

Pendekatan Numerik pada Model Penyebaran SARS dengan *Method of Lines*

Patria Arif Bijaksana¹, Windarto², Fatmawati^{3*}

^{1,2,3}Departemen Matematika, Universitas Airlangga, Surabaya Indonesia

¹patriaarif@gmail.com

²windarto@fst.unair.ac.id

³fatmawati@fst.unair.ac.id

Abstrak

Pada paper ini dikaji pendekatan numerik model matematika penyebaran SARS dengan adanya suku difusi. Suku difusi pada model tersebut mengilustrasikan penyebaran SARS berdasarkan lokasi. Solusi numerik dilakukan dengan menggunakan *Method of Lines*. Selanjutnya dibandingkan hasil simulasi numerik antara model penyebaran SARS tanpa suku difusi dan dengan adanya suku difusi. Hasil simulasi dari model penyebaran penyakit SARS tanpa suku difusi hanya menunjukkan terjadinya penyebaran SARS secara periodik waktu. Berdasarkan hasil simulasi pada model SARS dengan adanya suku difusi dapat diketahui bahwa penyebaran SARS dapat ditinjau dari titik awal penyebaran SARS secara spasial dan juga periodik waktu. Lebih lanjut, dari hasil simulasi menunjukkan bahwa semakin jauh dari pusat penyebaran SARS, laju penyebaran penyakit SARS akan semakin kecil.

Kata Kunci: Model Matematika, SARS, Difusi, *Method of Lines*

Abstract

In this paper, we study a numerical approach on the spread of SARS model with diffusion. The diffusion in this model is to illustrate the spread of SARS by location. Numerical solutions are performed using Method of Lines. Next, we compared the numerical simulation results between SARS transmission model without and with the diffusion rate. From the numerical simulations on the spread of SARS model without diffusion, it is known that there is an endemic. Based on simulation results on SARS model with diffusion rate, it can be seen that SARS deployment can be observed from the starting point of spread of SARS spatially and also periodic time. Furthermore, the simulation results show that the farther away from the center of SARS, the spread rate of SARS disease will be smaller.

Keywords: *Mathematical Modeling, SARS, Diffusion, Method of Lines*

1 Pendahuluan

Severe Acute Respiratory Syndrome (SARS) merupakan penyakit yang menyerang sistem respirasi [1]. SARS disebabkan oleh virus khusus yaitu *Coronavirus* (CoV) yang sering disebut dengan SARS-CoV. Virus tersebut mudah menular dari satu orang ke orang lain. Di dalam tubuh, SARS-CoV melakukan replikasi virus pada sistem pernapasan dan menyerang paru-paru yang berakibat sulit bernafas. Selain itu, virus penyebab SARS ini dapat aktif selama 24-48 jam di dalam medium (manusia atau hewan) dan 24 jam di luar medium [2].

Berdasarkan penelitian *Eramus Medical Center* di Rotterdam dalam Chowell, dkk. [3] menyatakan bahwa CoV merupakan penyebab SARS yang penularannya belum diketahui secara pasti. Mengacu pada hipotesis alur penyebaran SARS, sebagian besar penyebarannya melalui orang ke orang, tetapi memungkinkan juga melalui udara atau benda mati. Saat ini, SARS-CoV diketahui dapat menyebar melalui beberapa cara baik dengan kontak langsung maupun tak langsung. Penularan dengan kontak langsung dari hasil sekresi pernafasan penderita SARS melalui udara atau melalui sekresi tubuh (keringat, urin, atau feses). Sedangkan tak langsung dengan menyentuh benda mati yang sudah terkontaminasi oleh CoV atau berkunjung ke daerah endemik SARS [2]. Pada umumnya seseorang tertular SARS ketika penderita SARS mengalami batuk atau bersin sehingga mengakibatkan penyebaran virus melalui udara dan masuk ke dalam mulut, hidung atau mata seseorang yang berada disekitar penderita.

Pengobatan dan pencegahan penularan SARS dapat dilakukan berdasarkan pada identifikasi dan pengaturan kebiasaan pasien SARS secara tepat [2]. Sampai saat ini belum ada obat atau vaksin yang tepat untuk penyakit SARS dan masih dalam tahap pengembangan. Identifikasi dan pengaturan kebiasaan penderita SARS dilakukan dengan cara mengisolasi dan mengkarantina [4]. Isolasi dilakukan pada individu yang menunjukkan gejala SARS, seperti flu, demam tinggi, sakit kepala, tidak enak badan dan diare. Sedangkan karantina dilakukan pada individu yang rentan menjadi *exposed* SARS. Kedua tindakan tersebut merupakan tindakan-tindakan pencegahan penyebaran SARS yang dapat dilakukan oleh ahli medis. Selain itu, tindakan pencegahan yang lebih sering dilakukan masyarakat untuk melakukan pencegahan tertular SARS adalah dengan menggunakan penutup hidung (*masker*), sering melakukan cuci tangan, serta menggunakan baju seperti jubah.

