

Analisis Model Matematika Orde Fraksional Penyebaran *Worm* Berbasis *Wi-Fi* Pada *Smartphone*

Mohammad Imam Utoyo^{1*}, Er Ayu Nurafifah², Miswanto³

^{1,2,3}Departemen Matematika Universitas Airlangga Surabaya Indonesia

¹ m.i.utoyo@fst.unair.ac.id

² er.ayu.nurafifah-2014@fst.unair.ac.id

³ miswanto@fst.unair.ac.id

Abstrak

Worm merupakan suatu program atau *software* (perangkat lunak) yang memiliki kemampuan mereplikasi diri dan dapat menyebabkan kerusakan pada jaringan komputer. Pada umumnya *worm* menginfeksi jaringan komputer, namun seiring dengan perkembangan teknologi menyebabkan munculnya *worm* jenis baru yaitu *worm* berbasis *Wi-Fi* (*Wireless Fidelity*) yang dapat menginfeksi *smartphone*. Salah satu upaya penanggulangan *worm* adalah dengan menambahkan sebuah *node* baru pada jaringan *Wi-Fi* yaitu *node* karantina untuk meminimalisir penyebaran *worm* pada *smartphone*. Model matematika penyebaran *worm* berbasis *Wi-Fi* pada *smartphone* dapat digunakan untuk mengetahui dinamika penyebaran *worm*. Melalui dinamika penyebaran *worm*, dapat dipelajari faktor penghambat infeksi *worm*. Pada penelitian ini dilakukan analisis kestabilan titik setimbang model matematika orde fraksional penyebaran *worm* berbasis *Wi-Fi* pada *smartphone* dengan orde turunan fraksional $\alpha \in (0,1]$. Berdasarkan analisis model, diperoleh dua titik setimbang yaitu titik setimbang bebas *worm* P_0 dan titik setimbang endemik P_1 . Titik setimbang bebas *worm* stabil asimtotis lokal jika *basic reproduction number* $R_0 < 1$, sedangkan titik setimbang endemik stabil asimtotis lokal jika *basic reproduction number* $R_0 > 1$. Kemudian dilakukan analisis sensitivitas dan simulasi numerik dengan variasi nilai orde fraksional α untuk mengetahui dinamika penyebaran *worm* berbasis *Wi-Fi* pada *smartphone*. Berdasarkan hasil simulasi numerik diperoleh hasil bahwa penambahan *node* karantina pada jaringan *Wi-Fi* dapat menurunkan populasi *node* terinfeksi dan meningkatkan populasi *node* yang pulih.

Kata Kunci: *Worm* Berbasis *Wi-Fi*, Model Matematika Orde Fraksional, Titik Setimbang, Kestabilan

Abstract

Worm is a software that has the ability to replicate itself and it can cause damage on a computer network. Generally, the worm infects computer network, but along with development of technology causing the emergence of new worm that is a *Wi-Fi* (*Wireless Fidelity*) based worm that can infect *smartphone*. One of the ways to prevent *smartphone* from worm is by adding a new node to the *Wi-Fi* network, that is quarantine the node to minimize the spread of worm on *smartphone*. Mathematical models of *Wi-Fi* based worm deployment can be used to determine the dynamics of the spread of *Wi-Fi* based worm in *smartphone*. Inhibiting factor of worm infection can be studied through the dynamics of the spread of worm. In this paper, we present a fractional model of the spread of *Wi-Fi* based worm in *smartphone* with the fractional order derivative $\alpha \in (0,1]$. After that, the stability of the equilibriums of fractional model can be determined. Based on the model analysis, we obtained two equilibriums, namely free-worm equilibrium P_0 and endemic equilibrium P_1 . The free-worm P_0 is locally asymptotically stable if *basic reproduction number* $R_0 < 1$, while the equilibrium P_1 is locally asymptotically stable if *basic reproduction number* $R_0 > 1$. We also analyze the sensitivity of parameters to determine the most

influence parameter to the spread of Wi-Fi based worm. Furthermore, we perform numerical simulations with variations of α to illustrate the dynamical of the spread of Wi-Fi based worm in smartphone. Based on the numerical simulations, we obtained that addition of quarantine node in Wi-Fi network can decrease the population of infected nodes and increase the population of recovered nodes.

Keywords: *Wi-Fi Based Worm, Fractional Mathematical Model, Equilibriums, Stability..*

1 Pendahuluan

Pada saat ini, teknologi mengalami perkembangan yang cukup pesat. Sebagian besar masyarakat menjadikan teknologi sebagai kebutuhan mendasar dalam aspek kehidupan mereka. *Wi-Fi (Wireless Fidelity)* dan *smartphone* merupakan salah satu perkembangan teknologi pada bidang komunikasi dan informasi. *Wi-Fi (Wireless Fidelity)* dikenal sebagai sentra *hotspot* yang dapat memudahkan manusia untuk berkomunikasi atau bertukar informasi dengan kemampuan yang sangat cepat. Lebih dari 18 juta orang di seluruh dunia telah memanfaatkan teknologi *Wi-Fi (Wireless Fidelity)* dan setiap hari jumlahnya semakin bertambah [1]. Dalam beberapa tahun terakhir, *Wi-Fi (Wireless Fidelity)* dan *smartphone* telah banyak memfasilitasi masyarakat untuk menjalani kehidupan sehari-harinya. Berdasarkan data dari KOMINFO, lembaga riset digital marketing Emarketer memperkirakan pada tahun 2018 jumlah pengguna aktif *smartphone* di Indonesia mencapai lebih dari 100 juta orang [2].

Semakin banyak pengguna *smartphone* dan *Wi-Fi* yang terhubung ke internet, akan menyebabkan *worm* jenis baru dapat berkembang biak, salah satunya yaitu *worm* berbasis *Wi-Fi (Wireless Fidelity)*. *Worm* tersebut dikenal dengan sebutan *Chameleon*. *Chameleon* merupakan jenis *worm* berbasis *Wi-Fi* yang dapat menyebar melalui *access point* pada satu jaringan *Wi-Fi* ke jaringan *Wi-Fi* yang lain. *Chameleon* bekerja tanpa mengganggu kinerja *access point*. Namun, *worm* tersebut dapat mengumpulkan data-data penting pada saat melewati jaringan *Wi-Fi*, seperti password, kartu kredit, atau akun bank. *Chameleon* bereplikasi tanpa bantuan manusia dengan mencoba memecahkan kata sandi setiap router *Wi-Fi* baru yang ditemuinya. *Chameleon* dapat diibaratkan seperti organisme yang menular secara biologis, melompat di antara jaringan *Wi-Fi* yang saling tumpang tindih seperti penyakit di udara yang menyebar di antara manusia (Scharr dalam [3]).

