

Kontrol Optimum pada Model Prey-Predator dengan Pemanenan pada Ikan Prey dan Ikan Predator

Oryza Safitri¹, Mardlijah²

^{1,2} Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS)

Jl. Raya ITS, Keputih, Kec. Sukolilo, Kota Surabaya, Jawa Timur 60111

^{1,2} Departemen Matematika Pasca Sarjana, Fakultas Matematika, Komputasi, dan Sains Data

e-mail: safitrioryza@gmail.com¹, mardlijah@matematika.its.ac.id²

Abstrak

Model *prey-predator* didasari oleh hubungan interaksi predasi antara suatu organisme yang memakan suatu organisme lainnya, dalam kasus ini yaitu ikan *prey* dan ikan *predator*. Selanjutnya diberi perlakuan pemanenan pada ikan *prey* dan ikan *predator*. Untuk menjaga agar tindakan pemanenan tidak mengakibatkan kelangkaan suatu jenis ikan, dilakukan kontrol optimum berupa penambahan makanan lain pada ikan *predator*. Kontrol optimum ini dimaksudkan agar hasil pemanenan yang didapatkan maksimal sekaligus menjaga keberlangsungan ekosistem pada ikan *prey* dan ikan *predator*. Kemudian didapatkan titik-titik ekuilibrium dengan satu titik ekuilibrium yang stabil yaitu di titik (75.39, 4.20). Selanjutnya hasil kontrol optimal, populasi ikan *prey* dan ikan *predator* lebih banyak, dibandingkan populasi ikan *prey* dan ikan *predator* sebelum dikontrol.

Kata kunci : Model Prey-Predator, Kontrol Optimum, Penambahan Makanan

Abstract

The pre-predator model is based on the interaction of predation between an organism that eats another organism, in this case the prey and predatory fish. Furthermore, they were given harvest treatment on prey and predatory fish. Extreme harvesting can result in a scarcity of fish. So that optimum control is needed in the form of adding other foods to predatory fish. This is intended to maximize the yield of harvesting while preserving the ecosystem sustainability of prey and predatory fish. Then the equilibrium points are obtained with one stable equilibrium point, namely at the point (75.39, 4.20). Furthermore, the results of optimal control, prey and predatory fish populations were higher, compared to prey and predatory fish populations before being controlled.

Keywords: Prey-Predator Model, Optimum Control, Additional Food

1 Pendahuluan

Ekosistem merupakan sistem ekologi yang terbentuk oleh hubungan timbal balik antara makhluk hidup dengan lingkungannya. Suatu tingkatan organisasi dikatakan sebagai suatu sistem karena memiliki komponen-komponen dengan fungsi berbeda yang terkoordinasi secara baik sehingga masing-masing komponen terjadi hubungan timbal balik. Hubungan timbal balik terwujudkan dalam rantai makanan [1]. Rantai makanan terjadi karena adanya interaksi antar makhluk hidup. Bentuk interaksi pada rantai makanan salah satunya yaitu predasi (mangsa-

pemangsa). Predasi adalah bentuk interaksi antara suatu organisme yang memakan suatu organisme lainnya pada suatu tempat tertentu. Dalam matematika, suatu bentuk interaksi predasi dimodelkan sebagai model *prey-predator*.

Model *prey-predator* adalah model matematika dengan asumsi bahwa adanya interaksi predasi antara *predator* sebagai organisme pemangsa dan *prey* sebagai organisme yang dimangsa. Dalam model *prey-predator* yang diberi perlakuan pemanenan biasanya banyak terjadi pada ekosistem perairan dengan ikan berukuran besar yang menjadi pemangsa (*predator*) dan ikan berukuran kecil yang dimangsa (*prey*).