Pada bulan Mei 2003 kasus SARS mencapai 7.861 kasus dan jumlah orang meninggal akibat penyakit SARS sebanyak 664 orang di dunia [1]. Awal Desember 2003, SARS telah menyebabkan lebih dari 800 orang meninggal dan lebih dari 8.400 orang terinfeksi SARS [2]. Hal tersebut menjadikan SARS sebagai penyakit yang banyak merenggut nyawa dengan

penyebaran yang cepat dalam selang waktu yang singkat. Kondisi tersebut menjadi salah satu faktor untuk melakukan penelitian terhadap permasalahan ini.

Banyaknya penelitian terhadap penularan penyakit SARS membuat para peneliti di berbagai disiplin ilmu mencoba untuk menemukan penyebab dan pola penyebaran dari SARS pada 2003. Penelitian yang sudah pernah dilakukan diantaranya menganalisis pola dari SARS dan memprediksi aliran epidemik SARS dengan menetapkan subpopulasi dari model berdasarkan data dari Guangdong dan Hong Kong [5]. Penelitian yang lain yaitu menggunakan model SEIJR (*Susceptible, Exposed, Infected, Diagnosed, Recovery*) untuk epidemik SARS dari data Toronto, Hong Kong, dan Singapore [3]. Dalam penelitian tersebut juga diprediksi pola perilaku, aturan mendiagnosis, dan pengasingan.

Dalam penelitian di atas belum ada yang mengkaji model penyebaran SARS dengan memperhatikan faktor lokasi penyebarannya. Naheed, dkk., [6] telah mengembangkan model penyebaran SARS dengan menambahkan suku difusi pada masing-masing subpopulasi. Suku difusi disini merepresentasikan aspek spasial atau lokasi penyebaran SARS. Pada penelitian Naheed, metode yang digunakan untuk menyelesaikan bagian suku difusi adalah metode *Forward Times Center Space* (FTCS). Dari sini, penulis tertarik mengkaji ulang model yang dikembangkan Naheed, dkk., [6] tersebut, dengan menggunakan metode yang berbeda untuk menyelesaikan bagian suku difusinya yakni menggunakan *Method of Lines*. Pendekatan *method of lines* merupakan salah satu metode untuk menyelesaikan permasalahan persamaan differensial parsial (PDP) dengan menggunakan metode beda hingga. Selanjutnya akan dibandingkan simulasi antara model penyebaran SARS tanpa suku difusi dan model penyebaran SARS dengan adanya suku difusi.

2 *Method of Lines*

Method of lines adalah salah satu metode untuk menyelesaikan permasalahan Persamaan Diferensial Parsial (PDP) dengan cara mengubah sistem PDP ke sistem Persamaan Diferensial Biasa (PDB), salah satunya dengan bantuan metode beda hingga. Misalkan diberikan persamaan difusi satu dimensi [7] yang berbentuk

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \alpha < x < \beta, \quad (1)$$

dengan syarat awal

$$u = (x,0) = f(x), \quad (2)$$

dan syarat batas

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\alpha, t) = 0, t > 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\beta, t) = 0, t > 0. \quad (4)$$

Untuk menyelesaikan masalah syarat batas di atas dengan *Method of Lines*, yaitu dengan mempartisi $[\alpha, \beta]$ menjadi n interval yang sama, sehingga ada $n + 1$ titik partisi. Selanjutnya, bagian spasial (u) didekati dengan beda hingga, sehingga diperoleh

$$u_x(x, t) \approx \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x}. \quad (5)$$

$$u_{xx}(x, t) \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2}. \quad (6)$$

Untuk x_i titik interior substitusikan persamaan (6) ke (1), $i = 1, 2, 3, \dots, n - 1$, diperoleh

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{k}{\Delta x^2} (u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}).$$

Untuk $x = \alpha$ atau $x = x_0$ substitusikan persamaan (5) ke (3), diperoleh

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\alpha, t) \approx \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} = 0,$$

sehingga $u_1 = u_{-1}$. Akibatnya, untuk $x = x_0$ diperoleh

$$\frac{du_0}{dt} = \frac{k}{\Delta x^2} (2u_1 - 2u_0).$$

Untuk $x = \beta$ atau $x = x_n$ substitusikan persamaan (5) ke (4), diperoleh

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\beta, t) \approx \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2\Delta x} = 0,$$

sehingga $u_{n+1} = u_{n-1}$. Akibatnya, untuk $x = x_n$ diperoleh

$$\frac{du_n}{dt} = \frac{k}{\Delta x^2} (2u_{n+1} - 2u_n).$$

3 Pengertian Suku Difusi

Dalam paper ini, suku difusi digunakan untuk menggambarkan (memodelkan) penyebaran suatu penyakit secara spasial, yaitu penyebaran penyakit dari suatu region (wilayah) ke region disekitarnya. Suku difusi diadopsi dari persamaan diferensial parsial difusi. Misalkan $u(x, t)$ menyatakan kepadatan (densitas) suatu material pada suatu region (daerah) tertentu. Dengan menggunakan hukum konservasi massa, diperoleh persamaan kontinuitas sebagai berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \Gamma = 0, \quad (7)$$

dengan Γ menyatakan fluks material yang terdifusi. Dengan menggunakan prinsip Fick, yaitu dengan mengasumsikan bahwa fluks material terdifusi adalah sebanding dengan gradien densitas material tersebut, maka Γ dapat dinyatakan dengan

$$\Gamma = -D\nabla u = -Du_x = -D\frac{\partial u}{\partial x}. \quad (8)$$

Dengan melakukan substitusi persamaan (8) ke dalam persamaan (7), diperoleh persamaan difusi yang berbentuk