Chameleon tidak dapat terdeteksi oleh antivirus karena antivirus hanya mampu melacak *worm* pada internet dan *worm* yang berada di dalam komputer. *Chameleon* bersembunyi di antara jaringan *Wi-Fi* dan menginfeksi jaringan *Wi-Fi* yang tidak terproteksi password. *Chameleon* dapat menyerang *smartphone* yang terhubung ke jaringan *Wi-Fi* karena mayoritas *smartphone* tidak memiliki cara yang efektif untuk mencegah serangan *worm*, sehingga hal

tersebut menjadikan *smartphone* rentan terhadap serangan *worm*. *Smartphone* yang terganggu oleh *worm* menyebabkan kerugian yang besar bagi pengguna *smartphone* seperti kebocoran data, kerusakan sistem dan kerugian finansial [3].

Beberapa peneliti telah mempelajari dinamika penyebaran *worm*. Pada penelitian sebelumnya, Yuan dkk [4] telah menjelaskan model matematika pada penyebaran *worm* dengan adanya masa inkubasi. Selain itu, Xiao dkk [3] mengkonstruksi model penyebaran *worm* berbasis *Wi-Fi* pada *smartphone* dengan adanya masa karantina. Xiao dkk [3] membagi populasi node menjadi lima subpopulasi yaitu, populasi node yang rentan terhadap *worm* (S), populasi node yang terinfeksi *worm* tetapi belum bisa menyebarkan *worm* ke node lain (E), populasi node yang terinfeksi *worm* (I), populasi node yang dikarantina (Q) dan populasi node yang pulih (R).

Dengan menggunakan model matematika dapat diketahui dinamika penyebaran *worm* berbasis *Wi-Fi* pada *smartphone* dan karenanya dapat dipelajari faktor yang dapat mengurangi penyebaran *worm* berbasis *Wi-Fi* pada *smartphone*. Model penyebaran *worm* berbasis *Wi-Fi* pada *smartphone* telah dikembangkan oleh Xiao dkk [3] dalam bentuk Sistem Persamaan Diferensial Biasa (SPBD) non linear. SPBD non linear tersebut dapat diperumum menjadi Sistem Persamaan Diferensial Orde Fraksional (SPDF) dengan mengubah order turunan pertamanya yaitu $\alpha = 1$ menjadi $0 < \alpha \leq 1$ sebagaimana telah dilakukan oleh Das dan Gupta [5]. Pada tahun 2016, Angstmann dkk [6] menganalisis dan memodifikasi model matematika SIR yang berbentuk SPDB non linear kedalam bentuk SPDF. Secara alami, SPDF berkaitan dengan faktor histori dari suatu penyebaran penyakit pada sistem biologis. Dengan menggunakan analisis kestabilan pada SPDF diperoleh syarat cukup untuk kestabilan titik setimbang endemik dari model matematika tersebut.

Berdasarkan uraian di atas, pada penelitian ini akan dikembangkan model SPDF dari model SPDB Xiao dkk [3]. Selanjutnya akan ditentukan titik setimbang dan kestabilannya, serta akan dilakukan simulasi numerik dan interpretasinya.

2 Metode Penelitian

2.1. Formulasi Model Matematika

Model matematika penyebaran *worm* berbasis *Wi-Fi* pada *smartphone* yang ditulis oleh Xiao dkk [3] terdiri dari lima subpopulasi, yaitu populasi node yang rentan pada saat t ($S(t)$), populasi node yang laten pada saat t ($E(t)$), populasi node yang terinfeksi *worm* pada saat t ($I(t)$), populasi node yang telah terinfeksi *worm* pada saat t dan dikarantina ($Q(t)$), populasi

node yang telah pulih pada saat t ($R(t)$). Asumsi yang digunakan untuk mengkonstruksi model adalah sebagai berikut :

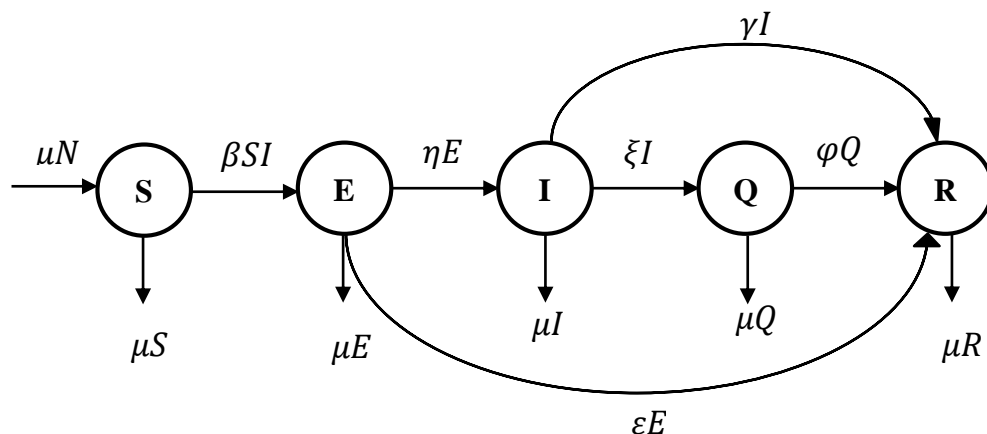
1. Semua node rentan terhadap serangan *worm*.
2. Laju masuknya node baru ke populasi sama dengan laju kerusakan alami node dalam sistem.

Deskripsi parameter dan diagram transmisi pada model disajikan pada Tabel 1 dan Gambar 1 di bawah.

Tabel 1 Deskripsi Parameter

| Parameter | Deskripsi | Satuan |
|---------------|---|------------------------------|
| μ | Laju masuknya node baru ke populasi dan laju kerusakan alami | 1/satuan waktu |
| β | Laju kontak antara node yang rentan dengan node yang terinfeksi | 1/node \times satuan waktu |
| φ | Laju transisi dari node yang dikarantina menjadi node yang pulih | 1/satuan waktu |
| γ | Laju transisi dari node yang terinfeksi menjadi node yang pulih | 1/satuan waktu |
| ε | Laju transisi dari node laten menjadi node yang pulih | 1/satuan waktu |
| η | Laju transisi dari node laten menjadi node yang terinfeksi | 1/satuan waktu |
| ξ | Laju transisi dari node yang terinfeksi menjadi node yang dikarantina | 1/satuan waktu |

Diagram transmisi yang menggambarkan interaksi lima kompartemen tersebut disajikan pada Gambar 1 berikut:



Gambar 1 Diagram Transmisi Model Matematika Penyebaran *Worm* Berbasis *Wi-Fi* Pada *Smartphone*

Keterangan :

—————> : Mengurangi populasi asal dan menambah populasi yang dituju.