Dalam memenuhi kebutuhan hidup, manusia aktif melakukan eksploitasi pada segala bidang, termasuk pada pemanenan. Khususnya nelayan sebagai mata pencaharian, aktif melakukan pemanenan pada ikan. Pada umumnya nelayan memanen lebih dari satu jenis ikan. Namun ekosistem perairan sering kali terganggu dengan kegiatan eksploitasi manusia yang berlebihan. Pemanenan ikan yang berlebihan dapat menyebabkan kelangkaan bahkan punahnya suatu spesies ikan. Sehingga menjaga keberlangsungan ekosistem perairan sekaligus dapat memenuhi kebutuhan hidup manusia dari kedua pemanenan tersebut adalah sangat penting. Oleh karena itu, dalam penelitian ini akan dilakukan optimal kontrol pemanenan ikan *prey* dan ikan *predator* pada model *prey-predator*.

Beberapa penelitian yang telah dilakukan terhadap sistem *prey-predator*, yaitu penelitian [2] tentang analisis model mangsa-pemangsa Michaelis-Menten dengan pemanenan konstan pada populasi *prey*. Penelitian [3] tentang *Effort Dynamics in a Prey-Predator Model with Harvesting*. Pada penelitian tersebut membahas kestabilan model *prey-predator* dengan perlakuan pemanenan pada *prey* dengan kontrol optimal. Penelitian selanjutnya [4] tentang Analisis Kestabilan Model *Prey-Predator* dengan pemanenan konstan pada ikan *prey*. Pada penelitian tersebut membahas analisis kestabilan model *prey-predator* dengan perlakuan pemanenan konstan pada ikan *prey*. Penelitian lainnya [5] tentang Analisa Kestabilan dan Kendali Optimal Pada Model Pemanenan *Prey-Predator* dengan Fungsi Respon Tipe III. Penelitian selanjutnya juga penelitian [6] tentang Kendali Optimal pada Sistem *Prey-Predator* dengan Pemberian Makanan Alternatif pada *Predator*. Model *Prey-Predator* dalam paper tersebut kondisi kematian *predator* disebabkan karena perebutan makanan sesama *predator* diabaikan.

2 Metode Penelitian

Penelitian ini dilakukan dengan didahului penentuan titik ekuilibrium dari model matematika *prey-predator*. Dilanjutkan dengan uji stabilitas titik ekuilibrium dengan cara

memasukkan nilai titik ekuilibrium ke dalam matriks Jacobian yang diikuti pencarian nilai eigen dari matriks tersebut untuk menentukan kestabilannya. Selanjutnya ditentukan model fungsi objektif dari model prey-predator. Berikutnya dilakukan perhitungan kontrol optimal berdasarkan fungsi objektif yang diperoleh dilanjutkan dengan penyelesaian menggunakan prinsip maksimum Pontryagin. Simulasi dilakukan dengan menggunakan perangkat lunak Matlab. Dari hasil simulasi dilakukan analisa untuk mendapatkan simpulan.

3 Hasil dan Pembahasan

3.1 Model Prey-Predator

Populasi ikan *prey* x terus tumbuh secara alami dengan laju pertumbuhan sebesar r terhadap t waktu. Sedangkan laju perkapita populasi ikan *prey* berkurang sebesar $\frac{x}{K}$ untuk setiap bertambahnya ikan *prey* karena keterbatasan daya dukung lingkungan. Terdapat interaksi antara ikan *prey* dan ikan *predator* yang mengakibatkan populasi ikan *prey* berkurang dengan adanya laju peningkatan relatif akibat predasi, sebanding dengan laju kelahiran populasi ikan *prey* sebesar $\frac{\alpha}{a+x}$ dan mengakibatkan pula, laju pertumbuhan ikan *predator* semakin meningkat sebesar β . Adanya interaksi antara ikan *prey* dan ikan *predator* menyebabkan dampak negatif bagi ikan *predator* karena terjadinya persaingan antar sesama ikan *predator* dalam memperebutkan makanan, sehingga meningkatkan laju kematian sebesar γ . Ikan *predator* mengalami kematian secara alami sebesar b [3]. Selanjutnya diberi perlakuan pemanenan pada ikan *prey* dan ikan *predator*, yang dituliskan dalam model *prey-predator* [3] berikut :

