Limits: Journal of Mathematics and Its Applications
E-ISSN: 2579-8936
P-ISSN: 1829-605X
Vol. 21, No. 3, Nopember 2024, 347-363
DOI: http://dx.doi.org/10.12962/limits.v21i3.21582

Bilangan Kromatik Lokasi Amalgamasi Graf Theta

Des Welyyanti [1]*, Uthary Putri Angryanof [2], Lyra Yulianti [3]
[1,2,3]Departemen Matematika dan Sains Data, FMIPA, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia
e-mail: wely@sci.unand.ac.id

Diajukan: 22 Agustus 2024, Diperbaiki: 7 Nopember 2024, Diterima: 22 Nopember 2024

Abstrak

Misalkan c adalah suatu pewarnaan titik pada graf G dimana $c(u) \neq c(v)$, untuk u dan v yang bertetangga di G. Kode warna $c_\Pi(v)$ dari v adalah h −pasang terurut $c_\Pi(v) = (d(v, S_1), d(v, S_2), \dots, d(v, S_h))$ dimana $d(v, S_i) = min\{d(v, x) \mid x \in S_i\}$, untuk $1 \leq i \leq h$. Jika setiap titik pada G mempunyai kode warna yang berbeda, maka c disebut pewarnaan lokasi dari G. Banyaknya warna terkecil yang digunakan untuk pewarnaan lokasi disebut bilangan kromatik lokasi dari G dan dan di tulis sebagai $\chi_L(G)$. Tinjauan pustaka yang digunakan dalam penelitian ini adalah bilangan kromatik lokasi untuk graf lintasan dan graf lingkaran, bilangan kromatik lokasi amalgamasi bintang yang dihubungkan oleh sebuah lintasan, bilangan kromatik lokasi kembang api, lalu yang berkaitan dengan graf pada penelitian ini adalah dimensi metrik amalgamasi graf theta. Tujuan pada artikel ini akan dibahas mengenai bilangan kromatik lokasi amalgamasi graf theta.

Penelitian ini dilakukan dengan menentukan batas atas bilangan kromatik lokasi dan batas bawah bilangan kromatik lokasi pada graf $Amal\{2\theta(n)|n \geq 3\}$, $Amal\{3\theta(n)|n \geq 3\}$, dan batas atas bilangan kromatik lokasi $Amal\{m\theta(n)|m \geq 4, n \geq 3\}$,

Hasil dari penelitian ini adalah Pada penelitian ini diperoleh bilangan kromatik graf $Amal\ \{2\theta(n)|n \geq 3\} = 4$ dan $Amal\{3\theta(n)|n \geq 3\} = 5$, serta batas atas bilangan kromatik lokasi $Amal\ \{m\theta(n)|m \geq 4, n \geq 3\} \leq \left\lceil \frac{m+1}{3} \right\rceil + 3$.

Kata Kunci: Bilangan kromatik lokasi, Amalgamasi, Graf theta, Amalgamasi graf theta, Kode Warna.

Abstract

Let c be a vertex coloring of a graph G such that $\boldsymbol{c(u) \neq c(v)}$, for adjacent u and v in G. The color code $\boldsymbol{c_\Pi(v)}$ of v Is an h-ordered pair $\boldsymbol{c_\Pi(v) = (d(v, S_1), d(v, S_2), \dots, d(v, S_h))}$ where $\boldsymbol{d(v, S_i) = min\{d(v, x) \mid x \in S_i\}}$, for $\boldsymbol{1 \leq i \leq h}$. If each vertex in G has a different color code, then c is called a location coloring of G. The smallest number of colors used for a location coloring is called the location chromatic number of G and is written as $\boldsymbol{\chi_L(G)}$. The literature review used in this study is the location chromatic number for path graphs and circle graphs, the location chromatic number of star amalgamation connected by a path, the location chromatic number of fireworks, then related to the graph in this study is the metric dimension of theta graph amalgamation. The purpose of this article will be discussed regarding the location chromatic number of theta graph amalgamation.

This research was conducted by determining the upper limit of the location chromatic number and the lower limit of the location chromatic number in the graphs $\boldsymbol{Amal\{2\theta(n)|n \geq 3\}}$, $\boldsymbol{Amal\{3\theta(n)|n \geq 3\}}$, and the upper limit of the location chromatic number $\boldsymbol{Amal\{m\theta(n)|m \geq 4, n \geq 3\}}$.

The results of this study are In this study, the chromatic number of the graph is obtained $\boldsymbol{Amal\ \{2\theta(n)|n \geq 3\} = 4}$ dan $\boldsymbol{Amal\{3\theta(n)|n \geq 3\} = 5}$, and the upper limit of the chromatic number of the $\boldsymbol{Amal\ \{m\theta(n)|m \geq 4, n \geq 3\} \leq \left\lceil \frac{m+1}{3} \right\rceil + 3}$.

Keywords: *Location chromatic number, Amalgamation, Theta graph, Amalgamation of theta graph, Color Code.*

1 Pendahuluan

Bilangan kromatik lokasi diperkenalkan oleh Chartrand dkk.[1] dari pengembangan dua konsep graf, yaitu pewarnaan titik dan dimensi partisi pada graf. Pewarnaan titik pada suatu graf adalah memberikan warna ke semua titik dalam sebuah graf. Setiap titik yang berdekatan harus memiliki warna yang berbeda. Banyaknya warna terkecil yang digunakan dalam mewarnai graf disebut bilangan kromatik yang ditulis dengan $\chi(G)$. Misalkan $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_h\}$, S_i merupakan himpunan titik yang diberi warna i, untuk $1 \leq i \leq h$, merupakan partisi dari himpunan titik $V(G)$ oleh pewarnaan c. Kode warna $c_\Pi(v)$ dari titik v adalah h-pasang terurut $\big(d(v, S_1), d(v, S_2), \dots, d(v, S_h)\big)$ dengan $d(v, S_i) = \min\{d(v, x) \mid x \in S_i\}$ untuk $1 \leq i \leq h$ dimana $d(v, x)$ adalah jarak antara dua titik v dan x. Jika semua titik pada graf G mempunyai kode warna yang berbeda, maka c disebut pewarnaan pada graf G. Nilai minimum h sedemikian sehingga G memiliki pewarnaan lokasi dengan h warna, maka disebut dengan bilangan kromatik lokasi dari G dan dituliskan dengan $\chi_L(G)$. Pada tahun 2002 Chartrand dkk. [1] telah menemukan bilangan kromatik lokasi dari berbagai kelas graf, yaitu graf lintasan (P_n) dengan $n \geq 3$ diperoleh $\chi_L(P_n) = 3$ dan graf lingkaran (C_n) diperoleh $\chi_L(C_n) = 3$ dengan n ganjil dan $\chi_L(C_n) = 4$ dengan n genap. Selanjutnya, Chartrand dkk.[2] juga menemukan bahwa graf multipartit lengkap adalah satu satunya graf orde n yang memiliki bilangan kromatik Lokasi sebanyak n , untuk $n \geq 3$. Asmiati dkk.[3] mengkaji bilangan kromatik lokasi dari amalgamasi graf bintang pada tahun 2011. Selanjutnya, Asmiati dkk.[4] telah menentukan bilangan kromatik lokasi amalgamasi bintang yang dihubungkan oleh suatu lintasan. Asmiati dkk.[5] pada tahun 2012 mengkaji bilangan kromatik Lokasi dari graf kembang api. Lalu, Asmiati dan Baskoro [6] berhasil mengelompokkan seluruh graf yang memuat siklus berbilangan kromatik lokasi tiga. Welyyanti dkk.[7] mengembangkan arti bilangan kromatik lokasi suatu graf, sehingga dapat digunakankan pada setiap jenis graf termasuk graf tak terhubung. Selanjutnya, A. Behtoei dan M. Anbarloei.[8] berhasil mendapatkan bilangan kromatik lokasi dari gabungan dua graf sembarang. Pada tahun 2015 Welyyanti dkk.[9] mengkaji bilangan kromatik lokasi untuk graf dengan titik dominan. Selanjutnya, pada tahun 2017 Welyyanti dkk.[10] menentukan bilangan kromatik lokasi dari suatu graf dengan dua komponen yang homogen, dimana setiap komponennya memiliki bilangan kromatik Lokasi tiga. Pada tahun 2021, Prawinasti dkk.[11] telah berhasil menentukan bilangan kromatik lokasi split graf cycle untuk $n \geq 3$. Putri dkk.[12] mempelajari bilangan kromatik lokasi beberapa graf tipe Buckminsterfullerene. Pada tahun 2023, Welyyanti dkk.[13] memperoleh bilangan kromatik lokasi hasil penggabungan graf ekor kipas. Lalu, Lessya dkk.[14] pada tahun 2023, mempelajari bilangan kromatik lokasi grafik Helm.

