Limits: Journal of Mathematics and Its Applications
E-ISSN: 2579-8936
P-ISSN: 1829-605X
Vol. 20, No. 1, Maret 2023, 1-10
DOI: http://dx.doi.org/10.12962/limits.v20i1.6376

Konvergensi Barisan dan Kelengkapan pada Ruang Metrik Parsial Rectangular

Mohamad Ilham Dwi F [1] *, Erna Apriliani [2], Mahmud Yunus [3]
[1,2,3]Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Analitika Data, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya, Jawa Timur, Indonesia
e-mail: syah3946@gmail.com *, aprilmath12@gmail.com, yunusm@matematika.its.ac.id

Diajukan: 3 Januari 2020, Diperbaiki: 26 Desember 2022, Diterima: 26 Maret 2023

Abstrak

Ruang metrik merupakan salah satu objek yang dikaji dalam analisis fungsional. Ruang metrik mengalami banyak perkembangan diantaranya adalah ruang metrik parsial dan ruang metrik rectangular. Perbedaan antara ruang metrik dengan ruang metrik parsial terletak pada jarak suatu titik dengan dirinya sendiri. Pada ruang metrik selalu bernilai nol, sedangkan pada ruang metrik parsial tidak selalu nol. Disisi lain perbedaan antara ruang metrik dengan ruang metrik rectangular dapat dilihat pada sifat pertidaksamaan yang digunakan. Pada ruang metrik menggunakan pertidaksamaan segitiga, sedangkan pada ruang metrik rectangular menggunakan pertidaksamaan segiempat. Sukhla pada tahun 2014 mengemukakan ruang metrik parsial rectangular yaitu menggabungkan konsep ruang metrik parsial dengan ruang metrik rectangular. Pada paper ini dibahas sifat-sifat dari ruang metrik parsial rectangular antara lain konvergensi barisan, barisan Cauchy dan kelengkapan ruang di dalam ruang metrik parsial rectangular.

Kata Kunci: konvergensi barisan, barisan Cauchy, kelengkapan ruang, ruang metrik parsial rectangular, titik tetap.

Abstract

The metric space is one of the objects studied in functional analysis. The metric space has undergone many developments, some eHamples of which are partial metric spaces and rectangular metric spaces. The difference between the metric space and the partial metric space can be seen in the distance of a point from itself. In the metric space, it is always equal to zero, while in the partial metric space it is not equal to zero. On the other hand, the difference between a metric space and a metric rectangular space can be seen in the inequalities used. In the metric space we use triangular inequalities, while in the metric rectangular space we use rectangular inequalities. Shukla in 2014 presents the development of another metric space called rectangular partial metric space, which combines the concept of partial metric space with rectangular metric space. This research we discusses the problem of the properties of the rectangular partial metric space, including convergence sequences, Cauchy sequences, and completeness of space in the rectangular partial metric space.

Keywords: *convergence sequences, Cauchy sequences, completeness space, rectangular partial metric space.*

1 Pendahuluan

Ruang metrik biasanya disimbolkan dengan (X, d) dengan X merupakan himpunan tak kosong sedangkan $d: X \to X$ merupakani metrik atau fungsi jarak. Ruang metrik pertama kali ditemukan oleh ilmuan asal Prancis bernama M. Frechet pada tahun 1906 [1]. Seiring dengan berkembangnya jaman, ruang metrik mengalami banyak perkembangan, beberapa contoh jenis-jenis perkembangan ruang metrik antara lain ruang metrik parsial, ruang b-metrik, ruang metrik rectangular, ruang metrik fuzzy, dan lain sebagainya. Lebih lengkap mengenai ruang-ruang metrik tersebut dapat dilihat pada [1]–[10].