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) - \frac{\alpha x(t)y(t)}{a+x(t)} - h_1 x(t) \quad (1)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{\beta \alpha x(t)y(t)}{a+x(t)} - by(t) - \gamma y(t)^2 - h_2 y(t) \quad (2)$$

dengan :

$x(t)$ adalah banyaknya populasi ikan *prey* terhadap t waktu,

$y(t)$ adalah banyaknya populasi ikan *predator* terhadap t waktu,

r adalah laju pertumbuhan interistik populasi ikan *prey*,

b adalah laju kematian alami populasi ikan *predator*,

$\frac{\alpha}{a+x}$ adalah laju penangkapan relative maksimum akibat predasi oleh ikan *predator*,

β adalah pertumbuhan populasi ikan *predator*,

γ adalah laju kematian ikan *predator* akibat perebutan makanan sesama predator,

K adalah daya kapasitas maksimum populasi ikan *prey*,

h_1, h_2 adalah konstanta pemanenan

dan $x(t), y(t), r, b, a, \alpha, \beta, \gamma, K, h_1, h_2$ adalah parameter positif.

3.2 Titik Ekuilibrium

Dalam proses mencari titik ekuilibrium atau titik setimbang, diperlukan parameter-parameter yang didapatkan berdasarkan kondisi lapangan. Parameter yang digunakan dalam model *prey-predator* dengan pemanenan konstan pada ikan *prey* menggunakan parameter dan nilai awal yang dirangkum dalam Tabel 1 [3].

Tabel 1. Nilai Awal yang digunakan

Variabel	Nilai
$x(t)$	80
$y(t)$	20

Tabel 2. Nilai Parameter

Parameter	Nilai
r	0.8
K	100
α	0.75
β	0.75
γ	0.08
a	10
b	0.001
h_1	0,16
h_2	0,16

Berdasarkan persamaan (1) dan (2) dicari titik ekuilibriumnya dengan $\dot{x} = 0$ dan $\dot{y} = 0$, lalu substitusi nilai pada Tabel 1 dan Tabel 2. Selanjutnya didapatkan titik-titik ekuilibrium yaitu: (0,0), (0, -2.0125), (80, 0), (75.39, 4.20), (-7.697+8.48i, 2.921+7.723i), (-7.697-7.42i, 2.921-7.723i).

3.3 Menguji Kestabilan Titik Ekuilibrium

Titik ekuilibrium yang didapatkan pada tahap sebelumnya selanjutnya akan diuji stabilitasnya. Untuk menguji kestabilan titik ekuilibrium, dilakukan pencarian nilai eigen pada setiap titik kestabilan. Tahap pertama dalam mencari nilai eigen adalah menentukan matriks Jacobian berdasarkan persamaan (1) dan (2), yaitu:

$$A = \begin{bmatrix} r \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{rx}{K} - \frac{\alpha y}{a+x} + \frac{\alpha xy}{(a+x)^2} - h_1 & -\frac{\alpha x}{a+x} \\ \frac{\beta \alpha y}{a+x} - \frac{\alpha xy}{(a+x)^2} & -b + \frac{\beta \alpha y}{a+x} - 2\gamma y - h_2 \end{bmatrix}$$

