Limits: Journal of Mathematics and Its Applications
E-ISSN: 2579-8936
P-ISSN: 1829-605X
Vol. 17, No. 2, Desember 2020, 123-137
DOI: http://dx.doi.org/10.12962/limits.v17i2.6650

Konstruksi *Brace* Dua Sisi Dengan Menggunakan Ring Jacobson

Puguh Wahyu Prasetyo[1*], Catur Yustika Melati[2]
[1,2]Universitas Ahmad Dahlan; Kampus 4 UAD, Jalan Lingkar Selatan, Tamanan, Bantul DIY
Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Ahmad Dahlan, Indonesia
puguh.prasetyo@pmat.uad.ac.id

Diajukan:26 Februari 2020, Diperbaiki: 6 Desember 2020, Diterima:12 Desember 2020

Abstrak

Dalam perkembangan ilmu pengetahuan alam, matematika dan fisika merupakan ilmu-ilmu sains dasar yang merupakan fundamental bagi cabang ilmu yang lain. Dalam perkembangan ilmu Fisika seringkali juga memotivasi adanya temuan-temuan baru dalam ilmu matematika khususnya aljabar. Di lain pihak, banyak permasalahan dalam fisika teoritis dapat diselesaikan melalui pendekatan aljabar. Dalam kesempatan ini, salah satu bukti hubungan antara fisika dan matematika (khususnya aljabar) diberikan. Pada tahun 1967 suatu persamaan fundamental dalam Ilmu fisika ditemukan oleh penerima hadiah Nobel C. N. Yang. Dalam kurun waktu yang sama, persamaan ini juga diklaim ditemukan oleh R. J. Baxter. Oleh sebab itu, persamaan fundamental ini disebut dengan persamaan Yang-Baxter. Faktanya, persamaan Yang-Baxter ini mempunyai dampak besar dalam perkembangan ilmu pengetahuan, salah satunya adalah dalam Teori *Knot.* Akan tetapi solusi analitik dari persamaan ini belum ditemukan hingga saat ini. Hal ini memotivasi para peneliti untuk menemukan solusinya baik secara kualitatif maupun kuantitatif. Beberapa solusi pendekatan kualitatif telah ditemukan dengan menggunakan pendakatan struktur aljabar yang disebut dengan *brace.* Dalam paper ini, deskripsi tentang *brace* diberikan sebagai suatu perumuman dari radikal Jacobson dari suatu ring. Konstruksi *brace* dua sisi juga diberikan dalam artikel ini.

Kata Kunci: Grup abelian, brace, persamaan Yang-Baxter, radikal Jacobson.

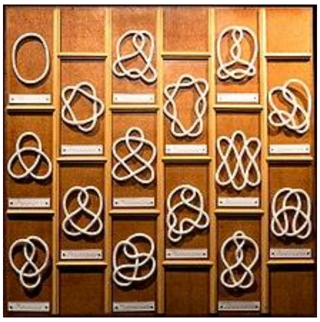
Abstract

In the development of science, mathematics and physics are basic sciences that are used as a fundamental aspect for another branch of science. In the development of physics, we often found some notions which motivated some new inventions in Mathematics, especially in algebra. On the other hand, many problems in theoretical physics can be solved by using the algebraic approach. In this chance, one of the proof the relationship between physics and mathematics (especially in algebra) is given. In 1967, a fundamental equation in physics had been found by Nobel laureate C. N Yang. In the same period, this fundamental equation was also claimed by R.J Baxter. Hence, this fundamental equation is called the Yang-Baxter equation. In fact, the Yang-Baxter equation has a significant impact on science, for example, in Knot Theory. However, the analytics solution of the Yang-Baxter equation has not been found until now. This condition motivates some researchers to find the solution to the Yang-Baxter equation via qualitative research or quantitative research. Some qualitative approach of the Yang-Baxter equation solution has been developed by using an approach type of algebraic structure, namely, brace. In this paper, the description of the brace will be given as a generalization of the Jacobson radical of rings. The construction of two-sided braces is also given in this paper.