Berdasarkan diagram transmisi pada Gambar 1 di atas, Xiao dkk [3] membangun model matematika penyebaran *worm* berbasis *Wi-Fi* pada *smartphone* sebagai berikut:

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\beta SI + \mu N - \mu S \tag{1a}$$

$$\frac{dE(t)}{dt} = \beta SI - \eta E - \varepsilon E - \mu E \tag{1b}$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \eta E - \mu I - \xi I - \gamma I \tag{1c}$$

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \xi I - \varphi Q - \mu Q \tag{1d}$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \varepsilon E + \gamma I + \varphi Q - \mu R \tag{1e}$$

dengan $\mu, \beta, \varphi, \gamma, \varepsilon, \eta, \xi > 0$, $S(t), E(t), I(t), Q(t), R(t) \geq 0$ dan $\frac{dN}{dt} = 0$ sehingga $N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + Q(t) + R(t)$ konstan.

Persamaan (1a) menyatakan laju perubahan populasi node yang rentan terhadap waktu. Populasi node yang rentan bertambah karena adanya laju masuknya node baru pada populasi dan berkurang karena adanya laju interaksi antara populasi node yang rentan dengan populasi node yang terinfeksi *worm*. Selain itu, populasi node yang rentan berkurang karena adanya kerusakan alami pada node yang rentan terinfeksi *worm*. Persamaan (1b) menyatakan laju perubahan populasi node yang laten terhadap waktu. Laju populasi ini bertambah karena adanya interaksi antara populasi node yang rentan dengan populasi node yang telah terinfeksi *worm*, sedangkan berkurang karena adanya laju transisi dari populasi node yang laten menjadi populasi node yang terinfeksi *worm*. Selain itu, laju populasi ini berkurang karena adanya laju transisi dari populasi node laten menjadi populasi node yang pulih dan berkurang karena kerusakan alami pada populasi node yang laten.

Persamaan (1c) menyatakan laju perubahan populasi node yang terinfeksi *worm* terhadap waktu. Laju populasi ini bertambah karena adanya laju transisi dari populasi node laten menjadi populasi node yang terinfeksi *worm*, sedangkan berkurang karena adanya kerusakan alami pada populasi node yang terinfeksi *worm*, kemudian berkurang karena adanya laju transisi dari populasi node yang terinfeksi *worm* menjadi populasi node yang dikarantina dan berkurang karena adanya laju transisi dari populasi node yang terinfeksi *worm* menjadi populasi node yang pulih. Persamaan (1d) menyatakan laju perubahan populasi node yang dikarantina terhadap

waktu. Laju populasi ini bertambah karena adanya laju transisi dari populasi node yang terinfeksi *worm* menjadi populasi node yang dikarantina, sedangkan berkurang karena adanya laju transisi dari populasi node yang dikarantina menjadi populasi node yang pulih dan berkurang karena adanya kerusakan alami pada node yang dikarantina. Persamaan (1e) menyatakan laju perubahan populasi node yang pulih terhadap waktu. Laju populasi ini bertambah karena adanya laju transisi dari populasi node yang laten menjadi populasi node yang pulih, kemudian bertambah karena adanya laju transisi dari populasi node yang terinfeksi *worm* menjadi populasi node yang pulih, bertambah karena adanya laju transisi dari populasi node terinfeksi *worm* yang dikarantina menjadi populasi node yang pulih dan berkurang karena adanya kerusakan alami pada populasi node yang pulih.

2.2. Turunan Fraksional

2.2.1. Pengertian Turunan Fraksional

Pendekatan turunan fraksional yang digunakan dalam penelitian ini adalah turunan fraksional Caputo. Keuntungan menggunakan turunan fraksional Caputo adalah nilai awal pada persamaan diferensial orde fraksional dengan turunan Caputo dalam bentuk orde integer yang memiliki kesamaan bentuk dengan persamaan diferensial orde integer [7].

Definisi 1[7] Misalkan $\alpha > 0$, $t > 0$ dan $n \in \mathbb{N}$. Turunan fraksional Caputo $D^\alpha := \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}$, dengan order fraksional α , untuk fungsi $f(t)$ didefinisikan sebagai:

$$D^\alpha f(t) = I^{n-\alpha} D^n f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(s)}{(t-s)^{\alpha-n+1}} ds & , \quad n-1 < \alpha < n \\ f^{(n)}(t) & , \quad \alpha = n \end{cases} \quad (2)$$

dengan $\Gamma(\cdot)$ adalah fungsi gamma. Pada penelitian ini diasumsikan nilai $\alpha \in (0,1]$.

2.2.2. Kestabilan Lokal Titik Setimbang SPDF

Titik setimbang adalah suatu kondisi ketika laju perubahan suatu subpopulasi tertentu sepanjang waktu adalah nol. Analisis kestabilan dilakukan dengan menggunakan pendekatan nilai eigen sehingga sifat kestabilan yang diperoleh merupakan kestabilan lokal.

Teorema 2[8] Misalkan $D^\alpha x(t) = f(x)$, $0 < \alpha \leq 1$, dan $x \in \mathbb{R}^n$, $f \in \mathbb{R}^n$ merupakan SPDF non linier. Titik setimbang x^* merupakan solusi dari $f(x) = 0$. Titik setimbang x^* stabil asimtotis lokal jika untuk semua nilai eigen λ_j ($j = 1, 2, \dots, n$) dari matriks Jacobian $A = \frac{\partial f}{\partial x}$ yang dievaluasi di titik setimbang x^* memenuhi $|\arg \lambda_j| > \frac{\alpha\pi}{2}$.

2.2.3. Basic reproduction number (R_0)

Basic reproduction number (R_0) merupakan kuantitas penting dalam kasus infeksi epidemiologi penyakit. *Basic reproduction number* R_0 didefinisikan sebagai rata-rata jumlah infeksi sekunder yang disebabkan oleh infeksi primer tunggal pada populasi *susceptible*. Dalam penelitian ini, metode yang digunakan untuk menentukan R_0 adalah metode *Next Generation Matrix* (NGM) yang dikembangkan oleh Driessche dan Watmough [9].

2.2.4. Analisis Sensitivitas

Analisis sensitivitas parameter dilakukan untuk mengetahui parameter apa saja pada model yang memiliki pengaruh besar terhadap laju perubahan model. Analisis sensitivitas parameter dilakukan dengan menghitung nilai indeks sensitivitas dari parameter tersebut. Indeks sensitivitas dari *Basic reproduction number* R_0 adalah $\frac{\partial R_0}{\partial m} \frac{m}{R_0}$ dengan m adalah parameter yang akan dianalisis [10].