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (9)$$

4 Model SARS

Model yang digunakan pada penelitian ini adalah model penyebaran SARS tanpa adanya suku difusi dan model penyebaran SARS dengan adanya suku difusi. Model yang digunakan pada paper ini merujuk pada Naheed, dkk. [6].

4.1 Model SARS tanpa Adanya Suku Difusi

Secara garis besar penyebaran SARS dapat terjadi melalui kontak langsung dengan hasil sekresi pernapasan atau melalui hasil sekresi cairan tubuh pasien yang diketahui terinfeksi SARS. Selain itu, menyentuh permukaan yang telah terkontaminasi SARS dan berkunjung ke daerah epidemik SARS juga faktor penyebaran SARS secara tak langsung. Seseorang yang telah menyentuh permukaan atau memegang objek yang sudah terkontaminasi SARS. Kemudian orang tersebut menyentuh mulut, hidung atau bagian mata dapat mengakibatkan orang tersebut tertular SARS. Model penyebaran SARS tanpa suku difusi dapat disajikan dalam persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \pi - \beta \frac{I + qE + \tau J}{N} S - \mu S \\ \frac{dE}{dt} &= \beta \frac{I + qE + \tau J}{N} S - (\mu + \kappa) E \\ \frac{dI}{dt} &= \kappa E - (\mu + \alpha + \gamma_1 + \delta) I \\ \frac{dJ}{dt} &= \alpha I - (\mu + \gamma_2 + \delta) J \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma_1 I + \gamma_2 J - \mu R, \end{aligned} \quad (10)$$

dimana

S: Individu yang rentan terhadap SARS

E: Individu yang terdiri dari individu tanpa gejala dan memungkinkan menularkan SARS

I: Individu yang terinfeksi, dengan gejala, menular dan tidak terdiagnosis SARS

J: Individu yang terdiagnosis dokter terkena SARS dan dirawat secara medis

R: Individu yang mengalami kesembuhan dari SARS.

4.2. Model SARS dengan Adanya Suku Difusi

Model penyebaran SARS dengan adanya suku difusi adalah model penyebaran SARS yang masing-masing subpopulasinya terdapat suku difusi. Suku difusi dalam model ini mengilustrasikan penyebaran SARS pada suatu lokasi tertentu. Dengan mengadopsi persamaan difusi pada persamaan (9), model matematika penyebaran SARS pada Bagian 4.1 dikembangkan menjadi model matematika penyebaran SARS dengan suku difusi. Suku difusi pada model merepresentasikan penyebaran penyakit SARS secara spasial.

Sistem persamaan differensial untuk model penyebaran SARS dengan adanya suku difusi dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial S}{\partial t} &= \pi - \beta \frac{I + qE + \tau J}{N} S - \mu S + d_1 \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \\
 \frac{\partial E}{\partial t} &= \beta \frac{I + qE + \tau J}{N} S - (\mu + \kappa) E + d_2 \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \\
 \frac{\partial I}{\partial t} &= \kappa E - (\mu + \alpha + \gamma_1 + \delta) I + d_3 \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} \\
 \frac{\partial J}{\partial t} &= \alpha I - (\mu + \gamma_2 + \delta) J + d_4 \frac{\partial^2 J}{\partial x^2} \\
 \frac{\partial R}{\partial t} &= \gamma_1 I + \gamma_2 J - \mu R + d_5 \frac{\partial^2 R}{\partial x^2},
 \end{aligned} \tag{11}$$

dengan $t > 0$, dan $-2 < x < 2$.

Keterangan dari parameter yang digunakan sebagai berikut:

- π Laju pertumbuhan individu *susceptible*
- β Laju penyebaran penyakit
- μ Laju kematian alami
- τ Proporsi resiko dari subpopulasi individu untuk terdiagnosis

κ	Laju perkembangan dari fase <i>exposed</i> menjadi terinfeksi
q	Proporsi dari subpopulasi individu menjadi individu <i>exposed</i>
α	Laju perkembangan dari fase terinfeksi menjadi terdiagnosis
γ_1	Laju kesembuhan individu yang terinfeksi
γ_2	Laju kesembuhan individu yang terdiagnosis
δ	Laju kematian akibat SARS
d_1	Konstanta difusi dari kompartemen <i>S</i>
d_2	Konstanta difusi dari kompartemen <i>E</i>
d_3	Konstanta difusi dari kompartemen <i>I</i>
d_4	Konstanta difusi dari kompartemen <i>J</i>
d_5	Konstanta difusi dari kompartemen <i>R</i>
Δt	Selisih waktu
Δx	Selisih tempat