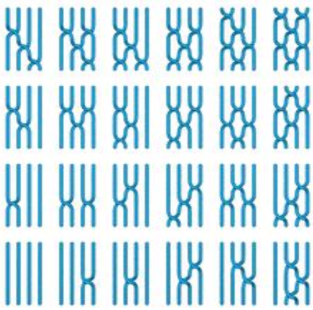
Keywords*: Abelian group, brace, Yang-Baxter equation, Jacobson radical.*

1 Pendahuluan

Persamaan Yang-Baxter pertama kali muncul dalam bidang fisika teoritis. Persamaan Yang-Baxter ini ditemukan oleh Fisikawan penerima hadiah Nobel C. N. Yang dalam paper [1]. Selain itu, persamaan Yang-Baxter juga ditemukan dalam [2] dan [3] karya R. J Baxter dengan bidang statistika mekanik. Persamaan Yang-Baxter ini merupakan salah satu persamaan fundamental dalam fisika matematis yang menjadi dasar dalam perkembangan Teori *Knot* dan perkembangan grup *Braid* [4]. Ilustrasi Teori *Knot* dan grup *Braid* ditunjukkan oleh gambar berikut ini.



Gambar 1. Ilustrasi Teori *Knot* (Simpul) [5].



Gambar 2. Representasi Visual Grup *Braid* berorder 24 [6].

Contoh grup *Braid* berorder 24 sendiri adalah grup permutasi S_4 yang memiliki anggota $4! = 4.3.2.1 = 24$ dengan operasi komposisi. Selain itu, dampak adanya persamaan Yang-Baxter juga dapat ditemukan dalam bidang kuantum mekanik [4]. Hal ini memotivasi para peneliti untuk mencari solusi dari persamaan Yang-Baxter. Solusi yang diperoleh saat ini terbagi menjadi dua jenis, yaitu solusi dengan pendekatan kualitatif, yaitu dengan menggunakan aksioma-aksioma aljabar dan dengan pendekatan kuantitatif dengan menggunakan solusi numerik [7]. Akan tetapi secara umum, solusi analitiknya masih belum ditemukan hingga saat ini [4]. Beberapa solusi dapat ditemukan dalam [8] dan [9]. Selain itu, Agata Smoktunowicz dalam [10] dan [11] juga memberikan solusi alternatif dari sudut pandang teori himpunan. Selanjutnya, solusi dengan pendekatan teori himpunan juga diberikan oleh Castelli, *et.al* dalam papernya [12] dan Matsumoto & Shimizu dalam [13]. Solusi yang diperumum diberikan oleh [14] dengan menggunakan struktur aljabar baru yang disebut dengan *brace*. *Brace* pertama kali dikenalkan pada tahun 2007 oleh Wolfgang Rump dalam papernya [15]. Adapun konsep dan sifat-sifat dasar *brace* akan dikaji lebih lanjut pada bagian berikutnya. Di lain pihak, solusi numerik dalam bentuk matriks diberikan oleh Smoktunowicz dalam papernya [7].

2 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode kualitatif dengan menggunakan hasil-hasil penelitian sebelumnya melalui proses *literature study* dan *library research*. Adapun langkah-langkah dalam penelitian ini adalah dijelaskan dalam beberapa tahapan berikut ini.

2.1. Menelaah Konsep *Brace*

Sebagai tahap awal dalam penelitian ini, pengetahuan tentang *brace* merupakan dasar untuk mengembangkan teori-teori baru dalam aljabar abstrak. Adapun langkah-langkah dalam tahapan awal ini adalah memahami definisi *brace* serta memberikan contoh-contoh *brace* dari hasil-hasil yang sudah ada.

2.2. Menelaah Konsep Dalam Teori Radikal Yang Berkaitan Dengan *brace*

Adapun topik dalam penelitian ini adalah Teori Radikal. Teori Radikal merupakan salah satu cabang dalam aljabar abstrak yang saat ini masih sangat luas pengembangannya. Hal ini ditunjukkan dengan adanya permasalahan terbuka atau *open problem*. Dalam kesempatan ini, dasar-dasar Teori Radikal yang dapat digunakan untuk melengkapi hasil yang berkaitan tentang *brace* adalah radikal Jacobson.