Ruang metrik parsial pertama kali dikenalkan oleh Matthews [11], ruang tersebut memiliki perbedaan dengan ruang metrik yang dikenalkan oleh Frechet, dapat dilihat dari jarak suatu titik ke dirinya sendiri. Dalam ruang metrik jarak titik ke dirinya sendiri bernilai nol, sedangkan dalam ruang metrik parsial tidak selalu bernilai nol. Matthews mengembangkan konsep ruang metrik parsial sebagai bagian dari penelitian mengenai notasi jaringan *dataflow* dan menunjukkan bahwa prinsip kontraksi Banach dapat berlaku dalam ruang metrik parsial sebagai aplikasi dalam verifikasi program. Seiring berkembangan waktu, pada tahun 2000, Branciari mengenalkan konsep ruang metrik rectangular [9]. Hal menonjol yang membedakan ruang metrik rectangular dengan ruang metrik biasa dapat dilihat dari jenis pertidaksamaan yang digunakan. Dalam ruang metrik yang dikemukakan oleh Frechet, pertidaksamaan yang digunakan adalah pertidaksaman segitiga, sedangkan dalam ruang metrik rectangular pertidaksamaan yang digunakan adalah pertidaksamaan segiempat (rectangular). Pada penelitian tersebut, Branciari juga menjelaskan bahwa teorema titik tetap kontraksi Banach juga berlaku dalam ruang metrik rectangular.

Pada tahun 2014, Sukhla mengenalkan jenis ruang metrik baru dengan menggabungkan konsep ruang metrik parsial dan ruang metrik rectangular yang disebut ruang metrik parsial rectangular [12]. Dalam penelitian tersebut dijelaskan bahwa, fungsi metrik parsial rectangular dapat dikonstruksi dari fungsi metrik rectangular, begitu pula sebaliknya. Berdasarkan sifar pengonstruksian tersebut, terdapat sifat menarik berkaitan tentang sifat konvergensi barisan dan sifat barisan Cauchy dari masing-masing ruang tersebut. Berbicara mengenai sifat konvergensi barisan, salah satu aplikasinya adalah tentang sifat titik tetap pemetaan di dalam ruang tersebut. Pada paper ini, dikaji kembali lebih lanjut mengenai ruang metrik parsial rectangular, khususnya sifat-sifat konvergensi barisan, sifat barisan Cauchy, dan sifat kelengkapan dalam ruang metrik parsial rectangular.

2 Metode Penelitian

Pada bagian ini diberikan metode atau langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian.

2.1 Studi literatur

Pada tahap ini diberikan beberapa referensi yang berkaitan tetang ruang metrik parsial rectangular. Referensi yang dimaksud dapat berupa buku atau jurnal yang berkaitan dengan topik pada paper. Bagian referensi yang mendukung dalam paper ini meliputi definisi, teorema, contoh-contoh yang berkaitan dengan ruang metrik, ruang metrik parsial, ruang metrik rectangular, dan ruang metrik parsial rectangular.

2.2 Mengkaji ruang metrik parsial rectangular.

Pada tahap ini, diberikan definisi dari ruang metrik parsial rectangular berdasarkan literatur yang diperoleh. Kemudian dikonstruksi contoh baru himpunan dan fungsi yang memenuhi sifat ruang metrik parsial rectangular. Tteorema yang menunjukkan hubungan ruang metrik parsial rectangular dengan ruang metrik, ruang metrik parsial, dan ruang metrik rectangular dibahas pada tahap ini.

2.3 Mengkaji sifat konvergensi barisan, barisan Cauchy, dan sifat kelengkapan.

Pada tahap ini, diberikan definisi dari konvergensi barisan, barisan Cauchy ,dan sifat kelengkapan dalam ruang metrik parsial rectangular beserta contohnya. Kemudian berikan teorema dan proposisi yang menunjukkan kaitan sifat-sifat barisan dan kelengkapan antara ruang metrik parsial rectangular dengan ruang metrik parsial dan ruang metrik rectangular.

3 Hasil dan Pembahasan

3.1 Ruang metrik parsial rectangular

Pada bagian ini diberikan definisi ruang metrik parsial [11] dan ruang metrik rectangular [9] berserta contohnya sebagai perbandingan dengan definisi ruang metrik parsial rectangular.

Definisi 1. *Diberikan himpunan tak kosong H dan $d_p: H \times H \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Fungsi d_p disebut metrik parsial pada H jika untuk setiap $u, v, w \in H$ maka berlaku*

(MP1) $d_p(u,u) = d_p(u,v) = d_p(v,v) \Leftrightarrow u = v$;

(MP2) $d_p(u,u) \leq d_p(u,v)$;

(MP3) $d_p(u,v) = d_p(v,u)$;

(MP4) $d_p(u,v) \leq d_p(u,w) + d_p(w,v) - d_p(w,w)$.

Pasangan terurut (H, d_p) disebut ruang metrik parsial.