Syarat batas yang digunakan berbentuk :

$$\frac{\partial S(-2,t)}{\partial x} = \frac{\partial E(-2,t)}{\partial x} = \frac{\partial I(-2,t)}{\partial x} = \frac{\partial J(-2,t)}{\partial x} = \frac{\partial R(-2,t)}{\partial x} = 0, \text{ dan}$$

$$\frac{\partial S(2,t)}{\partial x} = \frac{\partial E(2,t)}{\partial x} = \frac{\partial I(2,t)}{\partial x} = \frac{\partial J(2,t)}{\partial x} = \frac{\partial R(2,t)}{\partial x} = 0. \quad (12)$$

Selanjutnya akan dikaji model penyebaran SARS dengan adanya suku difusi. Langkah pertama yang dilakukan yaitu dengan mentransformasi sistem PDP ke sistem PDB dengan *Method of Lines*. Kemudian melakukan pendekatan secara numerik dari sistem PDB yang diperoleh tersebut.

5 Hasil dan Pembahasan

Pada subbab ini akan dibahas mengenai model penyebaran SARS dengan adanya suku difusi dengan *Method of Lines*.

5.1 Transformasi Sistem PDP ke dalam Sistem PDB dengan *Method of Lines*

Dengan menggunakan *Method of Lines* sistem PDP pada model penyebaran SARS dengan adanya suku difusi dapat diubah menjadi sistem PDB, dengan cara pada bagian spasial didekati dengan beda hingga. Berikut langkah-langkah penyelesaiannya, yaitu:

(a) Interval $[-2,2]$ dipartisi menjadi 40 interval yang sama, dengan lebar $\Delta x = 0,1$ [6]. Misalkan

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_{41}$ merupakan titik-titik partisi dengan $x_1 = -2$ dan $x_{41} = 2$, dan $x_k = x_1 + (k-1)\Delta x$ dengan $k = 1, 2, 3, \dots, 41$.

(b) Berdasarkan syarat batas pada (12), dengan menerapkan hampiran beda terpusat untuk

turunan pertama, yaitu $S_t = \frac{\partial S}{\partial x}$ maka diperoleh titik-titik batasnya sebagai berikut

$$\frac{\partial S(-2,t)}{\partial x} \approx \frac{S_2 - S_0}{2\Delta x} = 0, \text{ sehingga } S_0 = S_2,$$

$$\frac{\partial E(-2,t)}{\partial x} \approx \frac{E_2 - E_0}{2\Delta x} = 0, \text{ sehingga } E_0 = E_2,$$

$$\frac{\partial I(-2,t)}{\partial x} \approx \frac{I_2 - I_0}{2\Delta x} = 0, \text{ sehingga } I_0 = I_2,$$

$$\frac{\partial J(-2,t)}{\partial x} \approx \frac{J_2 - J_0}{2\Delta x} = 0, \text{ sehingga } J_0 = J_2,$$

$$\frac{\partial R(-2,t)}{\partial x} \approx \frac{R_2 - R_0}{2\Delta x} = 0, \text{ sehingga } R_0 = R_2,$$

$$\text{dan } \frac{\partial S(2,t)}{\partial x} \approx \frac{S_{42} - S_{40}}{2\Delta x} = 0, \text{ sehingga } S_{40} = S_{42},$$

$$\frac{\partial E(2,t)}{\partial x} \approx \frac{E_{42} - E_{40}}{2\Delta x} = 0, \text{ sehingga } E_{40} = E_{42},$$

$$\frac{\partial I(2,t)}{\partial x} \approx \frac{I_{42} - I_{40}}{2\Delta x} = 0, \text{ sehingga } I_{40} = I_{42},$$

$$\frac{\partial J(2,t)}{\partial x} \approx \frac{J_{42} - J_{40}}{2\Delta x} = 0, \text{ sehingga } J_{40} = J_{42},$$

$$\frac{\partial R(2,t)}{\partial x} \approx \frac{R_{42} - R_{40}}{2\Delta x} = 0, \text{ sehingga } R_{40} = R_{42}.$$

Berdasarkan uraian di atas didapat

$$S_0 = S_2, E_0 = E_2, I_0 = I_2, J_0 = J_2, R_0 = R_2, S_{40} = S_{42}, E_{40} = E_{42}, I_{40} = I_{42}, J_{40} = J_{42}, \text{ dan } R_{40} = R_{42}. \quad (13)$$

