Limits: Journal of Mathematics and Its Applications
E-ISSN: 2579-8936
P-ISSN: 1829-605X
Vol. 17, No. 1, Juli 2020, 1-8
DOI: http://dx.doi.org/10.12962/limits.v17i1.6030

Kategori Modul yang Dibangun oleh $\mathcal{U}_V$

Fitriani[1]*, Ahmad Faisol[2]
[1,2]Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung
Bandar Lampung, Lampung, Indonesia
e-mail:[1]fitriani.1984@fmipa.unila.ac.id, [2]ahmadfaisol@fmipa.unila.ac.id

Diajukan:22 Oktober 2019, Diperbaiki: 27 Januari 2020, Diterima:23 Mei 2020

Abstrak

Misalkan $\mathcal{U}$ keluarga modul atas R dan V merupakan submodul dari jumlah langsung beberapa elemen di dalam keluarga $\mathcal{U}$. Modul N atas R dibangun oleh $\mathcal{U}_V$ jika terdapat epimorfisma dari V ke N. Modul yang dibangun oleh $\mathcal{U}_V$ merupakan perumuman dari modul yang dibangun oleh $\mathcal{U}$. Perumuman ini dilakukan dengan menggunakan konsep barisan V-koeksak dari modul. Di dalam paper ini, dikonstruksi kategori dari modul-modul yang dibangun oleh $\mathcal{U}_V$ beserta beberapa sifat-sifatnya. Selain itu, ditunjukkan bahwa kategori modul yang dibangun oleh $\mathcal{U}_V$ merupakan kategori pre-aditif.

Kata Kunci: $\mathcal{U}_V$-generator, barisan V-koeksak, kategori pre-aditif, $\mathcal{U}$-generator.

Abstract

Let $\mathcal{U}$ be a family of R-modules and V be a submodule of a direct sum of some elements in $\mathcal{U}$. An R-module N is generated by $\mathcal{U}_V$ if there exists an epimorphism from V to N. The notion of the $\mathcal{U}_V$-generated module is a generalization of the $\mathcal{U}$-generated module. This generalization uses the concept of the V-coexact sequence of modules. In this paper, we construct a category of $\mathcal{U}_V$-generated modules. Furthermore, we investigate some properties of the category of $\mathcal{U}_V$-generated modules. We also prove that this category is a pre-additive category.

Keywords: *$\mathcal{U}_V$-generator, V-coexact sequence, category pre-additive, $\mathcal{U}$-generator.*

1 Pendahuluan

Barisan eksak merupakan salah satu konsep penting di dalam struktur aljabar. Misalkan K, L, M merupakan modul-modul atas ring R dan f, g merupakan homomorfisma modul atas R. Barisan homomorfisma modul atas ring R

$$K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M$$

dikatakan eksak jika $Im\,(f) = Ker\,(g)$ [1]. Barisan eksak ini diperumum oleh Davvaz dan Parnian-Garamaleky [2] yang dilakukan dengan cara mengganti submodul 0 dengan sebarang submodul U di M. Mereka memperumum beberapa konsep terkait dengan barisan eksak yang diperumum menjadi barisan U-eksak dan mendefinisikan barisan V-koeksak sebagai dual dari barisan U-eksak. Selain itu, di dalam [3] Davvaz dkk. memberikan perumuman beberapa konsep dalam aljabar homologi menggunakan konsep barisan quasi eksak dan di dalam [4], Anvariyeh dkk. memperkenalkan barisan U-terpisah serta kaitan antara barisan U-terpisah dan modul proyektif.

Selanjutnya, di dalam [5] Davvaz dan Anvariyeh memberikan hasil lanjutan mengenai barisan quasi eksak dan menggunakannya untuk memperumum Lemma Schanuel dan Madanshekaf [6] menggunakan barisan U-eksak dalam mengembangkan konsep presentasi berhingga dari modul atas R dan fungtor torsi dalam kategori R-MOD.