Contoh 2. *Misalkan $H = \mathbb{R}$ dan konstanta $\alpha_1 \in \mathbb{R}^+$ didefinisikan $d_p: H \times H \to \mathbb{R}$ dengan*

$$d(u,v) = \begin{cases} \alpha_1 + 1, & jika\ u \neq v \\ 1, & jika\ u = v \end{cases}$$

untuk $u, v \in H$. Dapat ditunjukkan bahwa fungsi d_p memenuhi Definisi 1, sehingga (H, d_p) adalah ruang metrik parsial.

Definisi 3. *Diberikan himpunan tak kosong H dan $d_r: H \times H \to \mathbb{R}$. Fungsi d_r disebut metrik parsial pada H jika untuk setiap $u, v \in H$ maka berlaku*

(MR1) $d_r(u,v) \geq 0$;

(MR2) $d_r(u,v) = 0 \Leftrightarrow u = v$;

(MR3) $d_r(u,v) = d_r(v,u)$;

(MR4) $d_r(u,v) \leq d_r(u,w) + d_r(w,z) + d_r(z,v)$ *untuk* $w,z \in H \setminus \{u,v\}$.

Pasangan terurut (H, d_r) *disebut ruang metrik rectangular.*

Berikut ini diberikan contoh himpunan dan fungsi di dalamnya sehingga merupakan ruang metrik rectangular [10].

Contoh 4. *Misalkan* $H = \{x_i \mid i = 1,2,\cdots,7\} \subseteq \mathbb{R}$ *dan* $d_p: H \times H \to \mathbb{R}$ *dengan*

$$d(x_i, x_j) = \begin{cases} 0, & i = j, \\ 1.5, & |i-j| = 1, \\ 7, & ij = 5, \\ 3.5 & \text{untuk yang lain}, \end{cases}$$

Pasangan (H, d_r) *merupakan ruang metrik rectangular.*

Selanjutnya diberikan definisi ruang metrik parsial rectangular yang merupakan penggabungan konsep ruang metrik parsial dan ruang metrik rectangular berserta contoh-contohnya [12].

Definisi 5. *Diberikan himpunan tak kosong H dan* $d_{pr}: H \times H \to \mathbb{R}$. *Fungsi* d_{pr} *disebut metrik parsial rectangular pada H jika untuk setiap* $u, v \in H$ *maka berlaku*

(MPR1) $d_{pr}(u,v) \geq 0$

(MPR2) $d_{pr}(u,u) = d_p(u,v) = d_p(v,v) \Leftrightarrow u = v$;

(MPR3) $d_{pr}(u,u) \leq d_{pr}(u,v)$;

(MPR4) $d_{pr}(u,v) = d_{pr}(v,u)$;

(MPR5) $d_{pr}(u,v) \leq d_{pr}(u,w) + d_{pr}(w,z) + d_{pr}(z,v) - d_{pr}(w,w) - d_{pr}(z,z)$ *untuk* $w, z \in H \setminus \{u,v\}$..

Pasangan terurut (H, d_{pr}) *disebut ruang metrik parsial rectangular.*

Dari Definisi 5, diperoleh lemma sebagai berikut.

Lemma 6. *Diberikan* (H, d_{pr}) *ruang metrik parsial rectangular, jika untuk* $x, y \in H$ *berlaku* $d_{pr}(x,y) = 0$ *maka* $x = y$.

Bukti. Dengan menggunakan sifat (MPR1) dan (MPR3) didapat $0 \leq d_{pr}(u,u) \leq d_{pr}(u,v) = 0$ artinya $d_{pr}(u,u) = d_{pr}(u,v) = 0$ untuk setiap $u, v \in X$. Dari sifat (MPR2) diperoleh $x = y$.

. Berikut dikonstruksi contoh-contoh himpunan dan fungsi yang merupakan ruang metrik parsial rectangular.

Contoh 7. *Misalkan* $H_1 = \left\{\frac{1}{3n} : n \in \mathbb{N}\right\} \subseteq \mathbb{R}, H_2 = \{0,3\}$ *dan* $H = H_1 \cup H_2$. *Jika* $\varepsilon > 0$ *suatu konstanta dan fungsi* $d_{pr}: X \times X \to \mathbb{R}$ *dengan*

$$d(u,v)=\begin{cases}\varepsilon, & u=v,\\ u+\varepsilon, & u\in X_1\ dan\ v\in X_2,\\ v+\varepsilon, & u\in X_2\ dan\ v\in X_1\ ,\\ 1+\varepsilon & untuk\ u,v\ yang\ lain\ ,\end{cases} \tag{1}$$