(c) Dengan menerapkan beda terpusat untuk turunan kedua, yaitu $S_{xx} = \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}$, sehingga

persamaan (11) dapat ditulis sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 \frac{dS_i}{dt} &= \pi - \beta \frac{I_i + qE_i + \tau J_i}{N_i} S_i - \mu S_i + d_1 \frac{S_{i+1} - 2S_i + S_{i-1}}{\Delta x^2} \\
 \frac{dE_i}{dt} &= \beta \frac{I_i + qE_i + \tau J_i}{N_i} S_i - (\mu + \kappa) E_i + d_2 \frac{E_{i+1} - 2E_i + E_{i-1}}{\Delta x^2} \\
 \frac{dI_i}{dt} &= \kappa E_i - (\mu + \alpha + \gamma_1 + \delta) I_i + d_3 \frac{I_{i+1} - 2I_i + I_{i-1}}{\Delta x^2} \\
 \frac{dJ_i}{dt} &= \alpha I_i - (\mu + \gamma_2 + \delta) J_i + d_4 \frac{J_{i+1} - 2J_i + J_{i-1}}{\Delta x^2} \\
 \frac{dR_i}{dt} &= \gamma_1 I_i + \gamma_2 J_i - \mu R_i + d_5 \frac{R_{i+1} - 2R_i + R_{i-1}}{\Delta x^2}
 \end{aligned} \tag{14}$$

dengan $i = 1, 2, 3, \dots, 41$.

Selanjutnya, sistem persamaan pada titik batas $i = 1$, diperoleh dengan mensubstitusikan (13) ke model (14) sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 \frac{dS_1}{dt} &= \pi - \beta \frac{I_1 + qE_1 + \tau J_1}{N_1} S_1 - \mu S_1 + d_1 \frac{2S_2 - 2S_1}{\Delta x^2} \\
 \frac{dE_1}{dt} &= \beta \frac{I_1 + qE_1 + \tau J_1}{N_1} S_1 - (\mu + \kappa) E_1 + d_2 \frac{2E_2 - 2E_1}{\Delta x^2} \\
 \frac{dI_1}{dt} &= \kappa E_1 - (\mu + \alpha + \gamma_1 + \delta) I_1 + d_3 \frac{2I_2 - 2I_1}{\Delta x^2} \\
 \frac{dJ_1}{dt} &= \alpha I_1 - (\mu + \gamma_2 + \delta) J_1 + d_4 \frac{2J_2 - 2J_1}{\Delta x^2} \\
 \frac{dR_1}{dt} &= \gamma_1 I_1 + \gamma_2 J_1 - \mu R_1 + d_5 \frac{2R_2 - 2R_1}{\Delta x^2},
 \end{aligned} \tag{15}$$

sedangkan untuk titik batasnya saat $i = 41$ diperoleh persamaan

$$\begin{aligned}
 \frac{dS_{41}}{dt} &= \pi - \beta \frac{I_{41} + qE_{41} + \tau J_{41}}{N_{41}} S_{41} - \mu S_{41} + d_1 \frac{2S_{40} - 2S_{41}}{\Delta x^2} \\
 \frac{dE_{41}}{dt} &= \beta \frac{I_{41} + qE_{41} + \tau J_{41}}{N_{41}} S_{41} - (\mu + \kappa) E_{41} + d_2 \frac{2E_{40} - 2E_{41}}{\Delta x^2} \\
 \frac{dI_{41}}{dt} &= \kappa E_{41} - (\mu + \alpha + \gamma_1 + \delta) I_{41} + d_3 \frac{2I_{40} - 2I_{41}}{\Delta x^2}
 \end{aligned} \tag{16}$$

$$\frac{dJ_{41}}{dt} = \alpha I_{41} - (\mu + \gamma_2 + \delta)J_{41} + d_4 \frac{2J_{40} - 2J_{41}}{\Delta x^2}$$

$$\frac{dR_{41}}{dt} = \gamma_1 I_{41} + \gamma_2 J_{41} - \mu R_{41} + d_5 \frac{2R_{40} - 2R_{41}}{\Delta x^2}.$$

Dari sistem PDB untuk titik interior dan titik batas yang terbentuk di atas, selanjutnya akan dilakukan simulasi numerik.

5.2 Simulasi Model Penyebaran SARS dengan Adanya Suku Difusi

Tujuan melakukan pendekatan secara numerik pada model penyebaran SARS dengan adanya suku difusi yaitu untuk mengetahui dinamika populasi yang terinfeksi dengan memperhatikan endemik dan struktur lokasi SARS. Dalam melakukan pendekatan numerik, parameter yang digunakan merujuk pada Tabel 1 dan Tabel 2, sedangkan nilai syarat awal dari masing-masing variabel merujuk pada Tabel 3. Pada simulasi numerik ini diambil waktu $0 \leq t \leq 100$ dalam satuan hari.

Tabel 1. Nilai parameter model SARS tanpa adanya suku difusi

Notasi	Nilai	Sumber
π	0,000033	Naheed, 2014
β	0,75	Naheed, 2014
μ	0,000034	Naheed, 2014
τ	0,38	Naheed, 2014
κ	0,33	Naheed, 2014
q	0,1	Naheed, 2014
α	0,33	Naheed, 2014
γ_1	0,125	Naheed, 2014
γ_2	0,2	Naheed, 2014
δ	0,006	Naheed, 2014