Kemudian dicari

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

- Untuk titik (0,0) didapatkan nilai $\lambda_1 = -0.161$ dan $\lambda_2 = 0.64$. Hal ini menunjukkan bahwa di titik ekuilibrium (0,0) tidak stabil dengan jenis kestabilan *saddle node*.
- Untuk titik (0, -2.0125) didapatkan nilai $\lambda_1 = 0.161$ dan $\lambda_2 = 0.79$. Hal ini menunjukkan bahwa di titik ekuilibrium (0, -2.0125) tidak stabil.
- Untuk titik (80, 0) didapatkan nilai $\lambda_1 = -0.64$ dan $\lambda_2 = 0.339$. Hal ini menunjukkan bahwa di titik ekuilibrium (80, 0) tidak stabil dengan jenis kestabilan *saddle node*.
- Untuk titik (75.39, 4.20) didapatkan nilai $\lambda_1 = -0.56$ dan $\lambda_2 = -0.345$. Hal ini menunjukkan bahwa di titik ekuilibrium (75.39, 4.20) stabil dengan jenis kestabilan stabil asimtotik. Artinya ketika ikan *prey* sebanyak 75.39 satuan dan ikan *predator* sebanyak 4.20 satuan, kedua jenis ikan tersebut dapat hidup secara berdampingan.
- Untuk titik $(-7.697+8.48i, 2.921+7.723i)$ didapatkan nilai $\lambda_1 = 0.6 + 0.98i$ dan $\lambda_2 = -0.21 - 0.94i$. Hal ini menunjukkan bahwa titik ekuilibrium $(-7.697+8.48i, 2.921+7.723i)$ tidak stabil dengan jenis kestabilan *saddle node*.
- Untuk titik $(-7.697-8.48i, 2.921-7.723i)$ didapatkan nilai $\lambda_1 = 0.6 - 0.98i$ dan $\lambda_2 = -0.21 + 0.94i$. Hal ini menunjukkan bahwa titik ekuilibrium $(-7.697-8.48i, 2.921-7.723i)$ tidak stabil dengan jenis kestabilan *saddle node*.

3.4 Kontrol Optimal

Pada sistem diberi perlakuan kontrol berupa pemberian makanan tambahan pada ikan predator. Sehingga pada persamaan (1) dan (2) ditambahkan fungsi kontrol:

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) - \frac{\alpha x(t)(1-c)y(t)}{a+x(t)} - h_1 x(t) \quad (3)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{\beta \alpha x(t)(1-c)y(t)}{a+x(t)} + Cy - by(t) - \gamma y(t)^2 - h_2 y(t), \quad (4)$$

Daerah penyelesaian pada bidang biologi khususnya pertumbuhan adalah pada kuadran positif yaitu \mathbb{R}^2_+ .

3.5 Penyelesaian Kontrol Optimal

Fungsi Obyektif

Pada kontrol yang diterapkan adalah memaksimalkan populasi ikan *prey* dan ikan *predator* dan meminimumkan ongkos. Maka fungsi J adalah:

$$\text{Max } J = p_1 x(t) + p_2 y(t) - p_3 \int_0^{t_f} C^2 dt \quad (5)$$

Dengan p_1, p_2, p_3 adalah konstanta pembobot C adalah variabel ongkos. Dengan syarat batas:

$$x(0) = x_0 ; y(0) = y_0$$

$$C_{max} \leq C \leq C_{min}$$

Fungsi Hamiltonian

Berdasarkan fungsi J dan persamaan (1) dan (2) dibuat fungsi Hamiltonian sebagai berikut :

$$H = -p_3 C^2 + \lambda_1 \left(rx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K} \right) - \frac{\alpha x(t)(1-C)y(t)}{a+x(t)} - hx(t) \right) + \lambda_2 \left(\frac{\beta \alpha x(t)(1-C)y(t)}{a+x(t)} + Cy - by(t) - \gamma y(t)^2 - hy(t) \right)$$

Kondisi Stasioner

Selanjutnya dicari titik stasioner pada fungsi Hamiltonian berikut:

$$\frac{\partial H}{\partial C} = 0$$

Didapatkan

$$C^* = \frac{y + \frac{\lambda_1 \alpha x y}{a+x} - \frac{\lambda_2 \alpha \beta x y}{a+x}}{2p_3}$$