2.3. Konstruksi Hasil

Setelah menguasai konsep tentang *brace* dan radikal Jacobson, maka langkah berikutnya adalah memberikan syarat perlu dan syarat cukup agar suatu himpunan merupakan *brace*. Selanjutnya, akan diberikan hubungan *brace* dengan radikal yang lain seperti radikal prima $\boldsymbol{\beta}$, radikal Levitzki $\boldsymbol{\mathcal{L}}$, dan radikal nil $\boldsymbol{\mathcal{N}}$. Pada akhir bagian dalam hasil penelitian ini, diberikan konsep ring secara khusus yang merupakan *brace*. Adapun ring yang secara khusus digunakan dalam hasil penelitian ini merupakan ring himpunan semua bilangan rasional dengan pembilang (*numerator*) berupa bilangan genap dan penyebut (*denumerator*) berupa bilangan ganjil. Himpunan ini dinotasikan sebagai berikut

$$\boldsymbol{W} = \left\{ \frac{\boldsymbol{2x}}{\boldsymbol{2y+1}} \,\middle|\, \mathbf{gcd}(\boldsymbol{2x}, \boldsymbol{2y+1}) = \mathbf{1}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Matematikawan yang pertama kali menemukan ring ini adalah Nathan Jacobson yang sekaligus pertama kali menemukan radikal Jacobson. Adapun hasil akhir dalam penelitian ini, ditunjukkan bahwa ring $\boldsymbol{W} = \{\frac{\boldsymbol{2x}}{\boldsymbol{2y+1}} \mid \mathbf{gcd}(\boldsymbol{2x}, \boldsymbol{2y} + \mathbf{1}) = \mathbf{1}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{Z}\}$ yang ditemukan oleh Nathan Jacobson merupakan *brace*.

3 Brace

Untuk mempermudah proses penyelidikan diberikan definisi *brace* kiri, *brace* kanan, dan *brace* dua sisi di bawah ini yang ekuivalen dengan definisi *brace* oleh Rump [15].

Definisi 1 [11] *Suatu himpunan tak kosong A disebut brace kiri jika operasi biner $(+)$ dan $(.)$ sedemikian hingga $(B, +)$ merupakan grup abelian dan $(B, .)$ merupakan grup yang belum tentu komutatif dan memenuhi sifat $a.(b + c) + a = a.b + a.c$ untuk setiap $a, b, c \in B$. Didefinisikan dengan cara yang sama, disebut brace kanan jika $(b + c).a + a = b.a + c.a$. Himpunan $(B, +, .)$ disebut brace dua sisi jika merupakan brace kiri sekaligus brace kanan.*

Untuk memperjelas definisi di atas, diberikan teorema di bawah ini untuk menunjukkan eksistensi *brace* kiri.

Teorema 2 [16] *Misalkan $A = \mathbb{Z}/(2p)$ dengan p adalah bilangan prima. Himpunan A membentuk brace kiri yang bukan merupakan brace kanan.*

Bukti.

Didefinisikan produk atas A, $x_1.x_2 = x_1 + (-1)^{x_1}x_2$. Kemudian dapat dengan mudah ditunjukkan bahwa A merupakan *brace* kiri. Sebaliknya perhatkan bahwa $(1 + 1).1 = 2.1 + 1 = 2 + (-1)^2 + 1 = 4$ dan $1.1 + 1.1 = 0 + 0 = 0$. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa himpunan A merupakan *brace* kiri akan tetapi bukan *brace* kanan.

Contoh 1 [16] Diberikan grup abelian A dan didefinisikan $a.a' = a + a'$ untuk setiap $a, a' \in A$. Grup abelian A dengan operasi biner $(.)$ membentuk *brace* dua sisi. Contoh ini merupakan bentuk *brace* yang trivial.

Eksistensi *brace* dalam perkembangan ilmu aljabar abstrak khususnya teori ring sangatlah penting. Penelitian tentang *brace* dilanjutkan oleh para peneliti aljabar dengan mengkaji generalisasinya seperti yang ditunjukkan dalam paper [14], [17] dan [18]. Selain itu, hubungan *braces* dengan struktur grup juga diberikan oleh [19].

4 Pengantar Teori Radikal Ring

Dalam bagian ini akan diberikan beberapa definisi fundamental seperti ring prima, ring nil, ring nilpotent, dan ring *quasi*-beraturan sebagai landasan yang akan digunakan dalam menyelidiki sifat-sifat *brace* yang berkaitan dengan teori radikal ring.