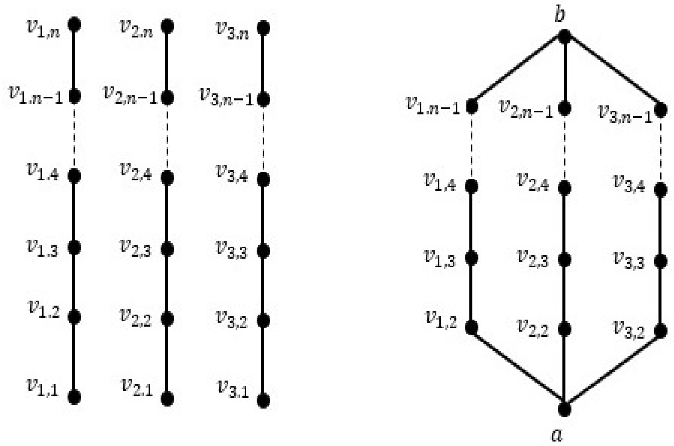
Amalgamasi graf adalah suatu operasi pada graf. Misalkan $\{G_1, G_2, \dots, G_t\}$ untuk $i \in \{1,2,..,t\}$, $t \geq 2$ merupakan kumpulan graf dari graf terhubung tak trivial dan $v_{0,i}$ adalah sebuah titik dari graf G_i yang diberi nama titik terminal. Graf amalgamasi yang dinotasikan dengan $Amal\{G_i, v_{0,i}\}$ adalah suatu graf yang berasal dari graf $G_1, G_{2,} \dots, G_t$ dengan cara mengidentifikasikan titik-titik terminal dari $\{G_1, G_2, \dots, G_t\}$ tersebut sedemikian sehingga $v_{0,1} = v_{0,2} = \cdots = v_{0,t}$. [15]

Misalkan terdapat tiga graf lintasan dengan n titik, untuk $n \geq 3$, dinotasikan P_n^1, P_n^2, dan P_n^3, himpunan titik dan himpunan sisi sebagai berikut.

$$V(P_n^h) = \{v_{h,i} | 1 \leq h \leq 3, 1 \leq i \leq n\},$$

$$E(P_n^h) = \{v_{h,r} v_{h,(r+1)} | 1 \leq h \leq 3, 1 \leq r \leq n-1\}.$$

Graf theta dinotasikan dengan $\theta(n)$ untuk $n \geq 3$, merupakan graf yang dibentuk dengan melakukan operasi amalgamasi titik terhadap titik-titik $v_{h,1}$ dengan $1 \leq h \leq 3$ menjadi suatu titik yang baru, yang disebut dengan titik a. Selanjutnya, operasi amalgamasi titik terhadap titik-titik $v_{h,n}$, untuk $1 \leq h \leq 3$ menjadi suatu titik yang baru, disebut titik b. Ilustrasikan graf P_n^1, P_n^2, P_n^3 dan $\theta(n)$ diberikan pada Gambar 1.



Gambar 1. Graf P_n^1, P_n^2, P_n^3 dan $\theta(n)$

Himpunan titik dan himpunan sisi pada graf theta sebagai berikut.

$$V(\theta(n)) = \{a, b\} \cup \{v_{h,1} | 1 \leq h \leq 3, 2 \leq l \leq n-1\},$$

$$E(\theta(n)) = \{v_{h,p} v_{h,(p+1)} | 1 \leq h \leq 3, 2 \leq p \leq n-2\} \cup \{av_{z,2} | 1 \leq z \leq 3\}$$
$$\cup \{bv_{h,n-1} | 1 \leq h \leq 3, n \geq 3\}.$$

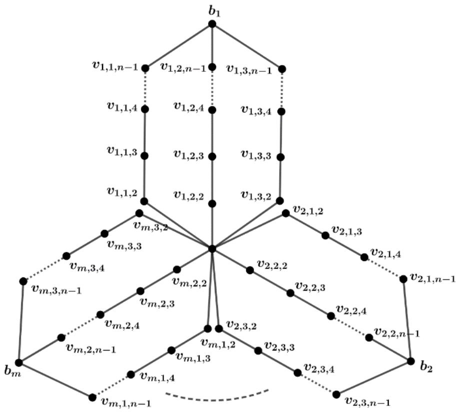
Diberikan m buah graf theta dengan n titik, untuk $m \geq 2$ dan $n \geq 3$. Identifikasi titik a_j, untuk $1 \leq r \leq m$, menjadi titik baru, dinamakan titik c. Selanjutnya akan dilakukan operasi amalgamasi terhadap m buah graf theta, dinotasikan dengan $H = Amal\{m\theta(n) | \mathrm{m} \geq 2, \mathrm{n} \geq 3\}$. Himpunan titik dan sisi pada graf H adalah sebagai berikut. [15]

$$V(H) = \{c, b_r\} \cup \left\{v_{r,h,l}\middle|, 1 \leq h \leq 3, 2 \leq 1 \leq n-1, \right\},$$

$$E(H) = \left\{v_{r,h,p}v_{r,h,(p+1)}\middle|\ 1 \leq h \leq 3, 2 \leq p \leq n-2\right\}$$

$$\cup \left\{cv_{r,h,2}\middle|\ 1 \leq h \leq 3\right\} \cup \left\{b_r v_{r,h,n-1}\middle|\ 1 \leq h \leq 3, n \geq 3\right\}.$$

Graf $H = Amal\{m\theta(n)|\mathrm{m} \geq 2, \mathrm{n} \geq 3\}$ dapat dilihat pada Gambar 2.



Gambar 2. Graf $H = Amal\{m\theta(n)|\mathrm{m} \geq 2, \mathrm{n} \geq 3\}$

2 Metode Penelitian

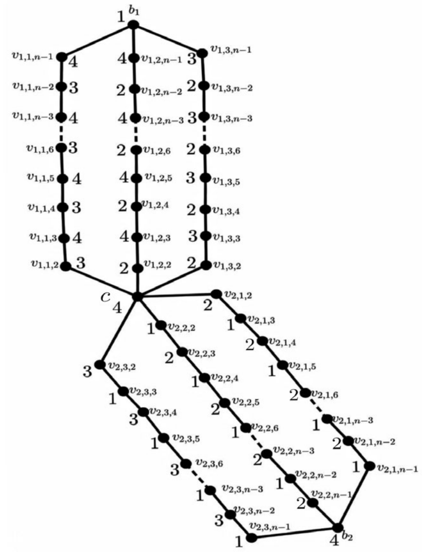
Dalam penelitian ini, kami mengumpulkan beberapa jurnal dan buku sebagai literatur yang akan digunakan dalam mencari batas atas bilangan kromatik lokasi pada graf diperoleh dengan mengkonstruksi himpunan partisi $\boldsymbol{\Pi}$ untuk beberapa bilangan bulat positif $\boldsymbol{h}$ sedemikian sehingga setiap titik-titik pada graf mempunyai kode warna yang berbeda-beda, dinotasikan sebagai $\boldsymbol{\chi_L}(\boldsymbol{G}) \leq \boldsymbol{k}$. Dan mencari batas bawah bilangan kromatik lokasi pada graf, menunjukkan setiap kemungkinan dari $\boldsymbol{\Pi}'$ dengan $|\boldsymbol{\Pi}'| < \boldsymbol{k}$ terdapat setidaknya dua titik yang mempunyai kode warna yang sama, dinotasikan sebagai $\boldsymbol{\chi_L}(\boldsymbol{G}) \geq \boldsymbol{k}$.

3 Hasil dan Pembahasan

Pada Teorema 1 akan dibahas tentang penentuan bilangan kromatik lokasi amalgamasi graf theta $Amal\{2\theta(n)|\mathrm{n} \geq 3\}$.

Teorema 1. *Misalkan graf* $Amal\{2\theta(n)|n \geq 3\}$, *maka* $\chi_L(Amal\{2\theta(n)|n \geq 3\}) = 4$

Bukti. Misalkan terdapat graf $Amal\{2\theta(n)|n \geq 3\}$ yang merupakan graf amalgamasi dari dua buah graf theta. Maka, akan dibuktikan $\chi_L(Amal\{2\theta(n)|n \geq 3\}) = 4$.



Gambar 3. Pewarnaan Titik Graf $Amal\{2\theta(n)|\text{n} \geq 3\}$.

Misalkan $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$, $i = 2,4, \ldots, n-2+\big(n(mod 2)\big)$ dan $j = 3,5, \ldots, n-2+((n+1)(mod\ 2))$, sedemikian sehingga

$S_1 = \{b_1\} \cup \{v_{2,1,j}, v_{2,3,j} \mid j = 3,5, \ldots, n-2+\big(n+1(mod\ 2)\big)\} \cup \{v_{2,2,i} | i = 2,4, \ldots, n-2+\big(n(mod2)\big)\}$

$S_2 = \{v_{1,2,i} v_{1,3,i}, v_{2,1,i} | i = 2,4, \ldots, n-2+\big(n(mod2)\big)\} \cup \{v_{2,1,j} \mid j = 3,5, \ldots, n-2+\big(n+1(mod\ 2)\big)$

$S_3 = \{v_{1,1,i} v_{2,3,i} | i = 2,4, \ldots, n-2+\big(n(mod2)\big)\} \cup \{v_{1,3,j} \mid j = 3,5, \ldots, n-2+\}$,

$S_4 = \{a, b_2\} \cup \{v_{1,1,j}, v_{1,2,j} | j = 3,5, \ldots, n-2+\big(n+1(mod\ 2)\big)\}$.

Selanjutnya, kode warna setiap titik di graf $Amal\{2\theta(n)|n \geq 3\}$ dapat dilihat pada Tabel 1

Tabel 1. Kode Warna Titik Graf $Amal\{2\theta(n)|\text{n} \geq 3\}$.