Sehingga didapatkan kontrol optimal

$$C = \begin{cases} C_{min}, & \text{jika } \frac{\partial H}{\partial C} > 0 \\ C^* = \frac{y + \frac{\lambda_1 \alpha x y}{a+x} - \frac{\lambda_2 \alpha \beta x y}{a+x}}{2p_3}, & \text{jika } \frac{\partial H}{\partial C} = 0 \\ C_{max}, & \text{jika } \frac{\partial H}{\partial C} < 0 \end{cases}$$

Persamaan State

Selanjutnya berdasarkan fungsi Hamiltonian, didapatkan persamaan state berikut:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda_1} = rx - h_1 x - \frac{rx^2}{K} + \frac{\alpha x(C-1)y}{a+x}$$

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial \lambda_2} = -\frac{\beta \alpha x(C-1)y}{a+x} - by - \gamma y^2 - h_2 y$$

Persamaan Co-State

Selanjutnya berdasarkan fungsi Hamiltonian, didapatkan persamaan co-state berikut :

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\lambda_1 r + \lambda_1 h_1 - \frac{\alpha \lambda_1 y(C-1)}{a+x} + \frac{2\lambda_1 r x}{K} + \frac{\alpha \beta \lambda_2 y(C-1)}{a+x} + \frac{\alpha \lambda_1 x y(C-1)}{(a+x)^2} - \frac{\alpha \beta \lambda_2 x y(C-1)}{(a+x)^2}$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial y} = -C + \frac{\alpha \beta \lambda_2 x(C-1)}{(a+x)} + b \lambda_2 - h_2 \lambda_2 + 2\gamma \lambda_2 y - \frac{\alpha \lambda_1 x(C-1)}{a+x}$$

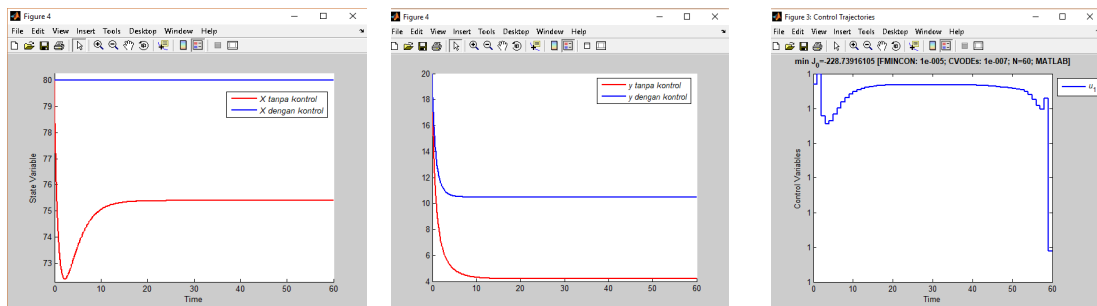
3.6 Hasil Simulasi

Pada simulasi ini dibuat 3 kondisi. Kondisi pertama ketika tanpa kendali dimana *predator* tidak diberikan makanan alternatif ($C = 0$), kondisi kedua ketika tanpa kendali dimana *predator* diberikan makanan alternatif secara penuh ($C = 1$) dan kondisi ketiga ketika dengan kendali dimana *predator* tidak diberikan makanan alternatif secara penuh $C_{max} \leq C \leq C_{min}$.

Kemudian dibandingkan untuk kombinasi beberapa nilai p_1, p_2, p_3 . Simulasi yang dilakukan menggunakan program DOT cvp dengan aplikasi MATLAB. Berikut kombinasi nilai p_1, p_2, p_3 .

