amal(K_n, K_m)) \leq m$. Kemudian misalkan graf Amal(K_n, K_m) diberikan m-pewarnaan lokasi. Kemudian misalkan juga $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$ himpunan partisi titik pada graf Amal(K_n, K_m) dengan S_h adalah himpunan titik yang berwarna h, dimana $h \in \{1,2, \dots, n+1\}$. Selanjutnya akan ditunjukkan setiap titik pada graf Amal(K_n, K_m) memiliki kode warna yang berbeda terhadap Π. Jika $m > n$, maka setiap subgraf K_n^i dapat diberi kombinasi pewarnaan lokasi yang saling berbeda. Akibatnya, kode warna pada titik di setiap subgraf K_n^i dibedakan oleh jarak ke titik yang berada di kelas warna S_h selain yang ada pada subgraf K_n^i. Akibatnya, $\chi_L(Amal(K_n, K_m)) \leq m$. Jadi, $\chi_L(Amal(K_n, K_m)) = m$ untuk $m > n$. ■

Berikut adalah contoh kasus dari pembuktian Teorema 3. Diberikan graf Amal(K_6, K_5) sebagai berikut. Akan ditunjukkan bahwa $\chi_L(Amal(K_6, K_5)) = 7$.



Gambar 3. 7-Pewarnaan Lokasi Graf Amal(K_6, K_5).

Bukti. Akan ditentukan batas bawah bilangan kromatik lokasi Amal(K_6, K_5) dengan menunjukkan $\chi_L\big(Amal(K_6, K_5)\big) \geq 7$. Andaikan graf Amal($K_6, K_5$) diberikan 6-pewarnaan lokasi, maka setiap subgraf K_6^i dengan $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ memiliki kombinasi pewarnaan yang sama. Akibatnya setiap titik di subgraf K_6^i terdapat kode warna yang sama, sehingga diperlukan penambahan satu warna lagi agar menghasilkan kode warna yang berbeda di setiap titiknya. Akibatnya, $\chi_L\big(Amal(K_6, K_5)\big) \geq 7$.

Akan ditentukan batas atas bilangan kromatik lokasi Amal(K_6, K_5) dengan menunjukkan $\chi_L\big(Amal(K_6, K_5)\big) \leq 7$. Definisikan suatu pewarnaan titik $c: V\big(Amal(K_6, K_5)\big) \rightarrow \{1,2, \ldots, n + 1\}$,dengan

$$c(v) = \begin{cases} 1, \text{untuk } v \in \{v_{1,1}, v_{3,2}, v_{4,2,}, v_{5,2}\}, \\ 2, \ \text{untuk } v \in \{v_{1,2}, v_{2,1}, v_{4,3}, v_{5,3}\}, \\ 3, \ \text{untuk } v \in \{v_{1,3}, v_{2,2}, v_{3,1}, v_{5,4}\}, \\ 4, \ \text{untuk } v \in \{v_{1,4}, v_{2,3}, v_{3,3}, v_{4,1}\}, \\ 5, \ \text{untuk } v \in \{v_{1,5}, v_{2,4}, v_{3,4}, v_{4,4}, v_{5,1}\}, \\ 6, \ \text{untuk } v \in \{v_{1,6}, v_{2,5}, v_{3,5}, v_{4,5}, v_{5,5}\}, \\ 7, \ \text{untuk } v \in \{v_{2,6}, v_{3,6}, v_{4,6}, v_{5,6}\}. \end{cases}$$

Definisikan kelas warna sebagai berikut, $\Pi = \{S_1, S_2, \ldots\ , S_7\}$, dengan

$$S_1 = \{v_{1,1}, v_{3,2}, v_{4,2,}, v_{5,2}\},$$
$$S_2 = \{v_{1,2}, v_{2,1}, v_{4,3}, v_{5,3}\},$$
$$S_3 = \{v_{1,3}, v_{2,2}, v_{3,1}, v_{5,4}\},$$
$$S_4 = \{v_{1,4}, v_{2,3}, v_{3,3}, v_{4,1}\},$$
$$S_5 = \{v_{1,5}, v_{2,4}, v_{3,4}, v_{4,4}, v_{5,1}\},$$
$$S_6 = \{v_{1,6}, v_{2,5}, v_{3,5}, v_{4,5}, v_{5,5}\},$$
$$S_7 = \{v_{2,6}, v_{3,6}, v_{4,6}, v_{5,6}\}.$$