Selanjutnya, sebagai aplikasi dari barisan U-eksak, Aminizadeh [7] menggunakan konsep barisan U-eksak untuk memperkenalkan barisan U-eksak dari S-act. Selain itu, Elviyanti dkk. [8] mengkonstruksi kategori U-kompleks dengan menggunakan konsep barisan U-eksak. Pada tahun 2017, Mahatama dan Muchtadi-Alamsyah [9] mengkonstruksi U-resolusi proyektif yang merupakan perumuman dari resolusi proyektif suatu modul dengan menggunakan konsep barisan U-eksak.

Termotivasi dari pendefinisian barisan U-eksak dan barisan V-koeksak, Fitriani dkk. [10] mendefinisikan barisan X-sub-eksak sebagai perumuman barisan eksak. Konsep ini digunakan dalam perumuman dari keluarga modul bebas linear. Keluarga modul bebas linear ini merupakan perumuman dari himpunan bebas linear [1]. Selain itu, Fitriani dkk. [11] memperumum keluarga $\mathcal{U}$-generator dengan menggunakan konsep barisan V-koeksak. Selanjutnya, Fitriani dkk. [12] memperumum konsep basis dan modul bebas menggunakan konsep keluarga modul X-sub bebas linear dan keluarga $\mathcal{U}_V$-generator. Di dalam penelitian ini, dikonstruksi kategori yang obyeknya adalah modul-modul yang dibangun oleh $\mathcal{U}_V$ dan akan diselidiki sifat-sifatnya. Hasil-hasil pada penelitian ini selanjutnya akan digunakan untuk mendefinisikan rank dari suatu modul yang dibangun oleh $\mathcal{U}_V$ yang merupakan perumuman dari rank modul di dalam kategori modul atas R.

2 Metode Penelitian

Penelitian ini dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Mengkonstruksi kategori modul yang dibangun oleh $\mathcal{U}_V$ yang selanjutnya dinotasikan dengan $\mu(\mathcal{U}_\mathrm{V})$;
2. Menyelidiki sifat-sifat kategori $\mu(\mathcal{U}_\mathrm{V})$;
3. Menyelidiki sifat pre-aditif pada kategori $\mu(\mathcal{U}_\mathrm{V})$. .

3 Hasil dan Pembahasan

Pada bagian ini akan diberikan hasil-hasil penelitian yang meliputi konstruksi kategori $\mu(\mathcal{U}_{\mathrm{V}})$, pembuktian sifat-sifat kategori $\mu(\mathcal{U}_{\mathrm{V}})$ dan uraian mengenai sifat pre-aditif pada kategori $\mu(\mathcal{U}_{\mathrm{V}})$. Untuk selanjutnya, yang dimaksud dengan $\mathcal{U}$ adalah keluarga modul atas ring R dan V merupakan submodul dari $\oplus_\Lambda U_\lambda$, dengan $U_\lambda \in \mathcal{U}$, untuk setiap $\lambda \in \Lambda$.

3. 1. Konstruksi Kategori $\mu(\mathcal{U}_{\mathrm{V}})$

Misalkan $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_\Lambda$ keluarga modul atas ring R. Modul M dibangun oleh $\mathcal{U}$ jika terdapat epimorfisma dari $\bigoplus_\Lambda U_\lambda$ ke M[13]. Konsep $\mathcal{U}$-generator ini diperumum menjadi $\mathcal{U}_V$-generator. Hal ini dilakukan dengan cara mengganti $\bigoplus_\Lambda U_\lambda$ dengan sebarang submodulnya. Misalkan V submodul $\bigoplus_\Lambda U_\lambda$. Suatu modul N dikatakan dibangun oleh $\mathcal{U}_V$ jika terdapat epimorfisma dari V ke N [11]. Jika diambil $V = \bigoplus_\Lambda U_\lambda$, maka $\mathcal{U}_V$-generator merupakan $\mathcal{U}$-generator. Oleh karena itu, $\mathcal{U}$-generator merupakan kasus khusus dari $\mathcal{U}_V$-generator. Hal ini dijelaskan sebagai berikut. Diberikan modul M yang merupakan modul $\mathcal{U}$-generator. Hal ini berarti terdapat epimorfisma $f\colon \bigoplus_\Lambda U_\lambda \to M$. Karena $\bigoplus_\Lambda U_\lambda$ merupakan submodul dari dirinya sendiri, dapat diambil $V = \bigoplus_\Lambda U_\lambda$. Akibatnya, terdapat epimorfisma dari V ke M yang berarti M merupakan modul $\mathcal{U}_V$-generator. Oleh karena itu, setiap modul $\mathcal{U}$-generator merupakan modul $\mathcal{U}_V$-generator.