2.2.5. Simulasi Numerik

Simulasi numeric dilakukan dengan menggunakan MATLAB R2009a.

3 Hasil dan Pembahasan

3.1. Formulasi Model

Sebagaimana yang dilakukan oleh Das dan Gupta [5] dan Angstmann dkk [6], model matematika penyebaran *worm* berbasis *Wi-Fi* pada *smartphone* yang yang disajikan pada (1a) - (1e) dapat diperumum menjadi SPDF dengan cara mengubah turunan pertama pada SPDB menjadi turunan berorde α dengan $\alpha \in (0,1]$. Model matematika orde fraksional penyebaran *worm* berbasis *Wi-Fi* pada *smartphone* sebagai berikut:

$$\frac{d^\alpha S}{dt^\alpha} = -\beta SI + \mu N - \mu S \tag{3a}$$

$$\frac{d^\alpha E}{dt^\alpha} = \beta SI - \eta E - \varepsilon E - \mu E \tag{3b}$$

$$\frac{d^\alpha I}{dt^\alpha} = \eta E - \mu I - \xi I - \gamma I \tag{3c}$$

$$\frac{d^\alpha Q}{dt^\alpha} = \xi I - \varphi Q - \mu Q \tag{3d}$$

$$\frac{d^\alpha R}{dt^\alpha} = \varepsilon E + \gamma I + \varphi Q - \mu R \tag{3e}$$

dengan $\mu, \beta, \varphi, \gamma, \varepsilon, \eta, \xi > 0$ dan $0 < \alpha \leq 1$

3.2. Analisis Kestabilan Titik Setimbang

3.2.1. Titik Setimbang

Berdasarkan Teorema 1, titik setimbang pada model matematika orde fraksional penyebaran *worm* berbasis *Wi-Fi* pada *smartphone* merupakan solusi dari system persamaan non linear:

$$-\beta SI + \mu N - \mu S = 0 \quad (4a)$$

$$\beta SI - \eta E - \varepsilon E - \mu E = 0 \quad (4b)$$

$$\eta E - \mu I - \xi I - \gamma I = 0 \quad (4c)$$

$$\xi I - \varphi Q - \mu Q = 0 \quad (4d)$$

$$\varepsilon E + \gamma I + \varphi Q - \mu R = 0 \quad (4e)$$

Titik setimbang bebas *worm* P_0 merupakan suatu kondisi ketika tidak terjadi penyebaran *worm*. Kondisi ini terjadi ketika tidak ada *node* yang terinfeksi *worm* ($E = I = 0$) sehingga mengakibatkan tidak ada *node* yang dikarantina. Oleh karena itu, dengan mensubstitusikan $E = I = 0$ ke dalam persamaan (4a)-(4b) diperoleh titik setimbang bebas *worm* $P_0 = (S_0, E_0, I_0, Q_0, R_0) = (N, 0, 0, 0, 0)$, dengan N merupakan jumlah keseluruhan populasi *node* dalam sistem.

Titik setimbang endemik P_1 merupakan suatu kondisi ketika terjadi penyebaran *worm* pada *smartphone* dengan cara menginfeksi jaringan *Wi-Fi* yang sedang terhubung dengan *smartphone* tersebut. Kondisi tersebut terjadi ketika $I \neq 0$. Berdasarkan perhitungan diperoleh titik setimbang $P_1 = (S^*, E^*, I^*, Q^*, R^*) = \left(\frac{(\eta + \varepsilon + \mu)(\xi + \gamma + \mu)}{\eta\beta}, \frac{\mu(N - S^*)}{\eta + \varepsilon + \mu}, \frac{\mu(N - S^*)}{\beta S^*}, \frac{\xi I^*}{\varphi + \mu}, \frac{\varepsilon E^* + \gamma I^* + \varphi Q^*}{\mu} \right)$. Titik setimbang endemik **eksis** karena $N \geq S^*$.

3.2.2. Analisis Kestabilan

Pada subbab ini dikaji tentang kestabilan titik setimbang model (3a)-(3e) di atas dengan terlebih dahulu menghitung *basic reproduction number* R_0 . Langkah pertama menentukan R_0 dengan menggunakan metode NGM [9] adalah dengan mengambil nilai $\alpha = 1$ dan menentukan matriks X dengan elemennya terdiri dari populasi yang terinfeksi dalam model. Populasi ini merupakan populasi yang dapat menularkan maupun populasi yang tidak dapat menularkan penyakit kepada populasi lain. Oleh karena itu, $X = \begin{pmatrix} E \\ I \end{pmatrix}$. Selanjutnya matriks $\frac{dX}{dt}$ didekomposisi kedalam bentuk $\frac{dX}{dt} = F(X) - Z(X)$ dengan $F(X)$ menyatakan matriks transmisi dan $Z(X)$ menyatakan matriks transisi. Matriks transmisi $F(X)$ adalah matriks yang elemennya memuat interaksi antara populasi S dengan populasi I dari matriks \dot{X} . Sedangkan elemen matriks X yang tidak termasuk kedalam $F(X)$ menjadi elemen matriks $Z(X)$. Hasil dekomposisi tersebut adalah

$$\frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dE}{dt} \\ \frac{dI}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta SI - \eta E - \varepsilon E - \mu E \\ \eta E - \mu I - \xi I - \gamma I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta SI \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \eta E + \varepsilon E + \mu E \\ -\eta E + \mu I + \xi I + \gamma I \end{pmatrix} = F(X) - Z(X).$$

Oleh karena itu $F(X) = \begin{pmatrix} \beta SI \\ 0 \end{pmatrix}$ dan $Z(X) = \begin{pmatrix} \eta E + \varepsilon E + \mu E \\ -\eta E + \mu I + \xi I + \gamma I \end{pmatrix}$. Matriks Jacobian dari matriks F dan Z terhadap X di titik setimbang bebas *worm* $P_0 = (N, 0, 0, 0, 0)$ berturut-turut

adalah $\mathbb{F} = \begin{pmatrix} 0 & \beta N \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dan $\mathbb{Z} = \begin{pmatrix} \eta + \varepsilon + \mu & 0 \\ -\eta & \mu + \xi + \gamma \end{pmatrix}$. Berdasarkan hasil ini diperoleh $\mathbb{F}\mathbb{Z}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\beta\eta N}{(\eta+\varepsilon+\mu)(\mu+\xi+\gamma)} & \frac{\beta N}{\mu+\xi+\gamma} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Nilai eigen matriks $\mathbb{F}\mathbb{Z}^{-1}$ adalah $\lambda_1 = \frac{\beta\eta N}{(\eta+\varepsilon+\mu)(\mu+\xi+\gamma)}$ dan $\lambda_2 = 0$. Oleh karena itu, $\mathcal{R}_0 = \max\{|\lambda|: \lambda \text{ nilai eigen dari } \mathbb{F}\mathbb{Z}^{-1}\} = \frac{\beta\eta N}{ab}$ dengan $a = \eta + \varepsilon + \mu$ dan $b = \mu + \xi + \gamma$.