Berikut simulasi hasil *running program*:

- Simulasi ke I dengan nilai-nilai parameter $p_1 = 0.04$; $p_2 = 0.05$; $p_3 = 0.05$ yang hasilnya ditunjukkan pada Gambar 1



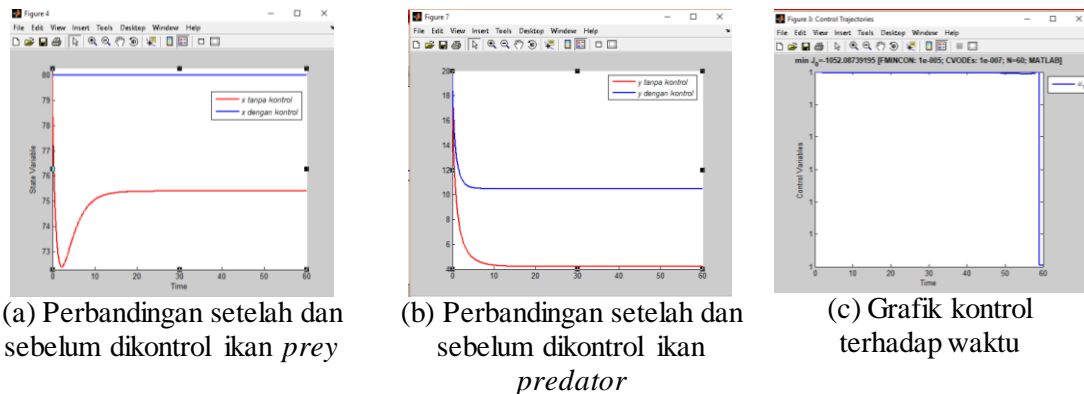
(a) Perbandingan setelah dan sebelum dikontrol ikan *prey*

(b) Perbandingan setelah dan sebelum dikontrol ikan *predator*

(c) Grafik kontrol terhadap waktu

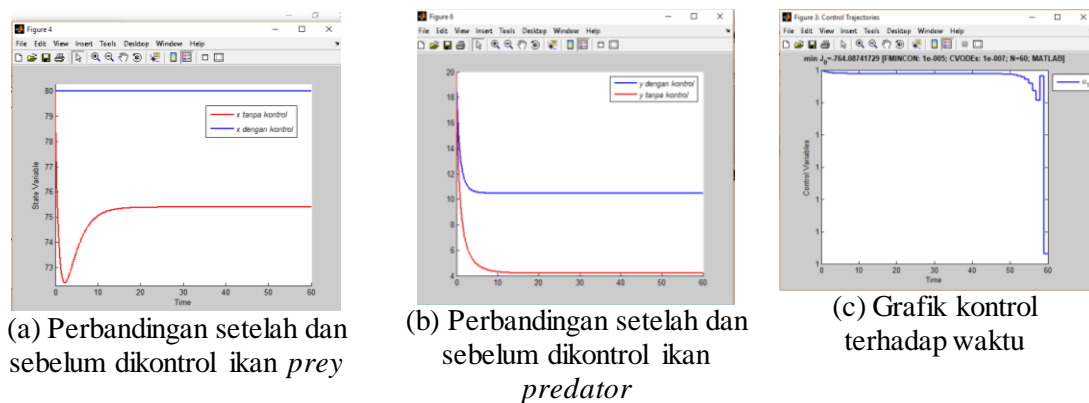
Gambar 1. Grafik Hasil Simulasi I

- Simulasi ke II dengan nilai-nilai parameter $p_1 = 0.1$; $p_2 = 0.9$; $p_3 = 0.05$ yang hasilnya ditunjukkan pada Gambar 2



Gambar 2. Grafik Hasil Simulasi II

- Simulasi III dengan nilai-nilai parameter $p_1 = 0.01$; $p_2 = 0.9$; $p_3 = 0.05$ yang hasilnya ditunjukkan pada Gambar 3