Definisi 3 [20] *Diketahui ring A. Suatu elemen $a \in A$ disebut elemen nilpotent jika terdapat bilangan bulat positif n sehingga $a^n = 0$. Ring A disebut ring nil jika setiap elemen dari ring A merupakan elemen nilpotent. Di lain pihak, ring A disebut ring nilpotent jika terdapat bilangan bulat positif n sehingga $A^n = 0$.*

Definisi 4 [20] *Suatu ideal P dari ring A disebut ideal prima jika I, J ideal A dengan sifat $IJ \subseteq P$, maka berlaku $I \subseteq P$ atau $J \subseteq P$. Ring A disebut ring prima jika $\{0\}$ merupakan ideal prima. Selanjutnya ring A disebut ring quasi-beraturan jika dengan operasi biner $(\circ)$ atas A yang didefinisikan oleh $a \circ b = a + b + ab$ untuk setiap $a, b \in A$ membentuk grup.*

Kontribusi hasil penelitian dalam paper ini dalam perkembangan Ilmu Matematika khususnya Aljabar Abstrak yaitu memberikan konstruksi *brace* dua sisi dari sudut pandang Teori Radikal Ring. Sebelum diberikan konstruksi *brace* dua sisi, didefinisikan suatu operasi biner $*$ atas himpunan tak kosong B sebagai berikut

$$a * b = a.b - a - b \qquad (1).$$

Berikut merupakan syarat perlu dan syarat cukup agar suatu himpunan merupakan *brace* dua sisi.

Teorema 5 [20] *Himpunan tak kosong $(B, +, .)$ merupakan brace dua sisi jika dan hanya jika $(a + b) * c = a * c + b * c$ untuk setiap $a, b, c \in B$.*

Bukti.

Jelas dalam [20].

Teorema 5 di atas merupakah salah satu alat yang digunakan untuk menghubungkan antara *brace* dan radikal *Jacobson*. Oleh sebab itu pada bagian ini akan diberikan konsep-konsep kelas radikal ring.

Definisi 6 [21] *Suatu kelas ring γ disebut sebagai kelas ring yang tertutup terhadap homomorfisma ring jika untuk setiap $A \in \gamma$, maka $A/I \in \gamma$ untuk setiap ideal I dari A.*

Untuk memperjelas eksistensi kelas yang tertutup terhadap homomorfisma perhatikan contoh-contoh berkut ini.

Contoh 2 [21] Perhatikan kelas ring $\mathcal{N}$ yang terdiri dari semua ring nil. Ingat kembali definisi ring nil. Suatu ring A disebut ring nil jika untuk setiap $a \in A$ terdapat bilangan bulat positif n sehingga $a^n = 0$. Perhatikan bahwa setiap peta dari suatu homomorfisma ring dapat direpresentasi sebagai ring faktor A/I dengan I ideal A. Oleh sebab itu, dapat diambil sebarang I yang merupakan ideal A. Selanjutnya diambil sebarang $\bar{a} \in A/I$, maka $\bar{a}$ dapat direpresentasikan sebagai $\bar{a} = a + I$ dengan $a \in A$. Karena A merupakan ring nil, maka terdapat bilangan bulat positif n sehingga $a^n = 0$. Selanjutnya, $\bar{a}^n = (a+I)^n = a^n + I = 0 + I = \bar{0}$. Oleh sebab itu, dapat disimpulkan bahwa setiap elemen $\bar{a} \in A$ merupakan elemen *nilpotent*. Dengan kata lain, dapat disimpulkan bahwa ring faktor A/I merupakan ring nil.

Untuk memperkuat konsep, setelah diberikan contoh kelas ring yang bersifat tertutup terhadap homomorfisma, berikut ini merupakan contoh kelas ring yang tidak tertutup terhadap homomorfisma.