Teorema kestabilan titik setimbang bebas worm model orde fraksional (3a) – (3e) diberikan dalam teorema berikut.

Teorema 3. *Titik setimbang bebas worm P_0 pada model (3a) – (3e) stabil asimtotis lokal untuk setiap $\alpha \in (0,1]$ jika dan hanya jika $R_0 < 1$.*

Bukti : Matriks Jacobian model (3a) – (3e) di sekitar titik setimbang bebas worm P_0 adalah

$$A(P_0) = \begin{pmatrix} -\mu & 0 & -\beta N & 0 & 0 \\ 0 & -(\eta + \varepsilon + \mu) & \beta N & 0 & 0 \\ 0 & \eta & -(\mu + \xi + \gamma) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi & -(\varphi + \mu) & 0 \\ 0 & \varepsilon & \gamma & 0 & -\mu \end{pmatrix}$$

Nilai eigen dari matriks $A(P_0)$ merupakan akar persamaan karakteristik

$$(\lambda + \mu)^2(\lambda + \varphi + \mu)[\lambda^2 + (a + b)\lambda + ab - \eta\beta N] = 0 \tag{5}$$

yang diperoleh dari $\det(\lambda I - A(P_0)) = 0$ [11] dengan $a = \eta + \varepsilon + \mu$ dan $b = \mu + \xi + \gamma$.

Berdasarkan persamaan (5) diperoleh bahwa nilai eigen dari matriks $A(P_0)$ adalah $\lambda_1 = \lambda_2 = -\mu$, $\lambda_3 = -\varphi - \mu$, dan dua akar lain yang merupakan akar-akar dari persamaan polinomial:

$$\lambda^2 + m_1\lambda + m_2 = 0 \tag{6}$$

dengan $m_1 = a + b$, $m_2 = ab - \eta\beta N$.

Karena parameter μ dan φ diasumsikan bernilai positif, maka untuk setiap $j = 1,2,3$, $\lambda_j < 0$, sehingga untuk setiap $\alpha \in (0,1]$, $|\arg(\lambda_j)| = \pi > \frac{\alpha\pi}{2}$, $j = 1,2,3$. Karena $m_1 > 0$, maka persamaan (6) tidak mempunyai akar kompleks dengan bagian real positif. Oleh karena itu untuk menentukan akar persamaan (6) yang memenuhi kriteria kestabilan titik setimbang pada SPDF cukup dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz (Proposition 1 (ii) dalam [12]), yaitu $m_1, m_2 > 0$. Karena syarat $m_1 > 0$ telah terpenuhi, maka syarat kestabilannya tinggal $m_2 > 0$, yaitu $ab - \eta\beta N > 0$ atau $R_0 = \frac{\eta\beta N}{ab} < 1$. Berdasarkan uraian di atas diperoleh bahwa untuk setiap $\alpha \in (0,1]$, $|\arg(\lambda_i)| = \pi > \frac{\alpha\pi}{2}$, $i = 4,5$ jika dan hanya jika $R_0 < 1$. ■

Selanjutnya diberikan teorema kestabilan titik endemik model orde fraksional (3a) – (3e) sebagai berikut.

Teorema 4 *Titik setimbang endemik*

$$P_1 = \left(\frac{(\eta+\varepsilon+\mu)(\xi+\gamma+\mu)}{\eta\beta}, \frac{\mu(N-S^*)}{\eta+\varepsilon+\mu}, \frac{\mu(N-S^*)}{\beta S^*}, \frac{\xi I^*}{\varphi+\mu}, \frac{\varepsilon E^*+\gamma I^*+\varphi Q^*}{\mu} \right)$$

pada model (3a)-(3e) stabil asimtotis lokal untuk setiap $\alpha \in (0,1]$ jika dan hanya jika $R_0 > 1$.

Bukti : Matriks Jacobian model (3a) – (3e) di sekitar titik setimbang bebas *worm* P_1 adalah

$$A(P_1) = \begin{pmatrix} -\beta I^* - \mu & 0 & -\beta S^* & 0 & 0 \\ \beta I^* & -(\eta + \varepsilon + \mu) & \beta S^* & 0 & 0 \\ 0 & \eta & -(\mu + \xi + \gamma) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi & -(\varphi + \mu) & 0 \\ 0 & \varepsilon & \gamma & 0 & -\mu \end{pmatrix}$$

Nilai eigen dari matriks $A(P_1)$ merupakan akar persamaan karakteristik

$$(\lambda + \mu)(\lambda + \varphi + \mu)[\lambda^3 + (a + b + c)\lambda^2 + (ab + bc + ca - \eta\beta S^*)\lambda + abc - \mu\eta\beta S^*] = 0 \quad (7)$$

dengan $a = \eta + \varepsilon + \mu$, $b = \mu + \xi + \gamma$ dan $c = \beta I^* + \mu$.

Berdasarkan persamaan (7) diperoleh nilai eigen dari matriks $A(P_1)$ adalah $\lambda_1 = -\mu$, $\lambda_2 = -\varphi - \mu$, dan tiga akar yang lain merupakan akar-akar dari persamaan berikut:

$$\lambda^3 + m_1\lambda^2 + m_2\lambda + m_3 = 0 \quad (8)$$

dengan $m_1 = a + b + c$, $m_2 = ab + bc + ca - \eta\beta S^*$ dan $m_3 = abc - \mu\eta\beta S^*$.

Karena parameter μ dan φ diasumsikan bernilai positif, maka $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, sehingga untuk setiap $\alpha \in (0,1]$ $|\arg(\lambda_i)| = \pi > \frac{\alpha\pi}{2}$, $i = 1,2$. Selanjutnya, misalkan λ_i , $i = 3,4,5$ merupakan akar dari (8). Berdasarkan *Proposition 1* (vi) dalam [12], jika $|\arg \lambda_j| > \frac{\alpha\pi}{2}$, $j = 3,4,5$, maka $m_3 > 0$.