maka pasangan (H,d_r) *merupakan ruang metrik rectangular. Namun bukan ruang metrik rectangular sebab* $d_{pr}(u,u)\neq 0$ *untuk* $u\in X$. *Pasangan* (H,d_r) *juga bukan ruang metrik parsial sebab*

$$d_{pr}(0{,}3)=1+\varepsilon>d_{pr}\left(0,\frac{1}{6}\right)+d_{pr}\left(\frac{1}{6},3\right)-d_{pr}\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)=\left(\frac{1}{6}+\varepsilon\right)+\left(\frac{1}{6}+\varepsilon\right)-\varepsilon=\frac{1}{3}+\varepsilon$$

Contoh 8. *Misalkan* $A=\left\{\frac{1}{2n}:n\in\mathbb{N}\right\}$ *dan* $H=A\cup\{0\}$. *Didefinisikan fungsi* $d_{pr}:H\times H\to\mathbb{R}$ *dengan*

$$d(u,v)=\begin{cases}0, & u=v,\\ v, & u=0,v\in A,\\ \dfrac{1+u+v}{2} & u\neq v,u\in H\setminus\{0\},\end{cases}$$

untuk setiap $u,v\in A$. *Pasangan* (H,d_r) *merupakan ruang metrik rectangular.*

Berdasarkan Definisi 5 dan Contoh 8 dapat disimpulkan bahwa setiap ruang metrik parsial dan ruang metrik rectangular merupakan -ruang metrik parsial rectangular, namun tidak berlaku sebaliknya. Selanjutnya diberikan teorema-teorema yang menjelaskan bahwa suatu metrik parsial rectangular dapat dikonstruksi melalui metrik rectangular, begitu pula sebaliknya [12].

Teorema 9. *Diberikan* (H,d_{pr}) *ruang metrik parsial rectangular, jika didefinisikan suatu fungsi* $d_{pr}:H\times H\to\mathbb{R}$ *dengan*

$$d_r(u,v)=2d_{pr}(u,v)-d_{pr}(u,u)-d_{pr}(v,v) \tag{2}$$

untuk setiap $u,v\in H$, *maka* (H,d_{pr}) *adalah ruang metrik rectangular.*

Teorema 10. *Diberikan* (H,d_r) *ruang metrik rectangular dan konstanta* $\varepsilon>0$, *jika didefinisikan suatu fungsi* $d_{pr}:H\times H\to\mathbb{R}$ *dengan*

$$d_{pr}(u,v)=d_r+\varepsilon \tag{3}$$

untuk setiap $u,v\in H$ *maka* (H,d_{pr}) *adalah ruang metrik parsial rectangular.*

Terinspirasi dari Teorema 9 dan Teorema 10, berikut ini dikonstruksi metrik parsial rectangular baru dengan menggunakan metrik rectangular.

Proposisi 11. *Diberikan* (H,d_r) *ruang metrik rectangular dengan* $H\subseteq\mathbb{R}$, *jika didefinisikan suatu fungsi* $d_{pr}:H\times H\to\mathbb{R}$ *dengan*

$$d_{pr}(u,v)=\frac{|u|+d_r(u,v)+|v|}{2} \tag{4}$$

untuk setiap $u,v\in H$, *maka* (H,d_{pr}) *adalah ruang metrik parsial rectangular.*

Bukti. Untuk sifat (MPR1)-(MPR4) dapat dengan mudah untuk dibuktikan. Selanjutnya akan ditunjukkan untuk sifat (MPR5). Berdasarkan Persamaan (3), untuk setiap $u, v \in X$ dan $w, z \in H \setminus \{u, v\}$ diperoleh beberapa persamaan .