Contoh 3 [21] Perhatikan kelas ring π yang terdiri dari semua ring prima. Pada contoh berikut akan ditunjukkan bahwa kelas semua ring prima π merupakan kelas ring yang tidak tertutup terhadap homomorfisma dengan *counter example*. Perhatikan ring $W = \{\frac{2x}{2y+1} \mid \gcd(2x, 2y+1) = 1, x, y \in \mathbb{Z}\}$. Jelas bahwa ring W merupakan ring yang elemen-elemennya adalah himpunan bilangan-bilangan dengan *numerator* genap dan *denumetaror* ganjil dan ring W merupakan ring prima dengan ideal-idealnya membentuk kondisi rantai menurun (*descending chain condition*) dapat direpresentasikan sebagai (2^m) dengan $m \in \mathbb{N}$. Akan tetapi ring faktornya bukan merupakan ring prima karena setiap ring faktornya dapat direpesentasikan sebagai $\frac{(2^m)}{(2^k)}$ dengan $m \geq k$ sedemikian sehingga $\left(\frac{(2^m)}{(2^k)}\right)^2 = \{\bar{0}\}$. Oleh sebab itu, $\frac{(2^m)}{(2^k)}$ merupakan ring *nilpotent* yang mengakibatkan $\frac{(2^m)}{(2^k)}$ bukan merupakan ring prima. Dengan demikian $\frac{(2^m)}{(2^k)} \notin \pi$. Jadi π tidak tertutup terhadap homomorfisma.

Definisi 7 [21] *Suatu kelas ring γ disebut sebagai kelas ring yang memiliki sifat induktif jika $I_1 \subseteq \cdots \subseteq I_\lambda \subseteq \cdots$ merupakan rantai naik ideal-ideal dari suatu ring A dan jika setiap $I_\lambda \in \gamma$, maka $\cup I_\lambda \in \gamma$.*

Untuk memperjelas struktur kelas ring yang memiliki sifat induktif dan tidak, perhatikan dua contoh kelas ring sebagai berikut.

Contoh 4 Dapat ditunjukkan bahwa kelas ring $\mathcal{N}$ yang terdiri dari semua ring *nil* merupakan kelas ring yang memiliki sifat induktif [21].

Contoh 5 Kelas ring $\mathcal{N}_0$ yang terdiri dari semua ring *nilpotent* tidak memiliki sifat induktif. Penjelasan dan pembuktikan secara lengkap telah ada dalam [21].

Definisi 8 [21] *Suatu kelas ring γ disebut tertutup terhadap perluasan jika untuk setiap ring A sehingga terdapat I yang merupakan ideal A dengan sifat I dan ring faktor A/I berada dalam kelas ring γ, maka A juga merupakan anggota γ.*

Definisi 9 [21] *Suatu kelas ring γ disebut kelas radikal ring jika γ tertutup terhadap homomorfisma, memiliki sifat induktif dan tertutup terhadap perluasan.*

Salah satu contoh kelas radikal adalah kelas semua ring nil $\mathcal{N}$ yang ditunjukkan oleh [22] pada Lemma 3. Berdasarkan konstruksinya, ada dua jenis konstruksi, yaitu kontruksi radikal atas dan konstruksi radikal bawah. Dua kontruksi kelas radikal ini dapat ditemukan dalam [22] dan [21]. Dari kontruksi tersebut, terdapat radikal atas yang dibangun oleh kelas khusus antara lain radikal prima β, radikal Levitzki $\mathcal{L}$, dan radikal Jacobson $\mathcal{J}$. Berdasarkan sifatnya, kelas radikal-kelas radikal ini merupakan anggota dari *lattice* semua kelas radikal *supernilpotent*. Dalam *lattice* tersebut, radikal prima β merupakan elemen terkecil. Adapun bagian *lattice* tersebut diilustrasikan oleh gambar di bawah ini.

$$\boxed{\beta - \mathcal{L} - \mathcal{N} - \mathcal{J}}$$

Gambar 3. Ilustrasi Hubungan Antara $\beta, \mathcal{L}, \mathcal{N}$ dan $\mathcal{J}$.

Kelas radikal prima β termuat dengan tegas dalam kelas radikal Levizki $\mathcal{L}$, kelas radikal levitzki $\mathcal{L}$ termuat secara tegas dalam kelas radikal nil $\mathcal{N}$ dan kelas radikal nil termuat secara tegas dalam kelas radikal Jacobson $\mathcal{J}$. Hal dijelaskan karena adanya contoh berikut ini.