Gambar 1 mengilustrasikan jumlah subpopulasi dari masing-masing subpopulasi rentan (S), *exposed* (E), terinfeksi (I), terdiagnosis (J), dan *recovery* (R), dengan adanya suku difusi. Dari waktu $0 \leq t \leq 100$ dipilih empat waktu berbeda untuk ditampilkan dalam gambar tersebut,

yaitu $t = 0$ satuan hari, $t = 25$ satuan hari, $t = 50$ satuan hari dan $t = 100$ satuan hari. Pada Gambar 1 dapat diketahui bahwa untuk $t = 0$, subpopulasi S dan I terdapat populasi sedangkan subpopulasi E , J , dan R , tidak ada populasinya. Kondisi pada waktu ini merupakan hasil ilustrasi pada nilai awal yang merujuk pada Tabel 2. Pada saat $t = 25$ satuan hari dapat diketahui bahwa subpoulasi S sudah mulai berkurang karena meninggal akibat selain SARS dan akibat adanya interaksi dengan SARS yang cukup besar, yaitu variabel E , I , dan J . Oleh karena itu, subpopulasi E , I , dan J pada kondisi ini jumlah subpopulasinya mulai meningkat. Meningkatnya subpopulasi E , I , dan J juga berpengaruh pada meningkatnya subpopulasi R , karena sudah ada diantara subpopulasi E , I , dan J yang sudah mulai sembuh dari penyakit SARS.

Tabel 2. Nilai parameter model SARS pada suku difusi

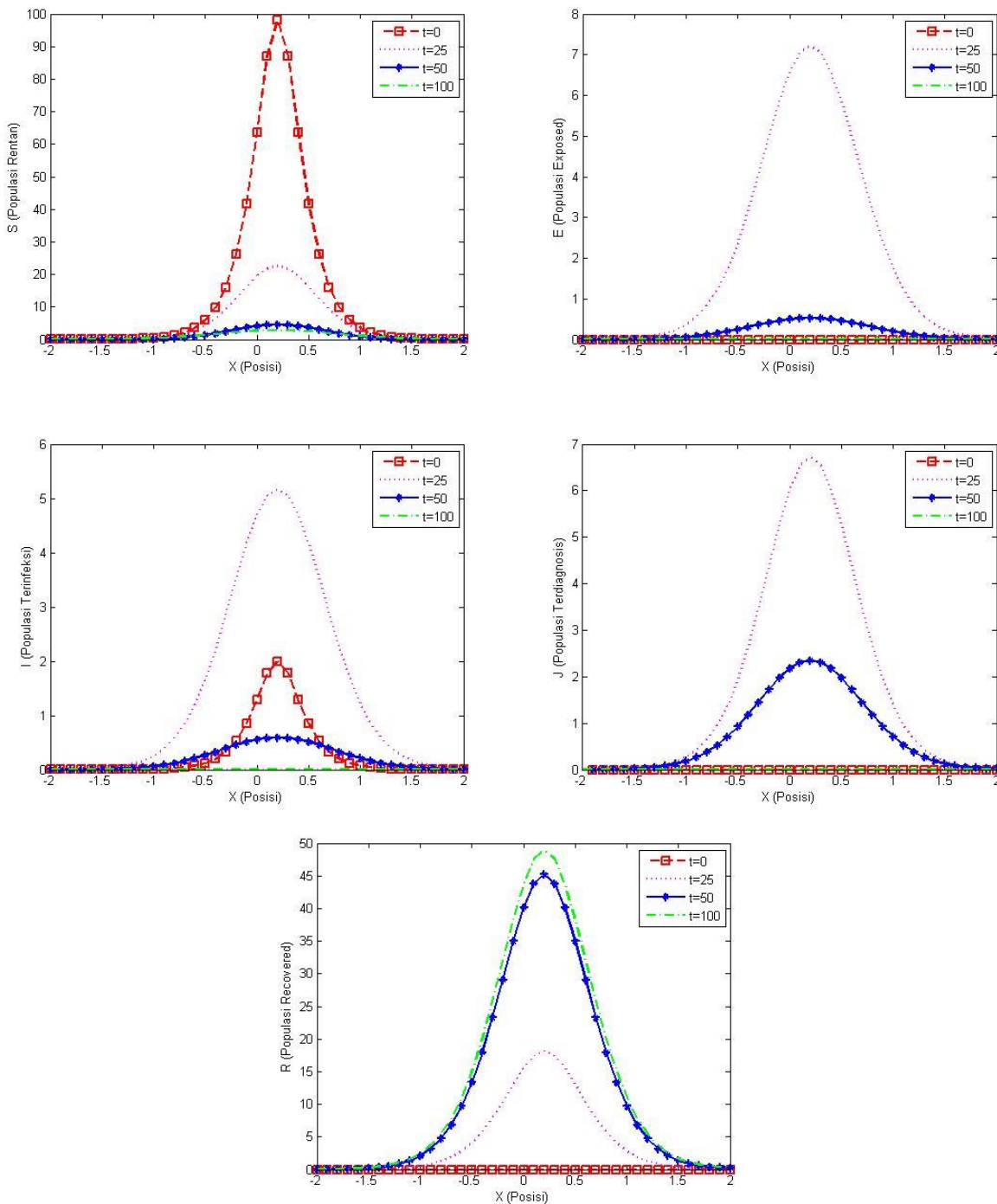
Notasi	Nilai	Sumber
d_1	0,025	Naheed, 2014
d_2	0,01	Naheed, 2014
d_3	0,001	Naheed, 2014
d_4	0,0	Naheed, 2014
d_5	0,0	Naheed, 2014
Δt	0,1	Naheed, 2014