$$2d_{pr}(u,v) = |u| + d_r(u,v) + |v|, \tag{5}$$

$$2d_{pr}(u,w) = |u| + d_r(u,w) + |w|, \tag{6}$$

$$2d_{pr}(w,z) = |w| + d_r(w,z) + |z|, \tag{7}$$

$$2d_{pr}(z,v) = |z| + d_r(z,v) + |v|, \tag{8}$$

Berdasarkan Definisi 3, dengan mensubtitusi Persamaan (5)-(8) ke pertidaksamaan rectangular (sifat MR4) maka diperoleh

$$d_r(u,v) \leq d_r(u,w) + d_r(w,z) + d_r(z,v)$$

$$\Leftrightarrow 2d_{pr}(u,v) - |u| - |v|$$

$$\leq 2d_{pr}(u,w) - |u| - |w| + 2d_{pr}(w,z) - |w| - |z| + 2d_{pr}(w,v) - |w| - |v|$$

$$\Leftrightarrow 2d_{pr}(u,v) \leq 2d_{pr}(u,w) + 2d_{pr}(w,z) + 2d_{pr}(z,v) - 2|w| - 2|z|$$

$$\Leftrightarrow d_{pr}(u,v) \leq d_{pr}(u,w) + d_{pr}(w,z) + d_{pr}(z,v) - |w| - |z|$$

$$\Leftrightarrow d_{pr}(u,v) \leq d_{pr}(u,w) + d_{pr}(w,z) + d_{pr}(z,v) - d_{pr}(w,w) - d_{pr}(z,z)$$

sehingga sifat (MPR5) terpenuhi. Jadi terbukti bahwa (H, d_{pr}) ruang metrik parsial rectangular.

3.2 Konvergensi barisan dan barisan Cauchy pada ruang metrik parsial rectangular.

Shukla dalam [12], mendefinisikan barisan konvergen, barisan Cauchy dan kelengkapan dalam ruang metrik parsial rectangular.

Definisi 12. *Diberikan (H, d_{pr}) merupakan ruang metrik parsial rectangular. Barisan (x_n) di X dikatakan konvergen ke $x \in X$ jika $\lim_{n\to\infty} d_{pr}(x_n, x) = d_{pr}(x, x)$,dengan kata lain untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq N_\varepsilon$ berlaku $\left|d_{pr}(x_n, x) - d_{pr}(x, x)\right| < \varepsilon$.*

Definisi 13. *Diberikan (H, d_{pr}) merupakan ruang metrik parsial rectangular. Barisan (x_n) di H disebut dengan barisan Cauchy jika $\lim_{n,m\to\infty} d_{pr}(x_n, x_m)$ ada dan berhingga.*

Definisi 14. *Ruang metrik parsial rectangular (H, d_{pr}) disebut lengkap jika untuk setiap barisan Cauchy (x_n) di H konvergen ke $x \in H$, atau dapat dituliskan*

$$\lim_{n,m\to\infty} d_{pr}(x_n, x_m) = \lim_{n\to\infty} d_{pr}(x_n, x) = d_{pr}(x, x)$$

Berbeda dengan ruang metrik, barisan pada ruang metrik parsial rectangular mempunyai sifat kekonvergenan yang tidak selalu tunggal. Hal ini dapat dilihat pada Contoh 15 dan Contoh 16.

Contoh 15. *Diberikan* (H, d_{pr}) *ruang metrik parsial rectangular dengan himpunan H dan fungsi* d_{pr} *merujuk pada Contoh 6. Misalkan diberikan barisan* (x_n) *di H dengan* $x_n = \frac{1}{3n}$ *untuk* $n \in \mathbb{N}$. *Mudah ditunjukkan bahwa* $\lim_{n\to\infty} d_{pr}(x_n, 0) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3n} + \varepsilon\right) = \varepsilon = d_{pr}(0,0)$, *sedangkan disisi lain diperoleh* $\lim_{n\to\infty} d_{pr}(x_n, 3) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3n} + \varepsilon\right) = \varepsilon = d_{pr}(3,3)$,
Sehingga diperoleh kesimpulan bahwa barisan (x_n) *konvergen ke* 0 *dan* 3.

Contoh 16. *Diberikan* (H, d_{pr}) *ruang metrik parsial rectangular dengan* $H = \mathbb{R} \cup \{0\}$ *dan* $d_{pr}(u, v) = max\{u, v\}$ *untuk setiap* $u, v \in X$. *Diberikan barisan* (x_n) *di H dengan* $x_n = \frac{1}{n}$ *untuk* $n \in \mathbb{N}$. *Mudah ditunjukkan bahwa*

$$\lim_{n\to\infty} d_{pr}(x_n, x) = \lim_{n\to\infty} max\left\{\frac{1}{n}, x\right\} = max\{0, x\} = x = max\{x, x\} = d_{pr}(x, x)$$

Hal tersebut dapat disimpulkan bahwa (x_n) *konvergen ke untuk setiap* $x \in H$ *dengan kata lain* (x_n) *mempunyai tak hingga titik kekonvergenan di* (X, d_{pr}) .