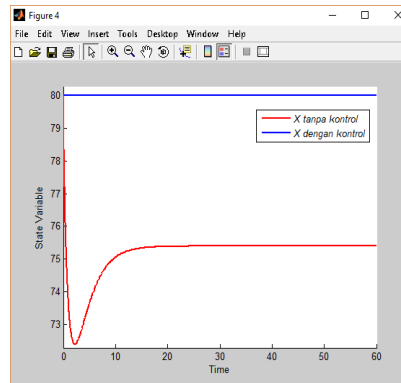
Gambar 3. Grafik Hasil Simulasi III

Berdasarkan Simulasi I, Simulasi II, dan Simulasi III, didapatkan bahwa nilai p_1, p_2, p_3 yang optimum adalah $p_1 = 0,04, p_2 = 0,05, p_3 = 0,05$ dengan hasil C sebesar 228,73 satuan dalam waktu $0 < t < 60$. Banyaknya ikan *prey* x dan dan ikan *predator* y pada setiap kondisi parameter yang berbeda-beda adalah sama. Sementara biayanya semakin tinggi bila konstanta pembobot p_2 , semakin besar. Hal ini disebabkan karena bobot pemberian makanan yang besar, akan menyebabkan biaya yang besar.

Selanjutnya digunakan kondisi paling optimum yaitu simulasi I untuk menunjukkan perubahan populasi ikan *prey* sebelum dan sesudah dikontrol.

1. Pertumbuhan Populasi *Prey*

Berikut merupakan grafik populasi ikan *prey* sebelum dan setelah dikontrol:

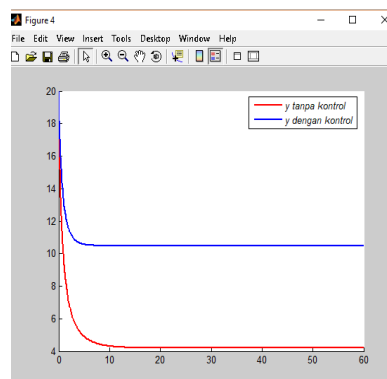


Gambar 4. Grafik Populasi *Prey* di Semua Kondisi

Berdasarkan Gambar 4, dapat dilihat bahwa ketika $C = 0$, faktor laju pertumbuhan intrinsik dan daya dukung lingkungannya lebih besar dari pada faktor predasi dari *predator* dan faktor upaya pemanenan. Sehingga *prey* dapat tumbuh dengan baik karena masih didukung oleh tersedianya logistik dan ruang untuk hidup. Sedangkan ketika $C = 1$, pertumbuhannya meningkat dengan cepat. Hal ini terjadi karena tidak adanya laju predasi *predator* ke *prey* serta laju pertumbuhan intrinsik dan kapasitas daya dukung lingkungan yang besar. Hal ini juga disebabkan oleh pemberian makanan tambahan pada ikan *predator*, sehingga menyebabkan ikan *predator* mendapatkan pilihan makanan lain. Sehingga mengakibatkan populasi ikan *prey* meningkat. Secara keseluruhan pertumbuhan populasi ikan *prey* setelah diberi kontrol berupa pemberian makanan tambahan pada ikan *predator*, populasi ikan *prey* lebih banyak atau dapat dikatakan mengalami penambahan.

2. Pertumbuhan Populasi *Predator*

Berikut merupakan grafik populasi ikan *predator* sebelum dan setelah di kontrol :



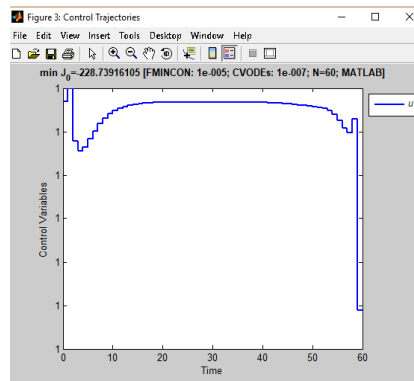
Gambar 5. Grafik Populasi *Predator* di Semua Kondisi