Contoh 6 [21] Misalkan K merupakan lapangan berhingga dan $K\langle x, y\rangle$ merupakan polinomial aljabar atas K dalam x dan y yang tidak berlaku sifat komutatif. Perhatikan bahwa himpunan $K\langle x, y\rangle$ merupakan himpunan yang terhitung atau *countable* maka himpunan ini dapat dinotasikan dengan R yang merupakan polinomial dengan konstanta nol. Dengan mencacah elemen-elemennya, maka elemen R dapat dinotasikan dengan $\{u_1, u_2, ...\}$. Selanjutnya, misalkan I merupakan himpunan tak kosong yang merupakan ideal R yang dibangung oleh semua s_{ij}, dengan rincian elemen S_{ij} dapat diperoleh dari [21]. Lebih lanjut, dalam [21] ditunjukkan bahwa ring faktor R/I merupakan elemen dari kelas radikal nil $\mathcal{N}$ tetapi R/I bukan anggota kelas radikal Levizki $\mathcal{L}$. Oleh sebab itu $\mathcal{N} \neq \mathcal{L}$. Kemudian perhatikan bahwa setiap elemen *nilpotent* dari suatu ring merupakan elemen *quasi*-beraturan kiri seperti yang dijelaskan dalam Proposisi 4.4.4 [21]. Akibatnya, setiap ring nil merupakan ring *quasi*-beraturan. Oleh sebab itu, setiap ring nil termuat dalam kelas radikal Jacobson $\mathcal{J}$. Sebaliknya perhatikan ring $\mathcal{W}$ yang didefinisikan oleh

$$\mathcal{W} = \left\{\frac{2x}{2y+1} \mid \gcd(x, y) = 1;\ x, y \in \mathbb{Z}\right\}. \qquad (2).$$

Perhatikan bahwa ring $\mathcal{W}$ merupakan salah satu anggota dalam kelas radikal Jacobson seperti yang dijelaskan dalam [21]. Akan tetapi, perhatikan bahwa ring $\mathcal{W}$ bukanlah ring nil. Dengan demikian $\mathcal{N} \neq \mathcal{J}$.

Berdasarkan sifat *lattice* dari semua kelas radikal supernilpotent dan Contoh 10 yang diberikan di atas dapat disimpulkan bahwa $\beta \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{N} \subset \mathcal{J}$. Akan tetapi dapat ditemukan ring-ring tertentu sehingga berlaku $\beta(A) = \mathcal{L}(A) = \mathcal{N}(A) = \mathcal{J}(A)$. Dengan masing-masing $\beta(A), \mathcal{L}(A), \mathcal{N}(A)$ dan $\mathcal{J}(A)$ adalah $\beta(A) = \sum\{I \text{ ideal ring } A | I \in \beta\}$, $\mathcal{L}(A) = \sum\{I \text{ ideal ring } A | I \in \mathcal{L}\}$, $\mathcal{N}(A) = \sum\{I \text{ ideal ring } A | I \in \mathcal{N}\}$, dan $\mathcal{J}(A) = \sum\{I \text{ ideal ring } A | I \in \mathcal{J}\}$. Oleh sebab itu, untuk sebarang ring A berlaku sifat berikut ini,

$$\beta(A) \subseteq \mathcal{L}(A) \subseteq \mathcal{N}(A) \subseteq \mathcal{J}(A).$$

5 Hasil dan Pembahasan

Pada teorema-teorema berikutnya akan dibahas tentang kaitan antara kelas radikal Jacobson $\mathcal{J}$ dengan *brace* yang telah diperkenalkan pada bagian sebelumnya. Sebagai pendahuluan diberikan teorema sebagai berikut yang merupakan alat hubung antara *brace* dan radikal *Jacobson*.

Teorema 10 [1] *Misalkan B merupakan himpunan tak kosong. Himpunan B yang dilengkapi dengan dua operasi biner yaitu $(+)$ dan $(.)$ merupakan brace dua sisi jika dan hanya jika $(B,+,*)$ merupakan ring Jacobson, dengan kata lain, $B \in \mathcal{J}$ dan operasi biner $(*)$ merupakan operasi yang didefinisikan pada Persamaan 1.*

Bukti.