Hal ini tidak berlaku sebaliknya, yaitu setiap modul $\mathcal{U}_V$-generator belum tentu merupakan modul $\mathcal{U}$-generator. Sebagai contoh, jika $\mathcal{U} = \{\mathbb{Q}\}$ kelas modul atas bilangan bulat $\mathbb{Z}$, dengan $\mathbb{Q}$ himpunan bilangan rasional dan $M = \mathbb{Z}$ sebagai modul atas $\mathbb{Z}$. Karena tidak terdapat epimorfisma dari $\mathbb{Q}$ ke $\mathbb{Z}$, modul M bukan merupakan modul $\mathcal{U}$-generator. Jika diambil $\mathrm{V} = \mathbb{Z}$ yang merupakan submodul $\mathbb{Q}$, maka jelas bahwa terdapat epimorfisma dari V ke M. Hal ini berakibat M merupakan modul $U_{\mathbb{Z}}$-generator. Hal ini menunjukkan bahwa $\mathcal{U}$-generator merupakan kasus khusus dari $\mathcal{U}_V$-generator.

Kelas modul-modul yang dibangun oleh $\mathcal{U}_V$ dinotasikan dengan $\mu(\mathcal{U}_{\mathrm{V}})$. Dalam proposisi berikut dibuktikan bahwa $\mu(\mathcal{U}_{\mathrm{V}})$ merupakan suatu kategori.

Proposisi 1. *Kelas modul-modul yang dibangun oleh $\mathcal{U}_V$, yaitu $\mu(\mathcal{U}_{\mathrm{V}})$ merupakan suatu kategori.*

Bukti.

1. Obyek: kelas dari semua modul yang dibangun oleh $\mathcal{U}_V$, yang dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\mathrm{Obj}\big(\mu(\mathcal{U}_{\mathrm{V}})\big) = \{M \in R - MOD \mid M \text{ dibangun oleh } \mathcal{U}_{\mathrm{V}}\},$$

dengan *R-MOD* merupakan kategori modul atas ring R. Jika M termuat di dalam $\mathrm{Obj}\big(\mu(\mathcal{U}_\mathrm{V})\big)$, maka M dibangun oleh $\mathcal{U}_\mathrm{V}$ yang artinya terdapat epimorfisma f dari V ke M.

2. Morfisma: morfisma di dalam kategori $\mu(\mathcal{U}_\mathrm{V})$ adalah morfisma modul atas R. Misalkan $K, L \in \mathrm{Obj}\big(\mu(\mathcal{U}_\mathrm{V})\big)$. Morfisma $\mathrm{Mor}_{\mu(\mathcal{U}_\mathrm{V})}(K, L)$ adalah himpunan
$$\mathrm{Mor}_{\mu(\mathcal{U}_\mathrm{V})}(K, L) = \{f : K \to L |\, f \text{ homomorfisma modul atas } R\}.$$
3. Komposisi Morfisma: komposisi morfisma di dalam kategori $\mu(\mathcal{U}_\mathrm{V})$ adalah komposisi morfisma modul atas R yang memenuhi:
   a. Untuk setiap modul-modul atas R yaitu K, L, M, N yang termuat di dalam $\mathrm{Obj}(\mu(\mathcal{U}_\mathrm{V}))$ dan $f \in \mathrm{Mor}_{\mu(\mathcal{U}_\mathrm{V})}(K, L)$, $g \in \mathrm{Mor}_{\mu(\mathcal{U}_\mathrm{V})}(L, M)$, $h \in \mathrm{Mor}_{\mu(\mathcal{U}_\mathrm{V})}(M, N)$, berlaku $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.
   b. Untuk setiap $M \in \mathrm{Obj}(\mu(\mathcal{U}_\mathrm{V}))$, terdapat morfisma $id_M \in \mathrm{Mor}_{\mu(\mathcal{U}_\mathrm{V})}(M, M)$ yang memenuhi $f \circ id_M = id_N \circ f$, untuk setiap $f \in \mathrm{Mor}_{\mu(\mathcal{U}_\mathrm{V})}(M, N)$, $N \in \mathrm{Obj}(\mu(\mathcal{U}_\mathrm{V}))$.