Tabel 3. Nilai syarat awal model dengan adanya suku difusi

Variabel	Nilai Awal	Syarat
$S(0)$	$98\text{sech}(5x - 1)$	
$E(0)$	0	
$I(0)$	$2\text{sech}(5x - 1)$	$-2 \leq x \leq 2$
$J(0)$	0	
$R(0)$	0	

Pada waktu $t = 50$ satuan hari, jumlah subpopulasi pada subpopulasi *exposed*, terinfeksi dan terdiagnosis sudah mulai berkurang karena ada yang sembuh dari SARS, sehingga jumlah subpopulasi dari subpopulasi R meningkat. Hal tersebut juga mengakibatkan jumlah poulasi dari

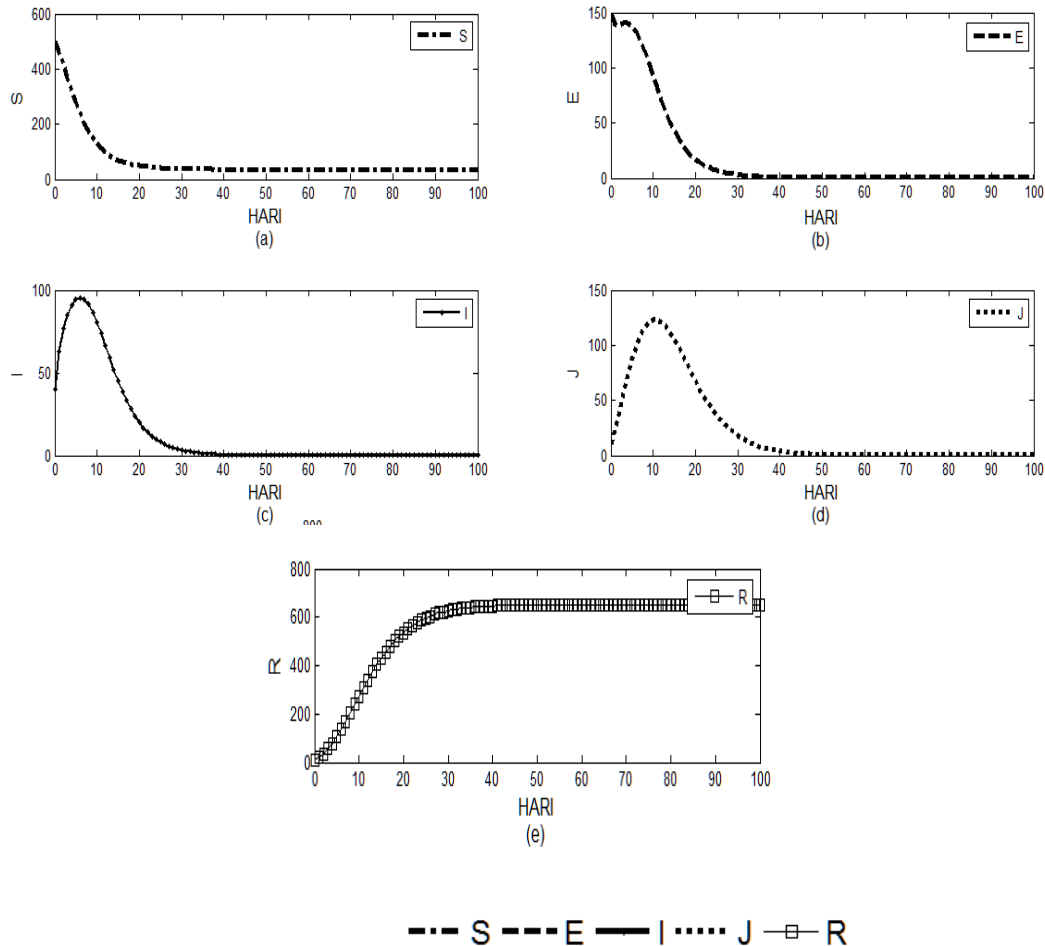
subpopulasi S menurun karena interaksi antar subpopulasi S dengan E , I , dan J mulai melemah. Sedangkan pada $t = 100$ satuan hari diketahui bahwa jumlah subpopulasi S disekitar pusat penyebaran sangat sedikit. Untuk subpopulasi E , I , dan J jumlah subpopulasinya tidak ada, dengan kata lain, pada hari ke 100 individu-individu yang sebelumnya masuk ke dalam subpopulasi E , I dan J sudah mengalami kesembuhan. Oleh karena itu, individu-individu yang sembuh dari SARS berpindah ke kompartemen R , sehingga jumlah subpopulasi R meningkat.