Karena

$$\begin{aligned} m_3 &= abc - \mu\eta\beta S^* \\ &= (\eta + \varepsilon + \mu)(\mu + \xi + \gamma) \left(\frac{\mu \left(N - \frac{(\eta+\varepsilon+\mu)(\xi+\gamma+\mu)}{\eta\beta} \right)}{\frac{(\eta+\varepsilon+\mu)(\xi+\gamma+\mu)}{\eta\beta}} + 1 \right) - \mu(\eta + \varepsilon + \mu)(\xi + \gamma + \mu) \\ &= (\eta + \varepsilon + \mu)(\mu + \xi + \gamma) \mu \frac{\eta\beta N}{(\eta+\varepsilon+\mu)(\xi+\gamma+\mu)} - \mu(\eta + \varepsilon + \mu)(\xi + \gamma + \mu) \\ &= (\eta + \varepsilon + \mu)(\mu + \xi + \gamma) \mu (R_0 - 1) = ab\mu(R_0 - 1) > 0. \end{aligned}$$

maka $R_0 > 1$. Sebaliknya misalkan $R_0 > 1$. Karena

$$\begin{aligned} m_1 m_2 - m_3 &= (a + b + c)(ab + bc + ca - \eta\beta S^*) - (abc - \mu\eta\beta S^*) \\ &= (a + b + c)(ab + bc + ca - ab) - (abc - \mu ab) \\ &= (a + b + c)(bc + ca) - abc + \mu ab \end{aligned}$$

$$= (a + b + c)ca + (b + c)bc + \mu ab > 0.$$

Karena $m_1 > 0$, $m_3 > 0$, dan $m_1 m_2 - m_3 > 0$, maka $m_2 > 0$. Kondisi $m_1 > 0$, $m_3 > 0$, $m_3 > 0$, dan $m_1 m_2 - m_3 > 0$ memenuhi kriteria Routh-Hurwitz ((*Proposition 1* (iii) dalam [12])). Dengan demikian, jika $R_0 > 1$, maka titik setimbang P_1 stabil asimtotis lokal/■

3.3. Analisis Sensitivitas

Nilai parameter yang digunakan untuk perhitungan indeks sensitivitas merujuk pada Tabel 3 ketika $R_0 > 1$. Untuk bilangan $R_0 = \frac{\eta\beta N}{ab}$ dengan $a = \eta + \varepsilon + \mu$ dan $b = \mu + \xi + \gamma$ terdapat enam parameter yang akan dicari indeks sensitivitasnya yaitu $\beta, \eta, \varepsilon, \mu, \xi$ dan $\gamma > 0$. Nilai

Hasil analisis indeks sensitivitas parameter dari R_0 terhadap parameter pada model matematika orde fraksional penyebaran *worm* berbasis *Wi-Fi* pada *smartphone* diberikan pada Tabel 2 berikut.

Tabel 2 Indeks sensitivitas parameter

| Parameter | Nilai | Indeks Sensitivitas |
|---------------|-----------|---------------------|
| β | 0.000006 | 1 |
| η | 0.01 | 0,0006056 |
| ε | 0.00003 | -0,0000059 |
| μ | 0.0000003 | -0,0010280 |
| ξ | 0.06 | -0,8656775 |
| γ | 0.03 | -0,1427959 |

Berdasarkan Tabel 2 diperoleh bahwa

- Indeks sensitivitas untuk β adalah 1, artinya apabila laju kontak antara node rentan dengan node terinfeksi bertambah (berkurang) sebesar 10% akan mengakibatkan R_0 bertambah (berkurang) sebesar 10%.
- Indeks sensitivitas untuk η adalah 0,0006056, artinya apabila laju transisi dari node laten menjadi node terinfeksi bertambah (berkurang) sebesar 10% akan mengakibatkan R_0 bertambah (berkurang) sebesar 0,006%.
- Indeks sensitivitas untuk ε adalah -0,0000059, artinya apabila laju transisi dari node laten menjadi node node pulih bertambah (berkurang) sebesar 10% akan mengakibatkan R_0 berkurang (bertambah) sebesar 0,0000059%.
- Indeks sensitivitas untuk μ adalah -0,0010280, artinya apabila laju masuknya node baru dalam sistem dan laju kerusakan alami pada node bertambah (berkurang) sebesar 10% akan mengakibatkan R_0 berkurang (bertambah) sebesar 0,01%.

- e. Indeks sensitivitas untuk ξ adalah $-0,8656775$, artinya apabila laju masuknya node baru dalam sistem dan laju kerusakan alami pada node bertambah (berkurang) sebesar 10% akan mengakibatkan R_0 berkurang (bertambah) sebesar 8,7%.
- f. Indeks sensitivitas untuk γ adalah $-0,1427959$, artinya apabila laju masuknya node baru dalam sistem dan laju kerusakan alami pada node bertambah (berkurang) sebesar 10% akan mengakibatkan R_0 berkurang (bertambah) sebesar 1,4%.

Berdasarkan analisis sensitivitas parameter di atas diperoleh bahwa parameter pada model yang memiliki pengaruh besar terhadap laju perubahan model adalah β dan ξ .

3.4. Simulasi Numerik

Pada bagian ini akan dilakukan simulasi numerik terhadap model matematika penyebaran *worm* berbasis *Wi-Fi* pada *smartphone* dengan menggunakan bantuan *software* MATLAB. Nilai parameter yang digunakan pada simulasi ini disajikan pada Tabel 3 berikut:

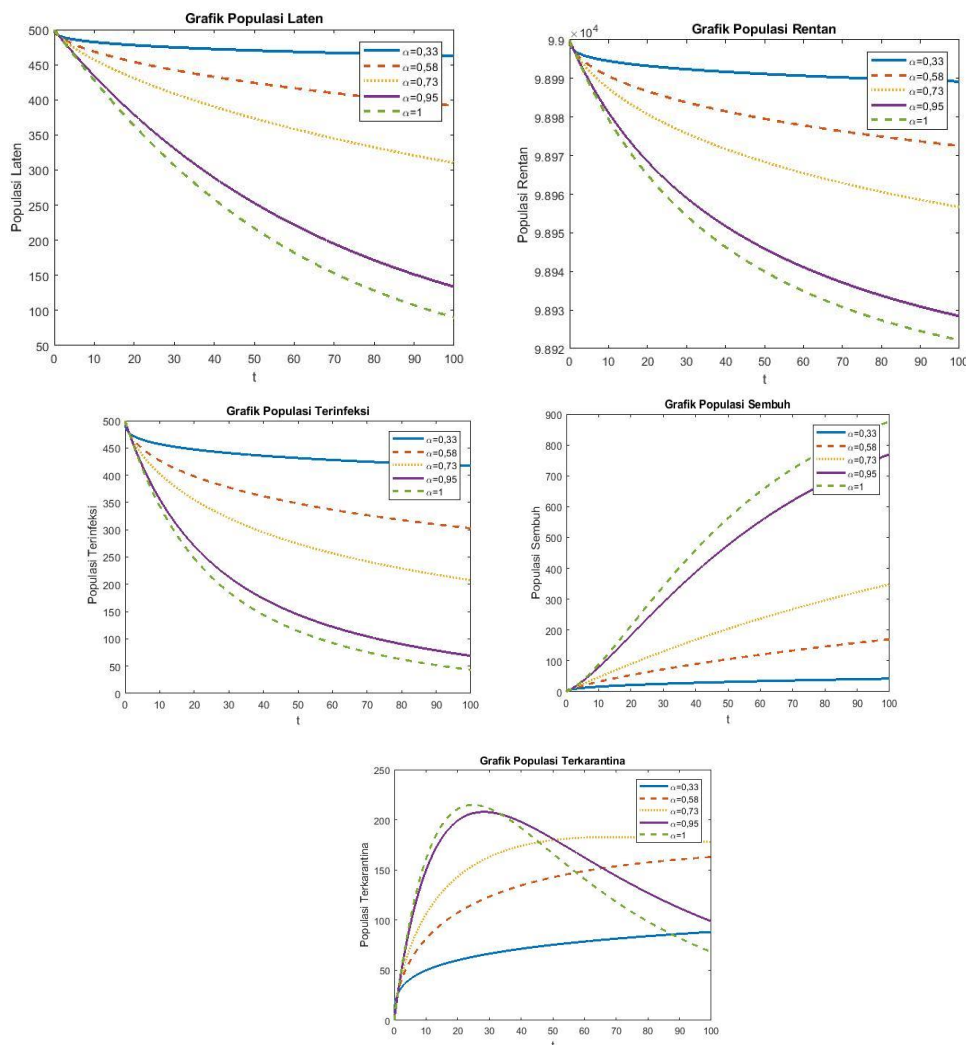
Tabel 3 Nilai parameter model matematika