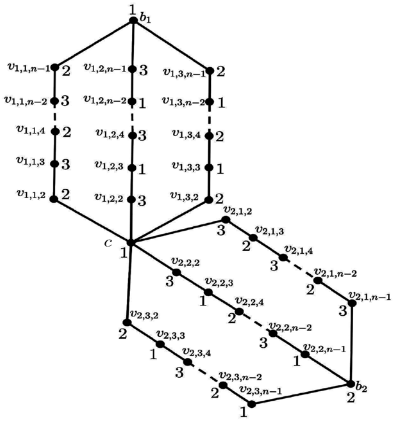
Titik	Kode Warna	Syarat
c	(1, 1, 1, 0)	
b1	(0, 1, 2, 1)	
b2	(1, 1, 2, 0)	
$v_{1,1,k}$	(k, k, 0, 1)	$k < \frac{n}{2}, genap$
$v_{1,1,k}$	(k, k, 1, 0)	$k < \frac{n}{2}, ganjil$
$v_{1,1,k}$	(n − k, n − k + 1 + (k + 1 (mod 2)), 0, 1)	$k > \frac{n}{2}, genap$
$v_{1,1,k}$	(n − k, n − k + 1 + (k + 1 (mod 2)), 1, 0)	$k > \frac{n}{2}, ganjil$
$v_{1,2,k}$	(k, 0, k, 1)	$k < \frac{n}{2}, genap$
$v_{1,2,k}$	(k, 1, k, 0)	$k < \frac{n}{2}, ganjil$
$v_{1,2,k}$	(n − k, 0, n − k + 1 + (k + 1 (mod 2)), 1)	$k > \frac{n}{2}, genap$

Titik	Kode Warna	Syarat
$v_{1,2,k}$	$(n-k, 1, n-k+1+(k+1 \text{ (mod 2)}), 0)$	$k > \frac{n}{2}, ganjil$
$v_{1,3,k}$	$(k, 0, 1, k-1)$	$k < \frac{n}{2}, genap$
$v_{1,3,k}$	$(k, 1, 0, k-1)$	$k < \frac{n}{2}, ganjil$
$v_{1,3,k}$	$(n-k, 0, 1, n-k+1+(k \text{ (mod 2)}))$	$k > \frac{n}{2}, genap$
$v_{1,3,k}$	$(n-k, 1, 0, n-k+1+(k \text{ (mod 2)}))$	$k > \frac{n}{2}, ganjil$
$v_{2,1,k}$	$(1, 0, k, k-1)$	$k < \frac{n}{2}, genap$
$v_{2,1,k}$	$(0, 1, k, k-1)$	$k < \frac{n}{2}, ganjil$
$v_{2,1,k}$	$(1, 0, n-k+1(k+1 \text{ (mod 2)}), n-k)$	$k > \frac{n}{2}, genap$
$v_{2,1,k}$	$(0, 1, n-k+1(k+1 \text{ (mod 2)}), n-k)$	$k > \frac{n}{2}, ganjil$
$v_{2,2,k}$	$(0, 1, k, k-1)$	$k < \frac{n}{2}, genap$
$v_{2,2,k}$	$(1, 0, k, k-1)$	$k < \frac{n}{2}, ganjil$
$v_{2,2,k}$	$(0, 1, n-k+1(k+1 \text{ (mod 2)}), n-k)$	$k > \frac{n}{2}, genap$
$v_{2,2,k}$	$(1, 0, n-k+1(k+1 \text{ (mod 2)}), n-k)$	$k > \frac{n}{2}, ganjil$
$v_{2,3,k}$	$(1, k, 0, k-1)$	$k < \frac{n}{2}, genap$
$v_{2,3,k}$	$(0, k, 1, k-1)$	$k < \frac{n}{2}, ganjil$
$v_{2,3,k}$	$(1, n-k+1(k+1 \text{ (mod 2)}), 0, n-k)$	$k > \frac{n}{2}, genap$
$v_{2,3,k}$	$(0, n-k+1(k+1 \text{ (mod 2)}), 1, n-k)$	$k > \frac{n}{2}, ganjil$

Berdasarkan Tabel 3 dapat dilihat bahwa setiap titik memiliki kode warna yang berbeda. Jadi, $\chi_L(Amal\{2\theta(n)|n \geq 3\}) \leq 4$.

Selanjutnya, akan ditentukan batas bawah bilangan kromatik lokasi graf $Amal\{2\theta(n)|n \geq 3\}$. Andaikan $\chi_L(Amal\{2\theta(n)|n \geq 3\}) = 3$, maka terdapat dua kasus sebagai berikut.

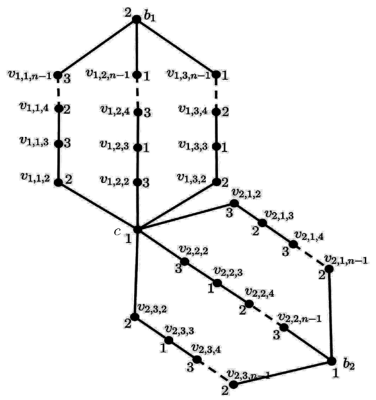
Kasus 1. n ganjil



Gambar 4. Pewarnaan Titik Graf $Amal\{2\theta(n)|n \geq 3\}$ untuk *n* ganjil

Andaikan graf $Amal\{2\theta(n)|\text{n} \geq 3\}$ mempunyai 3-pewarnaan lokasi. Tanpa mengurangi perumuman, misalkan graf $Amal\{2\theta(n)|\text{n} \geq 3\}$ mempunyai 3-pewarnaan lokasi seperti pada Gambar 4, akibatnya, graf $Amal\{2\theta(n)|\text{n} \geq 3\}$ akan mempunyai minimal dua titik yang memiliki kode warna yang sama yaitu $a, b_1 \in V(Amal\{2\theta(n)|n \geq 3\})$ dengan $c_{\Pi}(a) = c_{\Pi}(b_1) = (0,1,1)$.

Kasus 2. n genap



Gambar 5. Pewarnaan Titik Graf $Amal\{2\theta(n)|\text{n} \geq 3\}$ untuk *n* genap

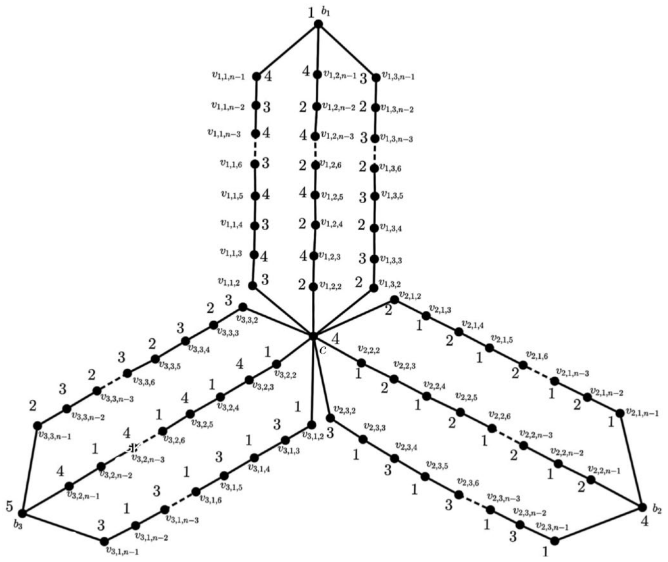
Andaikan graf $Amal\{2\theta(n)|\text{n} \geq 3\}$ mempunyai 3-pewarnaan lokasi. Tanpa mengurangi perumuman, misalkan graf $Amal\{2\theta(n)|\text{n} \geq 3\}$ mempunyai 3-pewarnaan lokasi seperti pada Gambar 5, akibatnya, graf $Amal\{2\theta(n)|\text{n} \geq 3\}$ akan mempunyai minimal dua titik yang memiliki kode warna yang sama yaitu $b_1, v_{1,3,2} \in V(Amal\{2\theta(n)|\text{n} \geq 3\})$ dengan $c_{\Pi}(b_1) = c_{\Pi}(v_{1,3,2}) = (1,0,1)$.

Akibatnya, berdasarkan kasus 1 dan kasus 2. Maka haruslah $\chi_L(Amal\{2\theta(n)|\text{n} \geq 3\}) \geq 4$. Maka $\chi_L(Amal\{2\theta(n)|\text{n} \geq 3\}) = 4$

Selanjutnya, teorema 2 akan dibahas bilangan kromatik lokasi untuk graf $Amal\{3\theta(n)|n \geq 3\}$.

Teorema 2. *Misalkan terdapat graf* $Amal\{3\theta(n)|n \geq 3\}$, *maka* $\chi_L(Amal\{3\theta(n)|n \geq 3\}) = 5$.

Bukti. Misalkan graf $Amal\{3\theta(n)|n \geq 3\}$ adalah graf amalgamasi tiga buah graf theta. Akan dibuktikan $\chi_L(Amal\{3\theta(n)|n \geq 3\}) = 5$.



Gambar 6. Pewarnaan Titik Graf $Amal\{3\theta(n)|n \geq 3\}$

Misalkan $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\}$, $i = 2,4,\dots,n-2+\big(n(mod 2)\big)$ dan $j = 3,5,\dots,n-2+((n+1)(mod\ 2))$, sedemikian sehingga

$S_1 = \{b_1\} \cup \{v_{2,1,j}, v_{2,3,j}, v_{3,1,j} \mid j = 3,5,\dots,n-2+\big(n+1(mod\ 2)\big)\} \cup \{v_{2,2,i}, v_{3,2,i}|$
$i = 2,4,\dots,n-2+\big(n(mod\ 2)\big)\}$,

$S_2 = \{v_{1,2,i}v_{1,3,i}, v_{2,1,i}|i = 2,4,\dots,n-2+\big(n(mod\ 2)\big)\} \cup \{v_{2,2,j}, v_{3,3,j} \mid j = 3,5,\dots,$
$n-2+((n+1)(mod\ 2))\}$,

$S_3 = \{v_{1,2,i}v_{2,3,i}|i = 2,4,\dots,n-2+\big(n(mod\ 2)\big)\} \cup \{v_{1,3,j}, v_{3,1,j}v_{3,3,j} \mid j = 3,5,\dots,$
$n-2+((n+1)(mod 2))\}$,

$S_4 = \{c, b_2\} \cup \{v_{1,1,j}, v_{1,2,j}, v_{3,2,j}|j = 3,5,\dots,n-2+\big((n+1)(mod\ 2)\big)$,

$S_5 = \{b_3\}$.