Berdasarkan uraian tersebut, $\mu(\mathcal{U}_\mathrm{V})$ merupakan suatu kategori. ■

Berdasarkan [13], suatu kategori $\mathcal{D}$ merupakan subkategori $\mathcal{C}$ jika memenuhi:

a. $\mathrm{Obj}(\mathcal{D}) \subseteq \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$,

b. $\mathrm{Mor}_\mathcal{D}(A, B) \subseteq \mathrm{Mor}_\mathcal{C}(A, B)$, untuk setiap $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathcal{D})$,

c. Komposisi morfisma di $\mathcal{D}$ merupakan pembatasan dari komposisi morfisma di $\mathcal{C}$.

Jika $\mathrm{Mor}_\mathcal{D}(A, B) = \mathrm{Mor}_\mathcal{C}(A, B)$, maka $\mathcal{D}$ dikatakan subkategori penuh dari $\mathcal{C}$ [13]. Jika dibandingkan dengan kategori modul atas ring R, yaitu R-MOD, kategori $\mu(\mathcal{U}_\mathrm{V})$ merupakan subkategori penuh dari R-MOD seperti diberikan dalam proposisi berikut.

Proposisi 2. *Kategori modul yang dibangun oleh $\mathcal{U}_\mathrm{V}$, yaitu $\mu(\mathcal{U}_\mathrm{V})$ adalah subkategori penuh dari R-MOD yang merupakan kategori modul atas ring R.*

Bukti. Pada konstruksi kategori $\mu(\mathcal{U}_\mathrm{V})$ terlihat bahwa $\mathrm{Obj}(\mu(\mathcal{U}_\mathrm{V})) \subset \mathrm{Obj}(R - MOD)$ dan $\mathrm{Mor}_{\mu(\mathcal{U}_\mathrm{V})}(M, N) = \mathrm{Mor}_{R-MOD}(M, N)$. Oleh karena itu, terbukti bahwa $\mu(\mathcal{U}_\mathrm{V})$ adalah subkategori penuh dari R-MOD. ■

3. 2. Beberapa Sifat Kategori $\mu(\mathcal{U}_\mathrm{V})$

Pada bagian ini diberikan beberapa sifat kategori $\mu(\mathcal{U}_\mathrm{V})$. Beberapa sifat modul yang dibangun oleh $\mathcal{U}_\mathrm{V}$ telah diberikan di dalam [11]. Berikut ini diberikan sifat kategori $\mu(\mathcal{U}_\mathrm{V})$ yang menyatakan bahwa kategori ini tertutup terhadap *image* homomorfisma sebagai berikut.

Proposisi 3. *Jika* $M \in \mathrm{Obj}(\mu(\mathcal{U}_{\mathrm{V}}))$, *maka* $N \in \mathrm{Obj}(\mu(\mathcal{U}_{\mathrm{V}})$, *untuk setiap image homomorfisma* N *dari* M.