| Parameter | Nilai | Sumber |
|---------------|-----------------------|--------|
| μ | 0.0000003 | [11] |
| β | $\beta_1 = 0.0000005$ | [11] |
| | $\beta_2 = 0.0000006$ | Asumsi |
| φ | 0.05 | [11] |
| γ | $\gamma_1 = 0.01$ | [11] |
| | $\gamma_2 = 0.03$ | Asumsi |
| ε | 0.00003 | Asumsi |
| η | $\eta_1 = 0.02$ | Asumsi |
| | $\eta_2 = 0.01$ | Asumsi |
| ξ | $\xi_1 = 0.05$ | [11] |
| | $\xi_2 = 0.06$ | Asumsi |

3.4.1. Simulasi Bebas *Worm*

Pada simulasi bebas *worm*, nilai awal yang digunakan adalah $(S_0, E_0, I_0, Q_0, R_0) = (99000, 500, 500, 0, 0)$. Berdasarkan nilai parameter pada Tabel 3 (untuk $\beta = \beta_1, \gamma = \gamma_1, \eta = \eta_1, \xi = \xi_1$) diperoleh $R_0 = 0.832 < 1$ yang menunjukkan bahwa titik setimbang bebas *worm* stabil asimtotis lokal. Simulasi dilakukan dengan mengambil nilai orde fraksional $\alpha = 0,33, 0,58, 0,73, 0,95$, dan 1 serta interval waktu selama 100 satuan waktu.

Berikut hasil simulasi model matematika penyebaran *worm* berbasis *Wi-Fi* pada *smartphone*.



Gambar 2. Grafik dinamika perubahan populasi model matematika penyebaran *worm* berbasis *Wi-Fi* pada *smartphone* untuk $R_0 < 1$ dan nenerapa orde fraksional α .

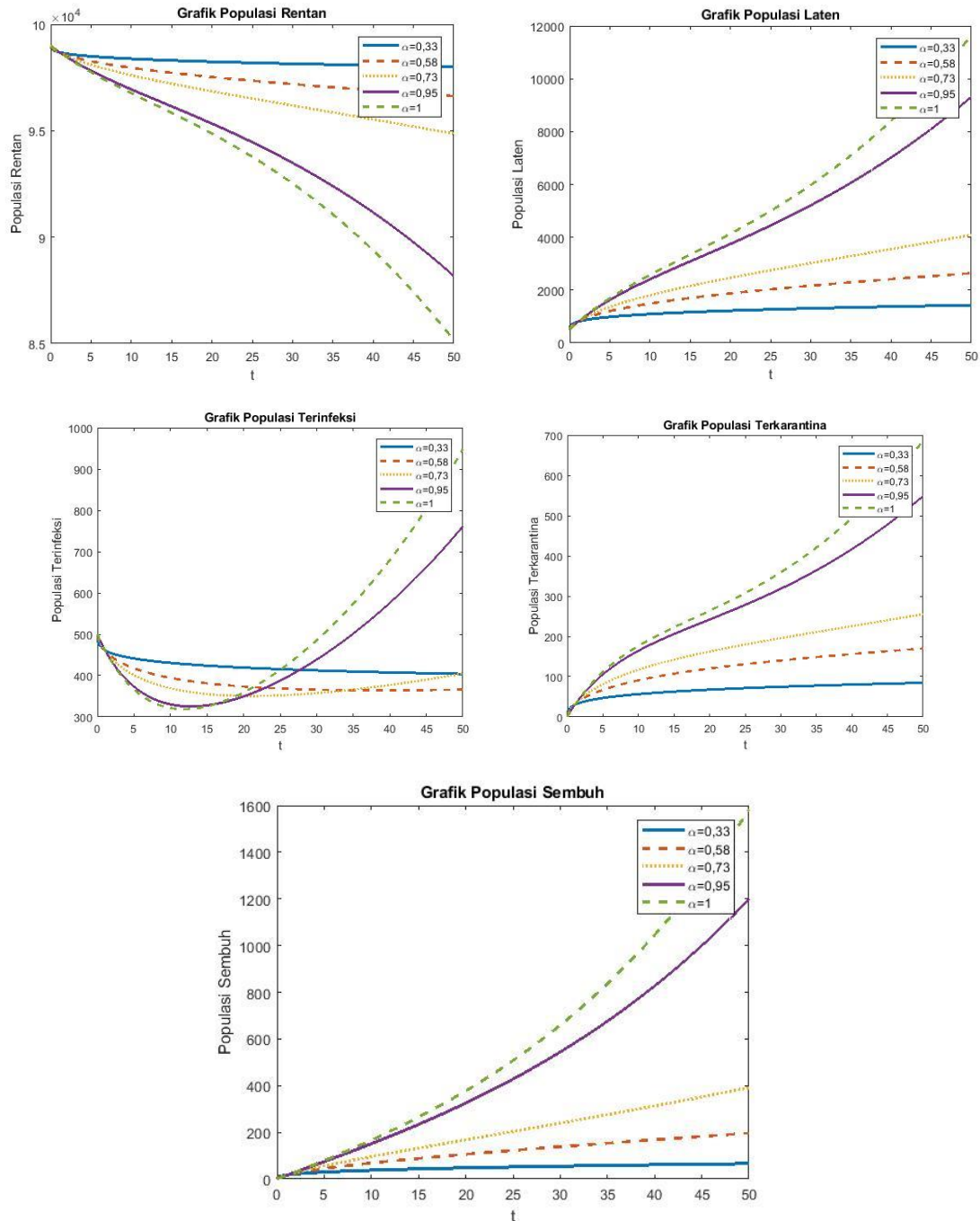
Berdasarkan Gambar 2 pada setiap α dapat dilihat bahwa populasi *node* rentan mengalami kenaikan, populasi *node* laten dan populasi *node* terinfeksi mengalami penurunan karena tidak adanya penyebaran *worm* pada jaringan *Wi-Fi*, sehingga populasi *node* yang dikarantina mengalami penurunan. Oleh karena tidak adanya penyebaran *worm* pada jaringan *Wi-Fi* maka populasi *node* pulih mengalami kenaikan. Hal tersebut mengindikasikan kondisi bebas *worm*.