Selanjutnya setiap titik di graf $Amal\{3\theta(n)|n \geq 3\}$ memiliki kode warna yang berbeda terhadap Π yang disajikan dalam tabel berikut :

Tabel 2. Kode Warna Titik Graf $Amal\{3\theta(n)|n \geq 3\}$

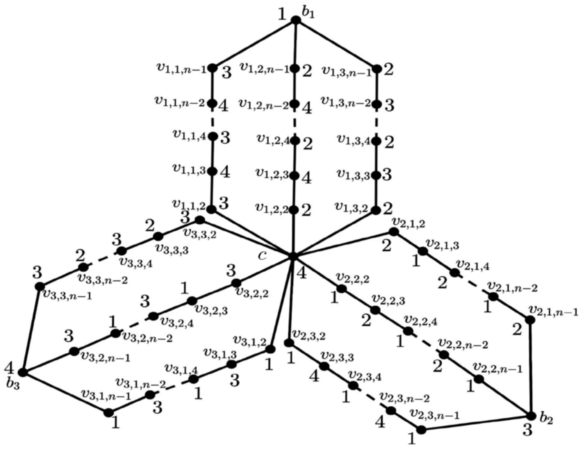
Titik	Kode Warna	Syarat
c	$(1, 1, 1, 0, n-1)$	
b_1	$(0, 1, 2, 1, 2(n-1)$	
b_2	$(1, 1, 2, 0, 2(n-1)$	
b_3	$(2, 1, 1, 1, 0)$	
$v_{1,1,k}$	$(k, k, 0, 1, n+k-2)$	$k < \frac{n}{2}$, genap
$v_{1,1,k}$	$(k, k, 1, 0, n+k-2)$	$k < \frac{n}{2}$, ganjil

Titik	Kode Warna	Syarat
$v_{1,1,k}$	$(n-k, n-k+1+((k+1)\ (\mathrm{mod}\ 2)), 0, 1, n+k-2)$	$k > \frac{n}{2}$, genap
$v_{1,1,k}$	$(n-k, n-k+1+((k+1)\ (\mathrm{mod}\ 2)), 1, 0, n+k-2)$	$k > \frac{n}{2}$, ganjil
$v_{1,2,k}$	$(k, 0, k, 1, n+k-2)$	$k < \frac{n}{2}$, genap
$v_{1,2,k}$	$(k, 1, k, 0, n+k-2)$	$k < \frac{n}{2}$, ganjil
$v_{1,2,k}$	$(n-k, 0, n-k+1+(k+1\ (\mathrm{mod}\ 2)), 1, n+k-2)$	$k > \frac{n}{2}$, genap
$v_{1,2,k}$	$(n-k, 1, n-k+1+((k+1)\ (\mathrm{mod}\ 2)), 0, n+k-2)$	$k > \frac{n}{2}$, ganjil
$v_{1,3,k}$	$(k, 0, 1, k-1, n+k-2)$	$k < \frac{n}{2}$, genap
$v_{1,3,k}$	$(k, 1, 0, k-1, n+k-2)$	$k < \frac{n}{2}$, ganjil
$v_{1,3,k}$	$(n-k, 0, 1, n-k+1+(k\ (\mathrm{mod}\ 2)), n+k-2)$	$k > \frac{n}{2}$, genap
$v_{1,3,k}$	$(n-k, 1, 0, n-k+1+(k\ (\mathrm{mod}\ 2)), n+k-2)$	$k > \frac{n}{2}$, ganjil
$v_{2,1,k}$	$(1, 0, k, k-1, n+k-2)$	$k < \frac{n}{2}$, genap
$v_{2,1,k}$	$(0, 1, k, k-1, n+k-2)$	$k < \frac{n}{2}$, ganjil
$v_{2,1,k}$	$(1, 0, n-k+1((k+1)\ (\mathrm{mod}\ 2)), n-k, n+k-2)$	$k > \frac{n}{2}$, genap
$v_{2,1,k}$	$(0, 1, n-k+1((k+1)\ (\mathrm{mod}\ 2)), n-k, n+k-2)$	$k > \frac{n}{2}$, ganjil
$v_{2,2,k}$	$(0, 1, k, k-1, n+k-2)$	$k < \frac{n}{2}$, genap
$v_{2,2,k}$	$(1, 0, k, k-1, n+k-2)$	$k < \frac{n}{2}$, ganjil
$v_{2,2,k}$	$(0, 1, n-k+1((k+1)\ (\mathrm{mod}\ 2)), n-k, n+k-2)$	$k > \frac{n}{2}$, genap
$v_{2,2,k}$	$(1, 0, n-k+1(k+1\ (\mathrm{mod}\ 2)), n-k, n+k-2)$	$k > \frac{n}{2}$, ganjil
$v_{2,3,k}$	$(1, k, 0, k-1, n+k-2)$	$k < \frac{n}{2}$, genap
$v_{2,3,k}$	$(0, k, 1, k-1, n+k-2)$	$k < \frac{n}{2}$, ganjil
$v_{2,3,k}$	$(1, n-k+1((k+1)\ (\mathrm{mod}\ 2)), 0, n-k, n+k-2)$	$k > \frac{n}{2}$, genap
$v_{2,3,k}$	$(0, n-k+1((k+1)\ (\mathrm{mod}\ 2)), 1, n-k, n+k-2)$	$k > \frac{n}{2}$, ganjil
$v_{3,1,k}$	$(0, k, 1, k-1, n-k)$	$k < \frac{n}{2}$, genap
$v_{3,1,k}$	$(1, k, 0, k-1, n-k)$	$k < \frac{n}{2}$, ganjil
$v_{3,1,k}$	$(0, n-k+1(k\ (\mathrm{mod}\ 2)), 1, n-k+1(k\ (\mathrm{mod}\ 2)), n-k)$	$k > \frac{n}{2}$, genap
$v_{3,1,k}$	$(1, n-k+1(k\ (\mathrm{mod}\ 2)), 0, n-k+1(k\ (\mathrm{mod}\ 2)), n-k)$	$k > \frac{n}{2}$, ganjil
$v_{3,2,k}$	$(0, k, k, 1, n-k)$	$k < \frac{n}{2}$, genap
$v_{3,2,k}$	$(1, k, k, 0, n-k)$	$k < \frac{n}{2}$, ganjil
$v_{3,2,k}$	$(0, n-k+1(k\ (\mathrm{mod}\ 2)), n-k+1(k\ (\mathrm{mod}\ 2)), 1, n-k)$	$k > \frac{n}{2}$, genap
$v_{3,2,k}$	$(1, n-k+1(k\ (\mathrm{mod}\ 2)), n-k+1(k\ (\mathrm{mod}\ 2)), 0, n-k)$	$k > \frac{n}{2}$, ganjil
$v_{3,3,k}$	$(k, 1, 0, k-1, n-k)$	$k < \frac{n}{2}$, genap
$v_{3,3,k}$	$(k, 0, 1, k-1, n-k)$	$k < \frac{n}{2}$, ganjil
$v_{3,3,k}$	$(n-k+1(k\ (\mathrm{mod}\ 2)), 1, 0, n-k+1(k\ (\mathrm{mod}\ 2)), n-k)$	$k > \frac{n}{2}$, genap
$v_{3,3,k}$	$(n-k+1(k\ (\mathrm{mod}\ 2)), 0, 1, n-k+1(k\ (\mathrm{mod}\ 2)), n-k)$	$k > \frac{n}{2}$, ganjil

Berdasarkan Tabel 2, dapat dilihat bahwa setiap titik memiliki kode warna yang berbeda. Jadi, $\chi_L(Amal\{3\theta(n)|n \geq 3\}) \leq 5$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $\chi_L(Amal\{3\theta(n)|n \geq 3\}) \geq 5$. Andaikan $\chi_L(Amal\{3\theta(n)|n \geq 3\}) = 4$, akan ditunjukkan $\chi_L(Amal\{3\theta(n)|n \geq 3\}) = 4$ terdapat dua titik yamg memiliki kode warna yang sama. Akan dijelaskan dalam kasus sebagai berikut.

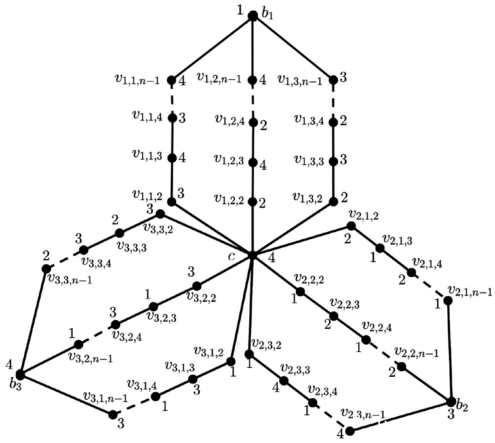
Kasus 1. n ganjil



Gambar 7. Pewarnaan Titik Graf $Amal\{3\theta(n)|\mathrm{n} \geq 3\}$ untuk *n* ganjil

Andaikan graf $Amal\{3\theta(n)|\mathrm{n} \geq 3\}$ mempunyai 4-pewarnaan lokasi. Tanpa mengurangi perumuman, misalkan graf $Amal\{3\theta(n)|\mathrm{n} \geq 3\}$ mempunyai 3-pewarnaan lokasi seperti pada Gambar 7, akibatnya, graf $Amal\{3\theta(n)|\mathrm{n} \geq 3\}$akan mempunyai minimal dua titik yang memiliki kode warna yang samayaitu $v_{1,2,n-1}, v_{2,1,2} \in V(Amal\{3\theta(n)|\mathrm{n} \geq 3\})$ dengan $c_\Pi(v_{1,2,n-1}) = c_\Pi(v_{2,1,2}) = (1,0,2,1)$.