Selanjutnya, diberikan Proposisi baru yang menunjukkan bagaimana syarat cukup sifat ketunggalan konvergensi barisan di ruang metrik parsial rectangular. Sebelum itu diberikan definisi berikut [13].

Definisi 17. *Misalkan* (H, d_{pr}) *merupakan ruang metrik parsial rectangular.*

1) *Suatu barisan* $\{x_n\} \subset H$ *disebut barisan 0-Cauchy jika* $\lim_{n,m\to\infty} d_{pr}(x_n, x_m) = 0$.
2) *Ruang* (X, d_{pr}) *disebut 0-complete jika untuk setiap barisan 0-Cauchy* (x_n) *terdapat* $x \in H$ *sehingga berlaku*

$$\lim_{n\to\infty} d_{pr}(x_n, x) = d_{pr}(x, x) = \lim_{n,m\to\infty} d_{pr}(x_n, x_m) = 0$$

Proposisi 18. *Jika* (H, d_{pr}) *ruang metrik parsial rectangular 0-complete maka barisan konvergen* $\{x_n\}$ *di H mempunyai konvergensi tunggal.*

Bukti. Misalkan $\{x_n\} \subset H$ konvergen ke x_1 dan x_2 di H. Perhatikan bahwa

$$d_{pr}(x_1, x_2) \le d_{pr}(x_1, x_n) + d_{pr}(x_n, x_m) + d_{pr}(x_m, x_2) - d_{pr}(x_n, x_n) - d_{pr}(x_m, x_m)$$

untuk nilai $n, m \to \infty$ diperoleh bahwa $d_{pr}(x_1, x_2) = 0$. Berdsarkan Lemma 6 diperoleh bahwa $x_1 = x_2$.

Berdasarkan Teorema 9, menyatakan bahwa sifat fungsi metrik rectangular yang dikonstruksi melalui fungsi metrik parsial rectangular menyebabkan adanya sifat kelengkapan ruang yang dipertahankan [12].

Teorema 19. *Misalkan* (H, d_r) *sembarang ruang metrik rectangular yang dikonstruksi melalui* (H, d_{pr}) *ruang metrik parsial rectangular berdasarkan Persamaan (2).. Ruang metrik rectangular* (H, d_r) *lengkap jika dan hanya jika ruang metrik parsial rectangular* $(H, d_{pr}\ )$ *lengkap.*

Terinspirasi dari Teorema 19, berikut ini diberikan hubungan sifat konvergensi barisan, sifat barisan Cauchy, sifat kelengkapan ruang dari ruang metrik parsial rectangular dengan ruang metrik rectangular yang dikonstruksi berdasarkan Teorema 10.

Proposisi 20. *Misalkan* (H, d_{pr}) *sembarang ruang metrik parsial rectangular yang dikonstruksi melalui ruang metrik rectangular* (X, d_r) *dengan metrik* d_{pr} *dikonstruksi menggunakan metrik* d_r *berdasarkan persaman (3). Barisan* $\{x_n\}$ *di* X *konvergen di* (H, d_{pr}) *jika dan hanya jika konvergen di* (X, d_r).

Bukti. $(\Rightarrow)$ Asumsikan (x_n) konvergen ke x di ruang (H, d_r) diperoleh $\lim_{n\to\infty} d_r(x_n, x) = 0$sehingga diperoleh

$$\lim_{n\to\infty} d_{pr}(x_n, x) = \lim_{n\to\infty} (d_r(x_n, x) + \alpha) = \alpha = d_{pr}(x, x)$$

Diperoleh bahwa (x_n) konvergen di $x \in H$ terhadap ruang (H, d_{pr}). $(\Leftarrow)$ Asumsikan $\{x_n\}$ konvergen ke $x \in H$ terhadap ruang (H, d_{pr}), diperoleh $\lim_{n\to\infty} d_{pr}(x_n, x) = d_{pr}(x, x)$ berdasarkan Persamaan (3) didapat

$$\lim_{n\to\infty} d_{pr}(x_n, x) = \lim_{n\to\infty} (d_r(x_n, x) + \alpha) = \lim_{n\to\infty} d_r(x_n, x) + d_r(x, x) = d_{pr}(x, x)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} d_r(x_n, x) = 0$$

Diperoleh bahwa(x_n) konvergen di $x \in X$ terhadap ruang (H, d_r).