3.4.2. Simulasi Kondisi Endemik

Nilai awal yang digunakan pada simulasi kondisi endemik adalah $(S_0, E_0, I_0, Q_0, R_0) = (99000, 500, 500, 0, 0)$. Berdasarkan nilai parameter Tabel 3 (untuk $\beta = \beta_2, \gamma = \gamma_2, \eta = \eta_2, \xi = \xi_2$) diperoleh $R_0 = 6.646 > 1$ yang menunjukkan bahwa titik setimbang endemik *worm* stabil asimtotis lokal. Simulasi dilakukan dengan mengambil nilai

orde fraksional $\alpha = 0,33, 0,58, 0,73, 0,95,$ dan 1 serta interval waktu selama 100 satuan waktu.

Berikut hasil simulasi model matematika penyebaran *worm* berbasis *Wi-Fi* pada *smartphone*.



Gambar 3. Dinamika perubahan populasi model matematika penyebaran *worm* berbasis *Wi-Fi* pada *smartphone* untuk $R_0 > 1$ dan beberapa orde fraksional α

Berdasarkan Gambar 3 pada setiap α dapat dilihat bahwa populasi node rentan mengalami penurunan dari kondisi awal yang diberikan sedangkan populasi node laten, populasi

node terinfeksi, populasi node yang di karantina mengalami kenaikan. Oleh karena populasi node laten dan populasi node terinfeksi akan di karantina oleh *base station Wi-Fi*, maka populasi node laten dan populasi node terinfeksi akan menjadi populasi node pulih. Akibatnya, populasi node pulih mengalami kenaikan. Hal tersebut mengindikasikan kondisi endemik atau adanya penyebaran *worm*.

Berdasarkan Gambar 2 dan Gambar 3 di atas diperoleh bahwa jika orde α semakin besar, populasi akan mengalami kenaikan lebih cepat atau mengalami penurunan lebih lambat.

4 Simpulan

Berdasarkan simulasi numerik yang telah dilakukan, diperoleh bahwa pada kondisi bebas *worm*, yaitu $R_0 < 1$, populasi *node* rentan mengalami kenaikan, populasi *node* laten dan populasi *node* terinfeksi mengalami penurunan karena tidak adanya penyebaran *worm* pada jaringan *Wi-Fi*, sehingga populasi node yang dikarantina mengalami penurunan. Oleh karena tidak adanya penyebaran *worm* pada jaringan *Wi-Fi* maka populasi node pulih mengalami kenaikan. Hal tersebut mengindikasikan kondisi bebas *worm*. Di sisi lain, pada kondisi endemik, yaitu $R_0 > 1$, populasi node rentan mengalami penurunan dari kondisi awal yang diberikan sedangkan populasi *node* laten, populasi *node* terinfeksi, populasi *node* yang di karantina mengalami kenaikan. Oleh karena populasi *node* laten dan populasi *node* terinfeksi akan di karantina oleh *base station Wi-Fi*, maka populasi *node* laten dan populasi *node* terinfeksi akan menjadi populasi *node* pulih. Akibatnya, populasi *node* pulih mengalami kenaikan. Hal tersebut mengindikasikan kondisi endemik atau adanya penyebaran *worm*. Selain itu, dapat disimpulkan pula bahwa jika orde α semakin besar, populasi akan mengalami kenaikan lebih cepat atau mengalami penurunan lebih lambat.

Daftar Pustaka

- [1] A. Sukmaaji and Rianto, *Jaringan Komputer*. Yogyakarta: Andi Publisher, 2008.
- [2] Kominfo, “Kemkominfo: Indonesia Raksasa Digital Asia. Kementrian Komunikasi dan Informatika Republik Indonesia.” .
- [3] Xiao X., Fu P., Dou C., Li Q., Hu G., and Xia S., “Design and analysis of SEIQR worm propagation model in mobile internet,” *J. Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, vol. 43, pp. 341–350, 2017.
- [4] Y. H. and C. G., “Network virus epidemic model with the point to group information propagation,” *J. Appl. Math. Comput.*, vol. 206, pp. 357–67, 2008.

- [5] S. Das and P. K. Gupta, "A mathematical model on fractional Lotka-Volterra equations," *J. Theor. Biol.*, vol. 277, pp. 1–6, 2011.
- [6] C. N. Angstmann, H. B.I., and M. A.V., "A fractional-Order Infectivity SIR Model," *Physica A*, vol. 2016, pp. 86–93, 2016.
- [7] S. Z. Rida and A. A. M. Arafa, "New Method for Solving Linear Fractional Differential Equations," *Int. J. Differ. Equations*, vol. 2011, p. 814132, 2011.
- [8] M.S. Tavazoei, "A necessary condition for double scroll attractor existence in fractional-order systems," *Phys. Lett. A*, vol. 367, pp. 102–113, 2007.
- [9] V. den Driessche and J. Watmough, "Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission," *Math. Biosci.*, vol. 180, pp. 29–48, 2002.
- [10] C. N., H. J.M., and C. J.M., "Determining Important Parameters In the Spread of Malaria Through the Sensitivity Analysis of a Mathematical Model," *Bull. Math. Biol.*, vol. 70, pp. 1272–1296, 2008.
- [11] A. H. and R. C., *Elementary Linear Algebra*. United State: Wiley, 2014.
- [12] A. E., E.-S. A. M.A., and E.-S. Hala A.A., "On some Routh-Hurwitz conditions for fractional order differential equations and their applications in Lorenz, Rössler, Chua and Chen systems," *Phys. Lett. Sect. A Gen. At. Solid State Phys.*, vol. 358, no. 1, pp. 1–4, 2006.