Kasus 2. n genap



Gambar 8. Pewarnaan Titik Graf $Amal\{3\theta(n)|\mathrm{n} \geq 3\}$ untuk *n* genap

Andaikan $Amal\{3\theta(n)|\mathrm{n} \geq 3\}$ mempunyai 4-pewarnaan lokasi. Tanpa mengurangi perumuman, misalkan graf $Amal\{3\theta(n)|\mathrm{n} \geq 3\}$ mempunyai 3-pewarnaan lokasi seperti pada

Gambar 8, Akibatnya, graf $Amal\{3\theta(n)|\text{n} \geq 3\}$akan mempunyai minimal dua titik yang memiliki kode warna yang sama yaitu $a, b_3 \in V(Amal\{3\theta(n)|\text{n} \geq 3\})$ dengan $c_{\Pi}(a) = c_{\Pi}(b_3) = (1{,}1{,}1{,}0)$.

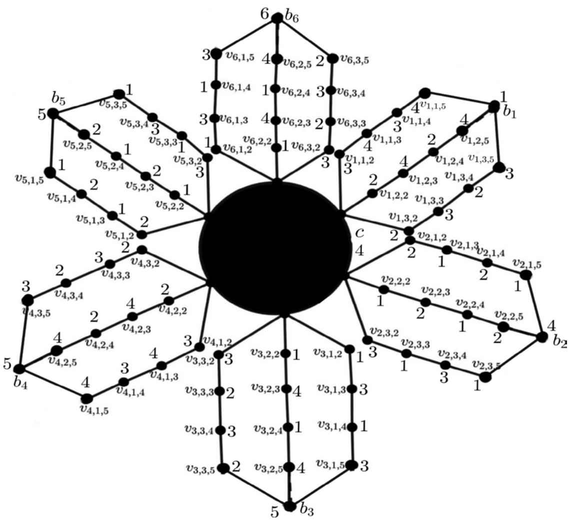
Jadi, berdasarkan Kasus 1 dan Kasus 2 haruslah $\chi_L(Amal\{3\theta(n)|\text{n} \geq 3\}) \geq 5$. Maka, $\chi_L(Amal\{3\theta(n)|\text{n} \geq 3\}) = 5$.

Teorema 3 memunjukkan batas atas bilangan kromatik lokasi graf $Amal\{m\theta(n)|\text{m} \geq 4, \text{n} \geq 3\}$.

Teorema 3. *Misalkan terdapat graf* $Amal\{m\theta(n)|m \geq 4, n \geq 3\}$, *maka* $\chi_L(Amal\{m\theta(n)|m \geq 4, n \geq 3\}) \leq \left\lceil \frac{m+1}{3} \right\rceil + 3$.

Bukti. Akan dibuktikan bilangan kromatik lokasi graf $Amal\{m\theta(n)|m \geq 4, n \geq 3\}$, dengan menunjukkan bahwa $\chi_L(Amal\{m\theta(n)|m \geq 4, n \geq 3\}) \leq \left\lceil \frac{m+1}{3} \right\rceil + 3$.

Berikut diberikan contoh dalam menentukan batas atas bilangan kro- matik lokasi amalgamasi graf theta. Misalkan terdapat graf $Amal\{6\Theta(6)\}$. De- ngan menggunakan Teorema 3. dapat diketahui bahwa $\chi_L(Amal\{6\Theta(6)\}) \leq 6$. Pewarnaan lokasi graf $Amal\{6\Theta(6)\}$ dapat dilihat pada Gambar 9.



Gambar 9. Pewarnaan Titik Graf $Amal\{6\Theta(6)\}$

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa setiap titik di graf $Amal\{6\Theta(6)\}$ memiliki kode warna yang berbeda terhadap Π. Definisikan $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6\}$, dengan

$S_1 = \{b_{1,2,1,3}, v_{2,1,5}, v_{2,2,2}, v_{2,2,4}, v_{2,3,3}, v_{2,3,5}, v_{3,1,2}, v_{3,1,4}, v_{3,2,2}, v_{3,2,4}, v_{5,1,3}, v_{5,1,5}, v_{5,2,2}, v_{5,2,4}, v_{5,3,3}, v_{5,3,5}\}$,

$S_2 = \{v_{1,2,2}, v_{1,2,4}, v_{1,3,2}, v_{1,3,4}, v_{2,1,2}, v_{2,1,4}, v_{2,2,3}, v_{2,2,5}, v_{4,1,2}, v_{4,1,4}, v_{4,2,2}, v_{4,2,4}, v_{5,2,3}, v_{5,3,5}\}$,

$S_3 = \{v_{1,1,2}, v_{1,1,4}, v_{1,3,3}, v_{2,3,2}, v_{2,3,4}, v_{3,1,3}, v_{3,1,5}, v_{3,3,2}, v_{3,3,4}, v_{4,1,3}, v_{4,1,5}, v_{4,3,2}, v_{4,3,4}, v_{5,3,2}, v_{5,3,4}, v_{6,1,3}, v_{6,1,5}, v_{6,3,2}, v_{6,3,4}\}$,

$S_4 = \{c, b_2, v_{1,1,3}, v_{1,1,5}, v_{1,2,3}, v_{1,2,5}, v_{3,2,3}, v_{3,2,5}, v_{3,3,3}, v_{3,3,5}, v_{4,2,3}, v_{4,2,5}, v_{4,3,3}, v_{4,3,5}, v_{6,2,3}, v_{6,2,5}, v_{6,3,3}, v_{6,3,5}\}$,

$S_5 = \{b_3, b_4, b_5\}$,

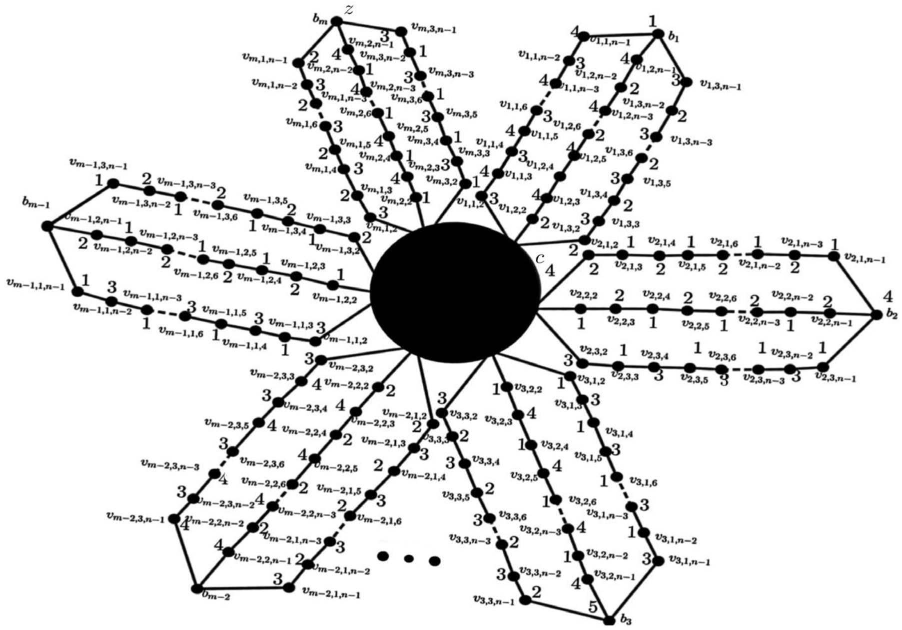
$S_6 = \{b_6\}$.

Diperoleh kode warna setiap titik di graf $Amal\{6\Theta(6)\}$ terhadap $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, S_4\ S_5, S_6\}$ sebagai berikut:

Tabel 3. Kode Warna Titik Graf $Amal\{6\Theta(6)\}$

Titik	Kode Warna	Titik	Kode Warna	Titik	Kode Warna
c	(1, 1, 1, 0, 5, 5)	$v_{2,3,2}$	(1, 2, 0, 1, 6, 6)	$v_{4,3,5}$	(5, 1, 0, 2, 1, 9)
$b1$	(0, 2, 1, 1, 10, 10)	$v_{2,3,3}$	(0, 3, 1, 2, 7, 7)	$v_{5,1,2}$	(1, 0, 2, 1, 4, 6)
$b2$	(1, 1, 2, 0, 10, 10)	$v_{2,3,4}$	(1, 3, 0, 2, 8, 8)	$v_{5,1,3}$	(0, 1, 3, 2, 3, 7)
$b3$	(2, 1, 1, 1, 0, 10)	$v_{2,3,5}$	(0, 2, 1, 1, 9, 9)	$v_{5,1,4}$	(1, 0, 4, 3, 2, 8)
$b4$	(6, 2, 2, 1, 0, 10)	$v_{3,1,2}$	(0, 2, 1, 1, 4, 6)	$v_{5,1,5}$	(0, 1, 3, 4, 1, 9)
$b5$	(1, 1, 2, 6, 0, 10)	$v_{3,1,3}$	(1, 3, 0, 2, 3, 7)	$v_{5,2,2}$	(0, 1, 2, 1, 4, 6)
$b6$	(2, 1, 1, 1, 10, 0)	$v_{3,1,4}$	(0, 3, 1, 3, 2, 8)	$v_{5,2,3}$	(1, 0, 3, 2, 3, 7)
$v_{1,1,2}$	(2, 2, 0, 1, 6, 6)	$v_{3,1,5}$	(1, 2, 0, 2, 1, 9)	$v_{5,2,4}$	(0, 1, 4, 3, 2, 8)
$v_{1,1,3}$	(3, 3, 1, 0, 7, 7)	$v_{3,2,2}$	(0, 2, 2, 1, 4, 6)	$v_{5,2,5}$	(1, 0, 3, 4, 1, 9)
$v_{1,1,4}$	(2, 4, 0, 1, 8, 8)	$v_{3,2,3}$	(1, 3, 3, 0, 3, 7)	$v_{5,3,2}$	(1, 2, 0, 1, 4, 6)
$v_{1,1,5}$	(1, 3, 1, 0, 9, 9)	$v_{3,2,4}$	(0, 3, 3, 1, 2, 8)	$v_{5,3,3}$	(0, 2, 1, 2, 3, 7)
$v_{1,2,2}$	(2, 0, 2, 1, 6, 6)	$v_{3,2,5}$	(1, 2, 2, 0, 1, 9)	$v_{5,3,4}$	(1, 3, 0, 4, 2, 8)
$v_{1,2,3}$	(3, 1, 3, 0, 7, 7)	$v_{3,3,2}$	(2, 1, 0, 1, 4, 6)	$v_{5,3,5}$	(0, 2, 1, 4, 1, 9)
$v_{1,2,4}$	(2, 0, 3, 1, 8, 8)	$v_{3,3,3}$	(3, 0, 1, 2, 3, 7)	$v_{6,1,2}$	(0, 2, 1, 1, 6, 4)
$v_{1,2,5}$	(1, 1, 2, 0, 9, 9)	$v_{3,3,4}$	(4, 1, 0, 3, 2, 8)	$v_{6,1,3}$	(1, 3, 0, 2, 7, 3)
$v_{1,3,2}$	(2, 0, 1, 1, 6, 6)	$v_{3,3,5}$	(3, 0, 1, 2, 1, 9)	$v_{6,1,4}$	(0, 3, 1, 3, 8, 2)
$v_{1,3,3}$	(3, 1, 0, 2, 7, 7)	$v_{4,1,2}$	(2, 2, 0, 1, 4, 6)	$v_{6,1,5}$	(1, 2, 0, 2, 9, 1)
$v_{1,3,4}$	(2, 0, 1, 3, 8, 8)	$v_{4,1,3}$	(3, 3, 1, 0, 3, 7)	$v_{6,2,2}$	(0, 2, 2, 1, 6, 4)
$v_{1,3,5}$	(1, 1, 0, 2, 9, 9)	$v_{4,1,4}$	(4, 4, 0, 1, 2, 8)	$v_{6,2,3}$	(1, 3, 3, 0, 7, 3)
$v_{2,1,2}$	(1, 0, 2, 1, 6, 6)	$v_{4,1,5}$	(5, 3, 1, 0, 1, 9)	$v_{6,2,4}$	(0, 3, 4, 1, 8, 2)
$v_{2,1,3}$	(0, 1, 3, 2, 7, 7)	$v_{4,2,2}$	(2, 0, 2, 1, 4, 6)	$v_{6,2,5}$	(1, 2, 2, 0, 9, 1)
$v_{2,1,4}$	(1, 0, 4, 2, 8, 8)	$v_{4,2,3}$	(3, 1, 3, 0, 3, 7)	$v_{6,3,2}$	(2, 1, 0, 1, 6, 4)
$v2.1.5$	(0, 1, 3, 1, 9, 9)	$v4.2.4$	(4, 0, 3, 1, 2, 8)	$v6.3.3$	(3, 0, 1, 2, 7, 3)
$v2.2.2$	(0, 1, 2, 1, 6, 6)	$v4.2.5$	(5, 1, 2, 0, 1, 9)	$v6.3.4$	(4, 1, 0, 3, 8, 2)
$v2.2.3$	(1, 0, 3, 2, 7, 7)	$v4.3.2$	(2, 0, 1, 1, 4, 6)	$v6.3.5$	(3, 0, 1, 2, 9, 1)
$v2.2.4$	(0, 1, 4, 2, 8, 8)	$v4.3.3$	(3, 1, 0, 2, 3, 7)		
$v2.2.5$	(1, 0, 3, 1, 9, 9)	$v4.3.4$	(4, 0, 1, 3, 2, 8)		

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa setiap titik di graf $Amal\{m\theta(n)|m \geq 4, n \geq 3\}$ memiliki kode warna yang berbeda terhadap Π.



Gambar 10. Pewarnaan Titik Graf $Amal\{m\theta(n)|m \geq 4, n \geq 3\}$

Misalkan $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, \dots, S_h\}$, an $i = 2,4, \dots, n-2+\big(n(mod\ 2)\big)$ dan $j = 3,5, \dots, n-2+\big(n+1(mod\ 2)\big)$, sedemikian sehingga

$S_1 = \{b_1\} \cup \{v_{r,1,j}, v_{r,3,j} | r = 2,5, \dots, m - \big(m + 1\ (mod\ 3)\big), j = 3,5, \dots, n-2+\big(n+1(mod\ 2)\big)\}$

$\cup \{v_{r,2,i} | r = 2,5, \dots, n - \big(m + 1\ (mod\ 3)\big), i = 2,4, \dots, n-2+\big(n(mod\ 2)\big)\}$,

$\cup \{v_{r,1,i}, v_{r,2,i} | r = 3,6, \dots, m - \big(m(mod\ 3)\big), i = 2,4, \dots, n-2+\big(n(mod\ 2)\big)\}$

$S_2 = \{v_{r,2,i}, v_{r,3,i} | r = 1,4, \dots, m - \big(m+1(mod\ 3)\big), i = 2,4, \dots, n-2+\big(n(mod\ 2)\big)\}$

$\cup \{v_{q,1,i} | r = 2,5, \dots, m - \big(m + 1\ (mod\ 3)\big), i = 2,4, \dots, n-2+\big(n(mod\ 2)\big)\}$,

$\cup \{v_{r,2,j} | r = 2,5, \dots, m - \big(m + 1\ (mod\ 3)\big), j = 3,5, \dots, n-2+\big(n+1(mod\ 2)\big)\}$

$\cup \{v_{r,3,j} | r = 3,6, \dots, m - \big(m(mod\ 3)\big), j = 3,5, \dots, n-2+\big(n+1(mod\ 2)\big)\}$

$S_3 = \{v_{r,1,i} | r = 1,4, \dots, m - \big(m+1(mod\ 3)\big), i = 2,4, \dots, n-2+\big(n(mod\ 2)\big)\}$

$\cup \{v_{r,3,j} | r = 1,4, \dots, m - \big(m+1(mod\ 3)\big), j = 3,5, \dots, n-2+\big(n+1(mod\ 2)\big)\}$

$\cup \{v_{r,3,i} | r = 2,5, \dots, m - \big(m + 1\ (mod\ 3)\big), i = 2,4, \dots, n-2+\big(n(mod\ 2)\big)$

$\cup \{v_{r,1,j} | r = 3,6, \dots, m - \big(m(mod\ 3)\big), j = 3,5, \dots, n-2+\big(n+1(mod\ 2)\big)\}$

$\cup \{v_{r,3,i}\} | r = 3,6, \dots, n - \big(n(mod\ 3)\big), i = 2,4, \dots, n-2+\big(n(mod\ 2)\big)\}$

$S_4 = \{a, b_1\} \cup \{v_{r,1,j}, v_{r,2,j} | r = 1,4, \dots, n - \big(n+1(mod\ 3)\big), j = 3,5, \dots, n-2+\big(n+1(mod\ 2)\big)\} \cup \{v_{r,2,j} | 3 \leq r \leq n - \big(n(mod\ 3)\big), 3 \leq j \leq n-2+\big(n+1(mod\ 2)\big)\}$

$S_h = \{b_{3(p-4),} b_{3(p-4)+1,} b_{3(p-4)+2}\}$ dengan $5 \leq p \leq h$.

Kode warna setiap titik pada Tabel 4 dan Tabel 5 di graf $Amal\{m\theta(n)|m \geq 4, n \geq 3\}$. Pada Tabel 4 terdapat tabel titik-titik pada graf $Amal\{m\theta(n)|m \geq 4, n \geq 3\}$ untuk setiap $m, 2 \leq m \leq 5$. Selanjutnya, pada Tabel 4 terdapat tabel titik-titik untuk setiap $m, 6 \leq m \leq h$.

Berdasarkan pada Tabel 4 dan Tabel 5, dapat dilihat bahwa setiap titik memiliki kode warna yang berbeda. Jadi, $\chi_L(Amal\{m\theta(n)|m \geq 4, n \geq 3\}) \leq \left\lceil\frac{m+1}{3}\right\rceil + 3$.