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa setiap titik di Amal(K_6, K_5) memiliki kode warna yang berbeda terhadap Π untuk c-pewarnaan lokasi. Kemudian diperoleh kode warna setiap titiknya terhadap $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_7\}$ sebagai berikut.

Tabel 2. Kode Warna Titik Graf Amal(K_6, K_5)

Nama Subgraf	Kode Warna
K_6^1	$c_\Pi(v_{1,1}) = (0, 1, 1, 1, 1, 1, 2)$ $c_\Pi(v_{1,2}) = (1, 0, 1, 1, 1, 1, 3)$ $c_\Pi(v_{1,3}) = (1, 1, 0, 1, 1, 1, 3)$ $c_\Pi(v_{1,4}) = (1, 1, 1, 0, 1, 1, 3)$ $c_\Pi(v_{1,5}) = (1, 1, 1, 1, 0, 1, 3)$ $c_\Pi(v_{1,6}) = (1, 1, 1, 1, 1, 0, 3)$
K_6^2	$c_\Pi(v_{2,1}) = (1, 0, 1, 1, 1, 1, 1)$ $c_\Pi(v_{2,2}) = (2, 1, 0, 1, 1, 1, 1)$ $c_\Pi(v_{2,3}) = (2, 1, 1, 0, 1, 1, 1)$ $c_\Pi(v_{2,4}) = (2, 1, 1, 1, 0, 1, 1)$ $c_\Pi(v_{2,5}) = (2, 1, 1, 1, 1, 0, 1)$ $c_\Pi(v_{2,6}) = (2, 1, 1, 1, 1, 1, 0)$
K_6^3	$c_\Pi(v_{3,1}) = (1, 1, 0, 1, 1, 1, 1)$ $c_\Pi(v_{3,2}) = (0, 2, 1, 1, 1, 1, 1)$ $c_\Pi(v_{3,3}) = (1, 2, 1, 0, 1, 1, 1)$ $c_\Pi(v_{3,4}) = (1, 2, 1, 1, 0, 1, 1)$ $c_\Pi(v_{3,5}) = (1, 2, 1, 1, 1, 0, 1)$ $c_\Pi(v_{3,6}) = (1, 2, 1, 1, 1, 1, 0)$
K_6^4	$c_\Pi(v_{4,1}) = (1, 1, 1, 0, 1, 1, 1)$ $c_\Pi(v_{4,2}) = (0, 1, 2, 1, 1, 1, 1)$ $c_\Pi(v_{4,3}) = (1, 0, 2, 1, 1, 1, 1)$ $c_\Pi(v_{4,4}) = (1, 1, 2, 1, 0, 1, 1)$ $c_\Pi(v_{4,5}) = (1, 1, 2, 1, 1, 0, 1)$ $c_\Pi(v_{4,6}) = (1, 1, 2, 1, 1, 1, 0)$
K_6^5	$c_\Pi(v_{5,1}) = (1, 1, 1, 1, 0, 1, 1)$

Nama Subgraf	Kode Warna
	$c_\Pi(v_{5,2}) = (0,1,1,2,1,1,1)$ $c_\Pi(v_{5,3}) = (1,0,1,2,1,1,1)$ $c_\Pi(v_{5,4}) = (1,1,0,2,1,1,1)$ $c_\Pi(v_{5,5}) = (1,1,1,2,1,0,1)$ $c_\Pi(v_{5,6}) = (1,1,1,2,1,1,0)$