Bukti. Diberikan sebarang $M \in \mathrm{Obj}(\mu(\mathcal{U}_{\mathrm{V}}))$. Hal ini berarti modul M atas R dibangun oleh $\mathcal{U}_{\mathrm{V}}$. Oleh karena itu, terdapat epimorfisma$f$ dari V ke M. Misalkan N adalah *image* homomorfisma f dari M, yang berarti $im\ (f) = N$. Akibatnya, f merupakan suatu epimorfisma dari M ke N. Jadi, $g \circ f$ merupakan epimorfisma dari V ke N. Jadi, N merupakan modul yang dibangun oleh $\mathcal{U}_{\mathrm{V}}$. Dengan kata lain, $N \in \mathrm{Obj}(\mu(\mathcal{U}_{\mathrm{V}}))$ yang menunjukkan bahwa kategori $\mu(\mathcal{U}_{\mathrm{V}})$ tertutup terhadap *image* homomorfisma. ■

Misalkan M merupakan modul yang dibangun oleh $\mathcal{U}_{\mathrm{V}}$. Karena terdapat pemetaan nol yang merupakan epimorfisma dari M ke modul 0, modul 0 merupakan *image* homomorfisma dari setiap modul yang dibangun oleh $\mathcal{U}_{\mathrm{V}}$. Oleh karena itu, berdasarkan Proposisi 3 diperoleh bahwa $0 \in \mathrm{Obj}(\mu(\mathcal{U}_{\mathrm{V}}))$. Demikian halnya dengan modul faktor dari modul yang dibangun oleh $\mathcal{U}_{\mathrm{V}}$ seperti diberikan dalam sifat berikut.

Akibat 4. *Jika* $M \in \mathrm{Obj}(\mu(\mathcal{U}_{\mathrm{V}}))$, *maka* $M/N \in \mathrm{Obj}(\mu(\mathcal{U}_{\mathrm{V}})$, *untuk setiap modul faktor* M/N *dari* M.

Bukti. Diberikan sebarang modul faktor M/N dari M. Oleh karena itu, terdapat pemetaan proyeksi kanonik $p: M \to M/N$. Jadi, berdasarkan Proposisi 3 diperoleh $M/N \in \mathrm{Obj}(\mu(\mathcal{U}_{\mathrm{V}})$, untuk setiap modul faktor M/N dari M. ■

Selanjutnya, dari [11, Proposisi 9] diperoleh bahwa jika N_α dibangun oleh $\mathcal{U}_{V_\alpha}$, untuk setiap $\alpha \in A$, maka $\oplus_A N_\alpha$ dibangun oleh $\mathcal{U}_{\oplus_A V_\alpha}$. Akibatnya, diperoleh sifat berikut.

Akibat 5. *Jika* $M_\alpha \in \mathrm{Obj}(\mu(\mathcal{U}_{\mathrm{V}_\alpha}))$, *untuk setiap* $\alpha \in A$, *maka* $\oplus_A M_\alpha \in \mathrm{Obj}(\mu(\mathcal{U}_{\oplus_A V_\alpha})$.

Bukti. Diberikan $M_\alpha \in \mathrm{Obj}(\mu(\mathcal{U}_{\mathrm{V}_\alpha}))$, untuk setiap $\alpha \in A$. Hal ini berakibat terdapat epimorfisma $f_\alpha: V_\alpha \to M_\alpha$, untuk setiap $\alpha \in A$. Oleh karena itu, dapat dibentuk $\oplus_A f_\alpha: \oplus_A V_\alpha \to \oplus_A M_\alpha$. Karena masing-masing f_α merupakan epimorfisma, diperoleh $\oplus_A f_\alpha$ epimorfisma. Oleh karena itu, berdasarkan [11, Proposisi 9], diperoleh $\oplus_A M_\alpha$ dibangun oleh $\mathcal{U}_{\oplus_A V_\alpha}$ dan akibatnya $\oplus_A M_\alpha \in \mathrm{Obj}(\mu(\mathcal{U}_{\oplus_A V_\alpha})$. ■

3. 3. Sifat Pre-Aditif pada Kategori $\mu(\mathcal{U}_{\mathrm{V}})$

Pada bagian ini akan ditunjukkan bahwa $\mu(\mathcal{U}_{\mathrm{V}})$ merupakan kategori pre-aditif. Berdasarkan [14, Definisi 1.1], suatu kategori $\mathcal{A}$ dikatakan aditif jika memenuhi kondisi berikut.