Gambar 1 Grafik dinamika model penyebaran SARS dengan adanya suku difusi

5.3 Simulasi Model Penyebaran SARS Tanpa Suku Difusi

Pada subbab ini akan dijelaskan hasil simulasi numerik model penyebaran SARS tanpa suku difusi. Satuan waktu yang digunakan adalah 100 hari. Parameter yang digunakan merujuk pada Tabel 1.



Gambar 2. Grafik dinamika masing-masing variabel dari model tanpa suku difusi

Nilai awal yang digunakan untuk model tanpa suku difusi adalah sebagai berikut $(S(0), E(0), I(0), J(0), R(0)) = (500, 150, 40, 10, 10)$, sedangkan model penyebaran SARS dengan adanya suku difusi, nilai awalnya merujuk pada Tabel 3. Untuk hasil simulasi dari model penyebaran SARS tanpa adanya suku difusi dapat dilihat pada Gambar 2.

Dari Gambar 1 dan Gambar 2 di atas dapat diketahui bahwa faktor lokasi sangat berpengaruh pada penyebaran SARS. Pada Gambar 1 terlihat bahwa pada populasi S , di pusat penyebaran SARS ($x = 0$) dan sekitarnya, individu yang rentan terhadap SARS lebih banyak dibanding dengan daerah yang lebih jauh dari pusat penyebaran SARS. Sedangkan berdasarkan waktu, jumlah populasi yang rentan SARS mengalami peluruhan dari awal hingga akhir waktu penelitian. Berdasarkan Gambar 2 terlihat bahwa populasi S berdasarkan rentang waktu

penelitian yang dipilih terus mengalami peluruhan dari awal sampai akhir waktu pengamatan. Pada Gambar 2 juga terlihat bahwa populasi E , I , dan J mengalami perubahan jumlah populasi yang fluktuatif, yaitu pada awal waktu rendah terus naik di pertengahan waktu dan kemudian turun lagi menuju nol di akhir waktu pengamatan. Sedangkan untuk populasi R terbanding terbalik dengan variabel S , yakni sejak awal waktu pengamatan populasi R mengalami peningkatan dan kemudian konstan hingga akhir waktu pengamatan.

Dari uraian di atas dapat terlihat bahwa suku difusi berfungsi untuk mengetahui penyebaran dari suatu penyakit pada area sekitar pusat penyebaran penyakit secara spasial. Selain itu model dengan adanya suku difusi juga dapat dilihat dari perubahan waktu, sehingga dapat diketahui perubahan jumlah populasi dari model tersebut pada setiap waktu.

6 Simpulan

Berdasarkan pendekatan numerik pada model penyebaran SARS dengan adanya suku difusi diketahui bahwa pada area sekitar pusat penyebaran penyakit SARS jumlah populasi dari masing-masing subpopulasi lebih banyak dibanding dengan area yang lebih jauh dari pusat penyebaran penyakit SARS. Lebih lanjut, model dengan adanya suku difusi mengindikasikan perubahan jumlah populasi berdasarkan satuan waktu dari masing-masing variabel tetapi tetap mengacu pada pusat penyebaran penyakit SARS. Pada model tanpa suku difusi penyebaran penyakit hanya dapat dilihat berdasarkan periodik waktu. Sedangkan pada model dengan adanya suku difusi, penyebaran SARS dapat ditinjau baik dari segi periodik waktu dan juga titik awal penyebaran SARS secara spasial. Dengan demikian dinamika penyebaran penyakit SARS pada area yang cukup jauh dengan pusat penyebaran SARS dapat dikaji lebih lanjut apakah berpotensi terjadinya endemic SARS atau tidak.

7 Ucapan Terimakasih

Penulis mengucapkan banyak terimakasih kepada tim reviewer atas revisi dan saran yang telah diberikan demi kesempurnaan paper ini.

8 Daftar Pustaka

- [1] WHO, *How a global epidemic was stopped*. WHOpress: Western Pasific Region., 2006.
- [2] J. Serradell, *Deadly Diseases and Epidemic SARS Second Edition*. New York, 2010.
- [3] G. Chowell, P. W. Fenimore, M. A. Castillo-Garsow, and C. Castillo-Chavez, "SARS outbreaks in Ontario, Hong Kong and Singapore: the role of diagnosis and isolation as a

- control mechanism,” pp. 1–18, 2005.
- [4] A. B. Gumel *et al.*, “Modelling strategies for controlling SARS outbreaks,” *Proc. R. Soc. B Biol. Sci.*, vol. 271, no. 1554, pp. 2223–2232, 2004.
- [5] G. K. Xia, J.L., Yao, C., and Zhang, “Analysis of Piecewise Compartmental Modelling for Epidemic of SARS in Guangdong,” *Chin. J. Heal. Stat.*, vol. 20, pp. 162–163, 2003.
- [6] A. Naheed, M. Singh, and D. Lucy, “Numerical study of SARS epidemic model with the inclusion of diffusion in the system,” *Appl. Math. Comput.*, vol. 229, pp. 480–498, 2014.
- [7] W. E. Schiesser and G. W. Griffiths, *A Compendium of Partial Differential Equation Models*. 2009.