Berdasarkan Gambar 5, dapat dilihat bahwa ketika $C = 0$, pertumbuhan *predator* menurun. Hal ini terjadi karena jumlah *prey* yang sedikit dari pada *predator*

mengakibatkan kebutuhan *predator* kurang terpenuhi. Selain itu juga terdapat faktor kematian alami *predator* serta upaya pemanenan terhadap *predator*. Sedangkan ketika $C = 1$, pertumbuhannya meningkat. Hal ini terjadi karena Adanya makanan tambahan diberikan pada ikan *predator*, sehingga menyebabkan ikan *predator* mendapatkan pilihan makanan lain. Melimpahnya makanan ikan *predator* menjadi faktor utama meningkat populasi ikan *predator*. Secara keseluruhan pertumbuhan populasi ikan *predator* setelah diberi kontrol berupa pemberian makanan tambahan pada ikan *predator*, populasi ikan *predator* lebih banyak atau dapat dikatakan mengalami penambahan.

3. Pemberian Makanan Tambahan pada Ikan *Predator*

Untuk mendapatkan populasi *prey* dan *predator* yang maksimal maka pemberian makanan alternatif pada *predator* harus sesuai dengan grafik kendali optimal seperti yang ditunjukkan pada Gambar 6 berikut:



Gambar 6. Grafik Kontrol Optimal Pemberian Makanan pada waktu $0 < t < 60$

Dari awal hingga waktu 59 satuan, jumlah makanan alternatif yang diberikan sebanyak 1 artinya pemberian makanan diberikan secara penuh. Kemudian diwaktu 59 satuan berangsur menurun hingga waktu 60 satuan. Waktu 60 satuan ke atas tidak diberikan makanan tambahan. Dari perhitungan fungsi obyektif didapatkan bahwa biaya yang dikeluarkan saat diberikan makanan alternatif secara optimal nilainya jauh lebih kecil dari pada saat diberikan makanan alternatif secara penuh. Dan jumlah populasi *prey* dan *predator* di waktu awal saat diberikan makanan alternatif secara optimal, nilainya jauh lebih besar dari pada saat tidak diberikan makanan alternatif.

4 Simpulan

Dari penelitian ini dapat disimpulkan bahwa :

1. Analisis kestabilan menunjukkan bahwa terdapat 6 titik kekuilibrium dengan 1 titik yang stabil dengan jenis kestabilan stabil asimtotik, yaitu di titik (75.39, 4.20).
2. Berdasarkan kontrol optimal berupa pemberian makanan tambahan, jumlah populasi *prey* dan *predator* saat diberikan makanan tambahan secara optimal, nilainya jauh lebih besar dari pada saat tidak diberikan makanan alternatif. Semakin tinggi konstanta pembobot pada ikan *predator* diberikan, semakin tinggi biayanya.

5 Daftar Pustaka

- [1] Indriyanto. 2012. *Ekologi Hutan: Cetakan ke-4*. Jakarta: PT Bumi Aksara.
- [2] Dwaradi, H. 2011. *Analisis Model Mangsa-pemangsa Michaelis-Menten dengan Pemanenan pada populasi Mangsa*. Bogor: Institut Pertanian Bogor.
- [3] Kar dan Chakraborty. 2010. *Effort Dynamics in a Prey-Predator Model with Harvesting*. International Journal of Information and Systems Sciences. Vol. 6 No. 3 pp. 318-332.
- [4] Afifah, Luluk Ianatul. 2015. *Analisis Kestabilan Predator-Prey dan Model Pemanenan pada Ikan Prey*. Malang: Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
- [5] Rifa'i dan Subchan. 2015. *Analisa Kestabilan dan Kendali Optimal pada Model Pemanenan Prey Predator dengan Fungsi Respon Tipe III*. Prosiding Seminar Nasional Pendidikan Matematika UMS 2015.
- [6] F. Resmi dan Subchan. 2014. *Kendali Optimal pada Sistem Prey Predator dengan Pemberian Makanan Alternatif pada Predator*, <http://digilib.its.ac.id/public/TTS-paper-33870-1210100069-paper.pdf>.