Tabel 4. Tabel Kode Warna Pada Graf $Amal\{m\theta(n)|m \geq 4, n \geq 3\}$

Misalkan : $h = \left\lceil\frac{3+1}{3}\right\rceil + 3$										
No	TITIK	$kode\ warna\ C_\pi(v) = (d(v,S_1), d(v,S_2), \ldots, d(v,S_h))$								Syarat
		S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	. . .	S_h	
1	b_1	0	1	2	1	2(n-1)	2(n-1)	. . .	2(n-1)	
2	$v_{2,1,k}$	0	1	k	k-1	n+k-2	n+k-2	. . .	n+k-2	k < n/2, k ganjil
3	$v_{2,1,k}$	0	1	n-k+1+((k+1)mod 2)	n-k	n+k-2	n+k-2	. . .	n+k-2	k > n/2, k ganjil
4	$v_{2,2,k}$	0	1	k	k-1	n+k-2	n+k-2	. . .	n+k-2	k < n/2, k genap
5	$v_{2,2,k}$	0	1	n-k+1+((k+1)mod 2)	n-k	n+k-2	n+k-2	. . .	n+k-2	k > n/2, k genap
6	$v_{2,3,k}$	0	k	1	k-1	n+k-2	n+k-2	. . .	n+k-2	k < n/2, k ganjil
7	$v_{2,3,k}$	0	n-k+1+(k mod 2)	1	n-k	n+k-2	n+k-2	. . .	n+k-2	k > n/2, k ganjil
8	$v_{3,1,k}$	0	k	1	k-1	n-k	n-k	. . .	n-k	k < n/2, k genap
9	$v_{3,1,k}$	0	n-k+1+(k mod 2)	1	n-k+1+(k mod 2)	n-k	n-k	. . .	n-k	k > n/2, k genap
10	$v_{3,2,k}$	0	k	k	1	n-k	n-k	. . .	n-k	k < n/2, k genap
11	$v_{3,2,k}$	0	n-k+1+(k mod 2)	n-k+1+((k+1)mod 2)	1	n-k	n-k	. . .	n-k	k > n/2, k genap
12	$v_{1,2,k}$	k	0	k	1	n+k-2	n+k-2	. . .	n+k-2	k < n/2, k genap
13	$v_{1,2,k}$	n-k	0	n-k+1+((k+1)mod 2)	1	n+k-2	n+k-2	. . .	n+k-2	k > n/2, k genap
14	$v_{1,3,k}$	k	0	1	k-1	n+k-2	n+k-2	. . .	n+k-2	k < n/2, k genap
15	$v_{1,3,k}$	n-k	0	1	n-k+1+(k mod 2)	n+k-2	n+k-2	. . .	n+k-2	k > n/2, k genap
16	$v_{2,1,k}$	1	0	k	k-1	n+k-2	n+k-2	. . .	n+k-2	k < n/2, k genap
17	$v_{2,1,k}$	1	0	n-k+1+((k+1)mod 2)	n-k	n+k-2	n+k-2	. . .	n+k-2	k > n/2, k genap
18	$v_{2,2,k}$	1	0	k	k-1	n+k-2	n+k-2	. . .	n+k-2	k < n/2, k ganjil
19	$v_{2,2,k}$	1	0	n-k+1+((k+1)mod 2)	n-k	n+k-2	n+k-2	. . .	n+k-2	k > n/2, k ganjil
20	$v_{3,3,k}$	k	0	1	k-1	n-k	n-k	. . .	n-k	k < n/2, k ganjil
21	$v_{3,3,k}$	n-k+1+((k+1)mod 2)	0	1	n-k+1+(k mod 2)	n-k	n-k	. . .	n-k	k > n/2, k ganjil
22	$v_{1,1,k}$	k	k	0	1	n+k-2	n+k-2	. . .	n+k-2	k < n/2, k genap
23	$v_{1,1,k}$	n-k	n-k+1+((k+1)mod 2)	0	1	n+k-2	n+k-2	. . .	n+k-2	k > n/2, k genap
24	$v_{1,3,k}$	k	1	0	k-1	n+k-2	n+k-2	. . .	n+k-2	k < n/2, k ganjil
25	$v_{1,3,k}$	n-k	1	0	n-k+1+(k mod 2)	n+k-2	n+k-2	. . .	n+k-2	k > n/2, k ganjil
26	$v_{2,3,k}$	1	k	0	k-1	n+k-2	n+k-2	. . .	n+k-2	k < n/2, k genap
27	$v_{2,3,k}$	1	n-k+1+(k mod 2)	0	n-k	n+k-2	n+k-2	. . .	n+k-2	k > n/2, k genap
28	$v_{3,1,k}$	1	k	0	k-1	n-k	n-k	. . .	n-k	k < n/2, k ganjil

Misalkan : $h = \left\lceil \frac{3+1}{3} \right\rceil + 3$										
No	TITIK	$kode\ warna\ C_{\pi}(v) = (d(v,S_1), d(v,S_2), \ldots, d(v,S_h))$								Syarat
		S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	. . .	S_h	
29	$v_{3,1,k}$	1	n-k+1+(k mod 2)	0	n-k+1+(k mod 2)	n-k	n-k	. . .	n-k	k > n/2, k ganjil
30	$v_{3,3,k}$	k	1	0	k-1	n-k	n-k	. . .	n-k	k < n/2, k genap
31	$v_{3,3,k}$	n-k+1+((k+1)mod 2)	1	0	n-k+1+(k mod 2)	n-k	n-k	. . .	n-k	k > n/2, k genap
32	c	1	1	1	0	n-1	n-1	. . .	n-1	
33	b_2	1	1	2	0	2(n-1)	2(n-1)	. . .	2(n-1)	
34	$v_{1,1,k}$	k	k	1	0	n+k-2	n+k-2	. . .	n+k-2	k < n/2, k ganjil
35	$v_{1,2,k}$	k	1	k	0	n+k-2	n+k-2	. . .	n+k-2	k < n/2, k ganjil
36	$v_{1,2,k}$	n-k	1	n-k+1+((k+1)mod 2)	0	n+k-2	n+k-2	. . .	n+k-2	k > n/2, k ganjil
37	$v_{3,2,k}$	1	k	k	0	n-k	n-k	. . .	n-k	k < n/2, k ganjil
38	$v_{3,2,k}$	1	n-k+1+(k mod 2)	n-k+1+((k+1)mod 2)	0	n-k	n-k	. . .	n-k	k > n/2, k ganjil
39	b_3	2	1	1	1	0	2(n-1)	. . .	2(n-1)	
40	b_4	n	2	2	1	0	2(n-1)	. . .	2(n-1)	
41	b_S	1	1	2	n	0	2(n-1)	. . .	2(n-1)	
42	$v_{1,1,k}$	n-k	n-k+1+((k+1)mod 2)	1	1	n+k-2	n+k-2	. . .	n+k-2	k > n/2, k ganjil

Tabel 5. Tabel Kode Warna Pada Graf $Amal\{m\theta(n) | m \geq 4, n \geq 3\}$

Misalkan : $w = 5, 6, \ldots, x-1$ $x = \left\lceil \frac{3+1}{3} \right\rceil + 3$ $y = x+1, x+2, \ldots$										
No	Titik	$kode\ warna\ C_{\pi}(v) = (d(v,S_1), d(v,S_2), \ldots, d(v,S_h))$							Syarat	
		S_1	S_2	S_3	S_4	S_w	S_x	S_y		
1	$v_{r,1,k}$	0	1	k	n-1	n+k-2	n-k	n+k-2	k < n/2, k ganjil	r=5,8, ..., m − ((m + 1)mod 3)
2	$v_{r,1,k}$	0	1	n-k+1+((k+1)mod 2)	n-1	n+k-2	n-k	n+k-2	k > n/2, k ganjil	r=5,8, ..., m − ((m + 1)mod 3)
3	$v_{r,2,k}$	0	1	k	n-1	n+k-2	n-k	n+k-2	k < n/2, k genap	r=5,8, ..., m − ((m + 1)mod 3)
4	$v_{r,2,k}$	0	1	n-k+1+((k+1)mod 2)	n-1	n+k-2	n-k	n+k-2	k > n/2, k genap	r=5,8, ..., m − ((m + 1)mod 3)
5	$v_{r,3,k}$	0	k	1	n-1	n+k-2	n-k	n+k-2	k < n/2, k ganjil	r=5,8, ..., m − ((m + 1)mod 3)
6	$v_{r,3,k}$	0	n-k+1+((k+1)mod 2)	1	n-1	n+k-2	n-k	n+k-2	k > n/2, k ganjil	r=5,8, ..., m − ((m + 1)mod 3)
7	$v_{r,1,k}$	0	k	1	n	n+k-2	n-k	n+k-2	k < n/2, k genap	r=6,9 ..., m − (m (mod 3))
8	$v_{r,1,k}$	0	n-k+1+(k mod 2)	1	n	n+k-2	n-k	n+k-2	k > n/2, k genap	r=6,9 ..., m − (m (mod 3))
9	$v_{r,2,k}$	0	k	k	n	n+k-2	n-k	n+k-2	k < n/2, k genap	r=6,9 ..., m − (m (mod 3))
10	$v_{r,2,k}$	0	n-k+1+(k mod 2)	n-k+1+(k mod 2)	n	n+k-2	n-k	n+k-2	k > n/2, k genap	r=6,9 ..., m − (m (mod 3))
11	$v_{r,2,k}$	k	0	k	1	n+k-2	n-k	n+k-2	k < n/2, k genap	r =4, 7,..., m − ((m + 2)mod 3)
12	$v_{r,2,k}$	k	0	n-k+1+((k+1)mod 2)	1	n+k-2	n-k	n+k-2	k > n/2, k genap	r =4, 7,..., m − ((m + 2)mod 3)
13	$v_{r,3,k}$	k	0	1	k-1	n+k-2	n-k	n+k-2	k < n/2, k genap	r =4, 7,..., m − ((m + 2)mod 3)
14	$v_{r,3,k}$	k	0	1	n-k+1+(k mod 2)	n+k-2	n-k	n+k-2	k > n/2, k genap	r =4, 7,..., m − ((m + 2)mod 3)
15	$v_{r,1,k}$	1	0	k	n-1	n+k-2	n-k	n+k-2	k < n/2, k genap	r=5,8, ..., m − ((m + 1)mod 3)
16	$v_{r,1,k}$	1	0	n-k+1+((k+1)mod 2)	n-1	n+k-2	n-k	n+k-2	k > n/2, k genap	r=5,8, ..., m − ((m + 1)mod 3)
17	$v_{r,2,k}$	1	0	k	n-1	n+k-2	n-k	n+k-2	k < n/2, k ganjil	r=5,8, ..., m − ((m + 1)mod 3)
18	$v_{r,2,k}$	1	0	n-k+1+((k+1)mod 2)	n-1	n+k-2	n-k	n+k-2	k > n/2, k ganjil	r=5,8, ..., m − ((m + 1)mod 3)
19	$v_{r,3,k}$	k	0	1	n	n+k-2	n-k	n+k-2	k < n/2, k ganjil	r=6,9 ..., m − (m (mod 3))
20	$v_{r,3,k}$	n-k+1+(k mod 2)	0	1	n	n+k-2	n-k	n+k-2	k > n/2, k ganjil	r=6,9 ..., m − (m (mod 3))
21	$v_{r,1,k}$	k	k	0	1	n+k-2	n-k	n+k-2	k < n/2, k genap	r =4, 7,..., m − ((m + 2)mod 3)
22	$v_{r,1,k}$	k	n-k+1+((k+1)mod 2)	0	1	n+k-2	n-k	n+k-2	k > n/2, k genap	r =4, 7,..., m − ((m + 2)mod 3)
23	$v_{r,3,k}$	k	1	0	k-1	n+k-2	n-k	n+k-2	k < n/2, k ganjil	r =4, 7,..., m − ((m + 2)mod 3)