Proposisi 21. *Misalkan* (H, d_{pr}) *sembarang ruang metrik parsial rectangular yang dikonstruksi melalui ruang metrik rectangular* (H, d_r) *dengan metrik* d_{pr} *dikonstruksi menggunakan metrik* d_r *berdasarkan persaman (3). Jika barisan* (x_n) *barisan Cauchy di* (H, d_r), *maka* $\{x_n\}$ *merupakan Cauchy di* (H, d_{pr})

Bukti. Diketahui barisan (x_n) barisan Cauchy di (H, d_r) artinya $\lim_{n,m\to\infty} d_r(x_n, x_m) = 0$ sehingga diperoleh bahwa

$$\lim_{n,m\to\infty} d_{pr}(x_n, x_m) = \lim_{n,m\to\infty} (d_r(x_n, x_m) + \alpha) = \alpha$$

Karena $\lim_{n,m\to\infty} d_{pr}(x_n, x_m)$ ada dan berhingga, akibatnya barisan (x_n) merupakan barisan Cauchy di (X, d_r).

Berdasarkan Proposisi 20 dan Proposisi 21, diperoleh akibat sebagai berikut.

Akibat 22. *Misalkan* (H, d_{pr}) *sembarang ruang metrik parsial rectangular yang dikonstruksi melalui ruang metrik rectangular* (X, d_r) *dengan metrik* d_{pr} *dikonstruksi menggunakan metrik* d_r *berdasarkan persaman (3). Jika ruang* (H, d_r) *lengkap maka ruang* (H, d_{pr}) *lengkap*

4 Simpulan

Suatu metrik parsial rectangular dapat dikonstruksi oleh sembarang metrik rectangular, begitu juga sebaliknya. Hal tersebut dapat mempertahankan sifat kelengkapan dalam masing-masing ruang tersebut. Secara umum, konvergensi barisan dalam ruang metrik parsial rectangular tidak selalu tunggal. Syarat cukup agar suatu barisan dalam ruang metrik parsial rectangular bersifat tunggal, yaitu ruang tersebut harus *0-complete.*

5 Ucapan Terimakasih

Terimakasih kepada pengulas atas segala kritik, saran, dan komentar yang berharga untuk perbaikan penelitian ini.

6 Daftar Pustaka

[1] E. Kreyszig, *Introductory functional analysis with applications*. 1976.

[2] O. Kaleva and S. Seikkala, "On fuzzy metric spaces," *Fuzzy Sets Syst*, vol. 12, no. 3, pp. 215–229, 1984.

[3] S. Czerwik, "Contraction mappings in b-metric spaces," 1993.

[4] A. Branciari, "A fixed point theorem of Banach-Caccioppoli type on a class of generalized metric spaces," 2000.

[5] Y. Zhou, "Fixed point in fuzzy metric spaces," in *Bio-Inspired Computing-Theories and Applications*, Springer, 2014, pp. 659–663.

[6] R. I. Sabri, M. RASHEED, O. Alabdali, S. SHIHAB, and T. RASHID, "On Some Properties in Fuzzy Metric Space," *Journal of Al-Qadisiyah for Computer Science and Mathematics*, vol. 13, no. 1, p. Page-55, 2021.

[7] Z. D. Mitrović, "On an open problem in rectangular b-metric space," *The Journal of Analysis*, vol. 25, no. 1, pp. 135–137, 2017.

[8] R. George, S. Radenovic, K. P. Reshma, and S. Shukla, "Rectangular b-metric space and contraction principles," *J. Nonlinear Sci. Appl*, vol. 8, no. 6, pp. 1005–1013, 2015.

[9] A. Branciari, "A fixed point theorem of Banach-Caccioppoli type on a class of generalized metric spaces," 2000.

[10] J. R. Roshan, V. Parvaneh, and Z. Kadelburg, “New fixed point results in b-rectangular metric spaces,” *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, vol. 21, no. 5, pp. 614–634, 2016.

[11] S. G. Matthews, “Partial Metric Topology,” 1994.

[12] S. Shukla, “Partial rectangular metric spaces and fixed point theorems,” *The Scientific World Journal*, vol. 2014, 2014, doi: 10.1155/2014/756298.

[13] N. van Dung and V. Thi Le Hang, “A Note on Partial Rectangular Metric Spaces,” 2014.