1. Untuk setiap pasangan obyek X dan Y, himpunan morfisma $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ merupakan grup komutatif dan komposisi morfisma

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Y,Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Z)$$

bilinear.

2. Kategori $\mathcal{A}$ memuat obyek 0, yaitu untuk setiap obyek $X \in \mathcal{A}$, masing-masing himpunan morfisma $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,0)$ dan $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(0,X)$ memiliki tepat satu elemen.
3. Untuk setiap pasangan obyek-obyek X,Y di $\mathcal{A}$, terdapat ko-hasil kali $X \oplus Y$ di $\mathcal{A}$.

Jika hanya terpenuhi kondisi 1 dan 2, maka kategori $\mathcal{A}$ disebut kategori pre-aditif [14]. Pada teorema berikut ditunjukkan bahwa kategori $\mu(\mathcal{U}_\mathrm{V})$ merupakan kategori pre-aditif.

Teorema 6. *Kategori $\mu(\mathcal{U}_\mathrm{V})$ merupakan kategori pre-aditif.*

Bukti.

1. Diberikan sebarang $M,N \in \mu(\mathcal{U}_\mathrm{V})$. Didefinisikan operasi pada himpunan morfisma $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M,N)$ di dalam kategori $\mu(\mathcal{U}_\mathrm{V})$ sebagai berikut.

$$+: \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M,N) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M,N) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M,N)$$
$$(f,g) \longmapsto f+g,$$

dengan $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, untuk setiap $x \in M$. Dengan definisi ini dapat ditunjukkan bahwa $(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M,N),+)$ merupakan grup dengan elemen identitas adalah pemetaan nol dan invers dari $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M,N)$ adalah $-f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M,N)$. Karena

$$(f+g)(m) = f(m) + g(m) = g(m) + f(m) = (g+f)(m),$$

untuk setiap $m \in M$, $(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M,N),+)$ merupakan grup komutatif.

Selanjutnya, diberikan sebarang $K,L,M \in \mathrm{Obj}\big(\mu(\mathcal{U}_\mathrm{V})\big)$. Akan ditunjukkan komposisi morfisma:

$$+: \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(L,M) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(K,L) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(K,M)$$
$$(f,g) \longmapsto f \circ g,$$

bersifat bilinear, yaitu untuk setiap $k \in K$, berlaku

a. $$\begin{aligned}\big((f+g)\circ h\big)(k) &= (f+g)\big(h(k)\big)\\ &= f\big(h(k)\big) + g\big(h(k)\big)\\ &= (f\circ h)(k) + (g \circ h)(k),\end{aligned}$$

b. $$\begin{aligned}(f\circ(g+h))(k) &= f\big((g+h)(k)\big)\\ &= f\big(g(k)+h(k)\big)\\ &= (f\circ g)(k) + (f\circ h)(k).\end{aligned}$$

Oleh karena itu, komposisi morfisma pada kategori $\mu(\mathcal{U}_\mathrm{V})$ bersifat bilinear.

2. Obyek 0 di dalam kategori $\mu(\mathcal{U}_\mathrm{V})$ adalah modul 0 dan pada Bagian 3.2 telah diuraikan bahwa modul 0 termuat di dalam kategori $\mu(\mathcal{U}_\mathrm{V})$.

Jadi, terbukti bahwa $\mu(\mathcal{U}_{\mathrm{V}})$ merupakan kategori pre-aditif. ■

Selanjutnya, berdasarkan [11, 2.2] diperoleh bahwa jika $M, N \in \mathrm{Obj}\big(\mu(\mathcal{U}_{\mathrm{V}})\big)$, maka belum tentu $M \oplus N$ termuat di dalam himpunan $\mathrm{Obj}\big(\mu(\mathcal{U}_{\mathrm{V}})\big)$. Oleh karena itu, kategori $\mu(\mathcal{U}_{\mathrm{V}})$ bukan merupakan kategori aditif.