Berdasarkan Tabel 2, setiap titik memiliki kode warna yang berbeda dan tidak ada titik yang bertetangga memiliki warna yang sama. Maka, $\chi_L(Amal(K_6,K_5)) \leq 7$. Jadi, $\chi_L(Amal(K_6,K_5)) = 7$. ■

4 Simpulan

Pada penelitian ini, diperoleh hasil bilangan kromatik lokasi graf Amal(K_n, K_m) untuk $m,n \geq 2, m,n \in \mathbb{N}$ yaitu,

$$\chi_L(Amal(K_n,K_m)) = \begin{cases} n+1, untuk\ m \leq n, \\ m, \quad untuk\ m > n. \end{cases}$$

Penelitian ini dapat dikembangkan lagi pada kasus yang lebih rumit lagi, yaitu dengan menambahkan syarat dimana orde masing-masing subgraf K_n^i yang tak seragam.

5 Daftar Pustaka

[1] U. S. R. M. Bondy, J.A., *Graph Theory*. New York, 2008.

[2] P. Z. Gary Chartrand, David Erwin, Michael A. Henning, Peter J. Slater, "The Locating-Chromatic Number of a Graph," *Bull. ICA*, vol. 36, pp. 89–101, 2002.

[3] G. Chartrand, L. Lesniak, and P. Zhang, *Graphs & Digraphs, Sixth Edition*. 2016. [Online]. Available: https://books.google.com/books?hl=nl&lr=&id=K6-FvXRlKsQC&pgis=1

[4] G. Chartrand, D. Erwin, M. A. Henning, P. J. Slater, and P. Zhang, "Graphs of order n with locating-chromatic number n - 1," *Discrete Math.*, vol. 269, no. 1–3, pp. 65–79, 2003, doi: 10.1016/S0012-365X(02)00829-4.

[5] D. Welyyanti, E. T. Baskoro, R. Simanjuntak, and S. Uttunggadewa, "On locating-chromatic number of complete n-ary tree," *AKCE Int. J. Graphs Comb.*, vol. 10, no. 3, pp. 309–315, 2013.

[6] D. Welyyanti, E. T. Baskoro, R. Simanjuntak, and S. Uttunggadewa, "The locating-chromatic number of disconnected graphs," *Far East J. Math. Sci.*, vol. 94, no. 2, pp. 169–182, 2014.

[7] M. Behtoei, A., Anbarloei, “The locating chromatic number of the join of graphs,” *Bull. Iran. Math. Soc.*, vol. 40, no. 6, pp. 1491–1504, 2014.

[8] A. Asmiati, L. Yulianti, and C. I. T. Widyastuti, “Further Results on Locating Chromatic Number for Amalgamation of Stars Linking by One Path,” *Indones. J. Comb.*, vol. 2, no. 1, p. 50, 2018, doi: 10.19184/ijc.2018.2.1.6.

[9] Asmiati, I. K. Sadha Gunce Yana, and L. Yulianti, “On the Locating Chromatic Number of Certain Barbell Graphs,” *Int. J. Math. Math. Sci.*, vol. 2018, pp. 1–6, 2018, doi: 10.1155/2018/5327504.

[10] N. Andriani, “Bilangan Kromatik Lokasi Pada Graf Amalgamasi Kipas Berekor,” *Limits J. Math. Its Appl.*, vol. 20, no. 1, p. 81, 2023, doi: 10.12962/limits.v20i1.12948.

[11] T. Utomo and N. Riskiana Dewi, “Dimensi Metrik Graf Amal(nKm),” *Limits J. Math. Its Appl.*, vol. 15, no. 1, p. 71, 2018, doi: 10.12962/limits.v15i1.3376.

[12] A. W. Bustan, A. N. M. Salman, and P. E. Putri, “On the locating rainbow connection number of amalgamation of complete graphs,” *J. Phys. Conf. Ser.*, vol. 2543, no. 1, pp. 1–6, 2023, doi: 10.1088/1742-6596/2543/1/012004.