Misalkan : $w = 5, 6, \ldots, x - 1$

$x = \left[\frac{3+1}{3}\right] + 3$

$y = x + 1, x + 2, \ldots$

No	Titik	$kode\ warna\ C_\pi(v) = (d(v,S_1), d(v,S_2), \ldots, d(v,S_h))$							Syarat	
		S_1	S_2	S_3	S_4	S_w	S_x	S_y		
24	$v_{r,3,k}$	k	1	0	n-k+1+(k mod 2)	n+k-2	n-k	n+k-2	k > n/2, k ganjil	r =4, 7,..., m − ((m + 2)mod 3)
25	$v_{r,3,k}$	1	k	0	n-1	n+k-2	n-k	n+k-2	k < n/2, k genap	r=5,8, ..., m − ((m + 1)mod 3)
26	$v_{r,3,k}$	1	n-k+1+((k+1)mod 2)	0	n-1	n+k-2	n-k	n+k-2	k > n/2, k genap	r=5,8, ..., m − ((m + 1)mod 3)
27	$v_{r,1,k}$	1	k	0	n	n+k-2	n-k	n+k-2	k < n/2, k ganjil	r=6,9 ..., m − (m (mod 3))
28	$v_{r,1,k}$	1	n-k+1+(k mod 2)	0	n	n+k-2	n-k	n+k-2	k > n/2, k ganjil	r=6,9 ..., m − (m (mod 3))
29	$v_{r,3,k}$	k	1	0	n	n+k-2	n-k	n+k-2	k < n/2, k genap	r=6,9 ..., m − (m (mod 3))
30	$v_{r,3,k}$	n-k+1+(k mod 2)	1	0	n	n+k-2	n-k	n+k-2	k > n/2, k genap	r=6,9 ..., m − (m (mod 3))
31	$v_{r,1,k}$	k	k	1	0	n+k-2	n-k	n+k-2	k < n/2, k ganjil	r =4, 7,..., m − ((m + 2)mod 3)
32	$v_{r,1,k}$	k	n-k+1+((k+1)mod 2)	1	0	n+k-2	n-k	n+k-2	k > n/2, k ganjil	r =4, 7,..., m − ((m + 2)mod 3)
33	$v_{r,2,k}$	k	1	k	0	n+k-2	n-k	n+k-2	k < n/2, k ganjil	r =4, 7,..., m − ((m + 2)mod 3)
34	$v_{r,2,k}$	k	1	n-k+1+((k+1)mod 2)	0	n+k-2	n-k	n+k-2	k > n/2, k ganjil	r =4, 7,..., m − ((m + 2)mod 3)
35	b_r	2	1	1	1	2(n-1)	0	2(n-1)		$r = 6, 9, \ldots, m -$ (m (mod 3))
36	b_r	n	1	2	1	2(n-1)	0	2(n-1)		r = $7, 10, \ldots, m -$ ((m + 2)mod 3)
37	b_r	1	1	2	n	2(n-1)	0	2(n-1)		r = $8, 11, \ldots, m -$ ((m + 1)mod 3)
38	$v_{r,2,k}$	1	k	k	n	n+k-2	n-k	n+k-2	k < n/2, k ganjil	r=6,9 ..., m − (m (mod 3))
39	$v_{r,2,k}$	1	n-k+1+(k mod 2)	n-k+1+(k mod 2)	n	n+k-2	n-k	n+k-2	k > n/2, k ganjil	r=6,9 ..., m − (m (mod 3))

Akibatnya, diperoleh $\chi_L(Amal\{m\theta(n)|m \geq 4, n \geq 3\}) \leq \left\lceil\frac{m+1}{3}\right\rceil + 3$.

4 Simpulan

Pada penelitian ini diperoleh bilangan kromatik graf $Amal\ \{2\theta(n)|n \geq 3\} = 4$ dan $Amal\ \{3\theta(n)|n \geq 3\} = 5$, serta batas atas bilangan kromatik lokasi $Amal\ \{m\theta(n)|m \geq 4, n \geq 3\} \leq \left\lceil\frac{m+1}{3}\right\rceil + 3$.

5 Daftar Pustaka

[1] G. Chartrand, D. Erwin, M. A. Henning, P. J. Slater, and P. Zhang, "The locating-chromatic number of a graph," *Bull. Inst. Combin. Appl*, vol. 36, no. 89, p. 101, 2002.

[2] G. Chartrand, D. Erwin, M. A. Henning, P. J. Slater, and P. Zhang, "Graphs of order n with locating-chromatic number n− 1," *Discrete Math*, vol. 269, no. 1–3, pp. 65–79, 2003.

[3] A. H. Asmiati and E. T. Baskoro, "Locating-chromatic of amalgamation of stars ITB J," 2011, *Sci*.

[4] A. Asmiati, L. Yulianti, and C. Widyastuti, "Further results on locating chromatic number for amalgamation of stars linking by one path," *Indonesian Journal of Combinatorics*, vol. 2, no. 1, pp. 50–56, 2018.

[5] A. Asmiati, E. T. Baskoro, H. Assiyatun, and D. Suprijanto, “The locating-chromatic number of firecracker graphs,” *THE LOCATING-CHROMATIC NUMBER OF FIRECRACKER GRAPHS*, vol. 63, no. 1, pp. 11–23, 2012.

[6] Asmiati and E. T. Baskoro, “Characterizing all graphs containing cycles with locating-chromatic number 3,” in *AIP conference proceedings*, American Institute of Physics, 2012, pp. 351–357.

[7] D. Welyyanti, E. T. Baskoro, R. Simanjuntak, and S. Uttunggadewa, “The locating-chromatic number of disconnected graphs,” *Far East Journal of Mathematical Science*, vol. 94, no. 2, pp. 169–182, 2014.

[8] A. Behtoei, A. Behtoei, and M. Anbarloei, “The locating chromatic number of the Join of Graphs Iranian Mathematical Society Title: The locating chromatic number of the join of graphs THE LOCATING CHROMATIC NUMBER OF THE JOIN OF GRAPHS,” *Bull. Iranian Math. Soc*, vol. 40, no. 6, pp. 1491–1504, 2014, [Online]. Available: https://www.researchgate.net/publication/289208443

[9] D. Welyyanti, E. T. Baskoro, R. Simanjuntak, and S. Uttunggadewa, “On locating-chromatic number for graphs with dominant vertices,” *Procedia Comput Sci*, vol. 74, pp. 89–92, 2015.

[10] D. Welyyanti, E. T. Baskoro, R. Simajuntak, and S. Uttunggadewa, “On the locating-chromatic number for graphs with two homogenous components,” in *Journal of Physics: Conference Series*, IOP Publishing, 2017, p. 012040.

[11] K. Prawinasti, M. Ansori, Asmiati, Notiragayu, and A. R. G N Rofi, “The Locating Chromatic Number for Split Graph of Cycle,” in *Journal of Physics: Conference Series*, IOP Publishing Ltd, Jan. 2021. doi: 10.1088/1742-6596/1751/1/012009.

[12] Y. S. Putri, L. Yulianti, and Yanita, “On the locating chromatic number of some Buckminsterfullerene-type graphs,” in *Journal of Physics: Conference Series*, IOP Publishing Ltd, Mar. 2021. doi: 10.1088/1742-6596/1836/1/012005.

[13] N. Andriani, “Bilangan Kromatik Lokasi Pada Graf Amalgamasi Kipas Berekor,” *Limits: Journal of Mathematics and Its Applications*, vol. 20, no. 1, p. 81, Mar. 2023, doi: 10.12962/limits.v20i1.12948.

[14] K. N. , W. D. , & Y. L. Lessya, “Bilangan_Kromatik_Lokasi_Graf_Helm_Hm_Dengan_3_m_9”.

[15] D. Welyyanti, A. Arsyad, and L. Yulianti, “Dimensi Metrik Amalgamasi Graf Theta,” *Limits: Journal of Mathematics and Its Applications*, vol. 20, no. 2, pp. 241–253, 2023.