4 Simpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang telah diuraikan, diperoleh bahwa himpunan semua modul yang dibangun oleh $\mathcal{U}_{\mathrm{V}}$ membentuk suatu kategori $\mu(\mathcal{U}_{\mathrm{V}})$. Kategori ini merupakan subkategori penuh dari kategori modul atas ring *R*, yaitu *R*-MOD. Selain itu, kategori $\mu(\mathcal{U}_{\mathrm{V}})$ tertutup terhadap *image* homomorfisma. Hasil ini berakibat modul 0 termuat di dalam kategori $\mu(\mathcal{U}_{\mathrm{V}})$ dan untuk setiap *M* yang termuat di dalam kategori $\mu(\mathcal{U}_{\mathrm{V}})$ berakibat modul faktor *M*, yaitu *M*/*N* juga termuat di dalam kategori tersebut. Selanjutnya, telah dibuktikan bahwa kategori $\mu(\mathcal{U}_{\mathrm{V}})$ merupakan kategori pre-aditif.

5 Daftar Pustaka

[1] W. A. Adkins and S. H. Weintraub, *Algebra, An Approach via Module Theory*. New York: Springer-Verlag, 1992.

[2] B. Davvaz and Y. A. Parnian-Garamaleky, “A Note on Exact Sequences,” *Bull. Malaysian Math. Soc.*, vol. 22, pp. 53–56, 1999.

[3] B. Davvaz and H. Shabani-Solt, “A generalization of homological algebra,” *J. Korean Math. Soc.*, vol. 39, no. 6, pp. 881–898, 2002.

[4] S. M. Anvanriyeh and B. Davvaz, “U-Split Exact Sequences,” *Far East J. Math. Sci.*, vol. 4, no. 2, pp. 209–219, 2002.

[5] B. Davvaz and S. M. Anvariyeh, “On Quasi Exact Sequences,” *Bull. Korean Math. Soc.*, vol. 42, no. 1, pp. 149–155, 2005.

[6] A. Madanshekaf, “Quasi-Exact Sequence and Finitely Presented Modules,” *Iran. J. Math. Sci. Informatics*, vol. 3, no. 2, pp. 49–53, 2008.

[7] R. Aminizadeh, H. Rasouli, and A. Tehranian, “Quasi-exact Sequences of S-Act,” *Bull. Malaysian Math. Soc.*, 2017.

[8] G. Elfiyanti, I. Muchtadi, D. Nasution, and U. Amartiwi, “Abelian Property of the Category of U-Complexes Chain of U-Complexes,” *Int. J. Math. Anal.*, vol. 10, no. 17, pp. 849–853, 2016.

[9] Y. Mahatma and I. Muchtadi-alamsyah, "Construction of U -extension module," *AIP Conf. Proc. 1867*, vol. 020025, no. August, 2017.

[10] Fitriani, B. Surodjo, and I. E. Wijayanti, "On Sub-Exact Sequences," *Far East J. Math. Sci.*, vol. 100, no. 7, pp. 1055–1065, 2016.

[11] Fitriani, I. E. Wijayanti, and B. Surodjo, "Generalization of U -Generator and M - Subgenerator Related to Category σ [M]," *J. Math. Res.*, vol. 10, no. 4, pp. 101–106, 2018.

[12] Fitriani, I. E. Wijayanti, and B. Surodjo, "A Generalization of Basis and Free Modules Relatives to a Family of R-Modules," *J. Phys. Conf. Ser.*, vol. 1097, no. 1, 2018.

[13] R. Wisbauer, *Foundations of Module and Ring Theory*. Philadelphia, USA: Gordon and Breach Science, 1991.

[14] R. R. T. Holm, P. Jorgensen, *Triagulated Categories*. USA: Cambridge University Press.