Diketahui himpunan tak kosong B yang dilengkapi dengan dua operasi biner yaitu $(+)$ dan $(.)$ merupakan *brace* dua sisi. Akan ditunjukkan bahwa $(B,+,*)$ merupakan ring Jacobson yang artinya berdasarkan definisi pembentukkan kelas ring Jacobson harus ditunjukkan bahwa $(B,\circ)$ membentuk grup dengan $(\circ)$ merupakan operasi biner atas B yang didefinisikan oleh $a \circ b = a + b + a * b$ untuk setiap $a, b \in B$. Selanjutnya diambil sebarang $a, b \in B$, maka berdasarkan definisi operasi biner $(\circ)$ diperoleh $a \circ b = a + b + a * b$, akibatnya $a * b = a \circ b - a - b$. Selanjutnya perhatian Persamaan 1, maka operasi biner $(\circ)$ sama dengan operasi $(.)$ yang telah didefnisikan pada B dengan memandang $(B,+,.)$ sebagai *brace*. Oleh sebab itu $(B,\circ)$ membentuk grup, sehingga dapat disimpulkan bahwa $(B,+,*)$ merupakan ring Jacobson.

Sebaliknya diketahui $(B,+,*)$ merupakan ring Jacobson, akan ditunjukkan bahwa $(B,+,.)$ membentuk *brace* dua sisi. Karena $(B,+,*)$ merupakan ring Jacobson, maka jelas bahwa $(B,.)$ membentuk grup. Selanjutnya diambil sebarang $a, b, c \in B$, sehingga diperoleh $(a + b) * c = a * c + b * c$ karena $(B,+,*)$ merupakan ring sehingga berlaku sifat distributif. Dengan demikian berdasarkan Teorema 5 dapat disimpulkan bahwa $(B,+,.)$ membentuk *brace* dua sisi.

Sebagai akibat dari teorema di atas dan sifat yang dimiliki oleh kelas radikal prima β, kelas radikal Levitzki $\mathcal{L}$, kelas radikal nil $\mathcal{N}$, dan kelas radikal Jacobson $\mathcal{J}$ dalam *lattice* semua kelas radikal *supernilpotent*, diperoleh akibat sebagai berikut.

Teorema 11 *Diketahui ring A dan himpunan-himpunan berikut $\beta(A), \mathcal{L}(A), \mathcal{N}(A), \mathcal{J}(A)$ berturut-turut merupakan radikal prima, Levitzki radikal, radikal nil, dan radikal Jacobson dari ring A.*

Dapat ditunjukkan bahwa $\beta(A), \mathcal{L}(A), \mathcal{N}(A)$, dan $\mathcal{J}(A)$ masing-masing merupakan brace dua sisi.

Bukti.

Berdasarkan sifat *lattice* dari semua radikal *supernilpotent* diperoleh $\beta \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{N} \subset \mathcal{J}$ [2]. Oleh sebab itu untuk sebarang ring A berlaku $\beta(A) \subseteq \mathcal{L}(A) \subseteq \mathcal{N}(A) \subseteq \mathcal{J}(A)$. Dengan masing-masing $\beta(A), \mathcal{L}(A), \mathcal{N}(A), \mathcal{J}(A)$ merupakan ideal-ideal terbesar dari ring A yang masing-masing termuat dalam kelas radikal $\beta, \mathcal{L}, \mathcal{N}, \mathcal{J}$. Oleh sebab itu $\beta(A), \mathcal{L}(A), \mathcal{N}(A), \mathcal{J}(A) \in \mathcal{J}$. Dengan demikian $(A), \mathcal{L}(A), \mathcal{N}(A), \mathcal{J}(A)$ masing-masing merupakan ring Jacobson. Jadi berdasarkan Teorema 10, dapat disimpulkan bahwa $(A), \mathcal{L}(A), \mathcal{N}(A)$, dan $\mathcal{J}(A)$ masing-masing membentuk *brace* dua sisi.

Pada teorema berikut akan dijelaskan eksistensi contoh nyata dari suatu *brace* dua sisi dengan menggunakan Teorema 10.

Teorema 12 *Didefinisikan himpunan $W = \{\frac{2x}{2y+1} \mid gcd(2x, 2y+1) = 1, x, y \in \mathbb{Z}\}$. Struktur $(W, +, .)$ merupakan brace dua sisi, dengan $a.b = a + b + (a \times b)$ untuk setiap $a, b \in W$.*

Bukti.

Berdasarkan Teorema 10, untuk menunjukkan bahwa himpunan

$$W = \left\{\frac{2x}{2y+1} \middle| \gcd(2x, 2y+1) = 1, x, y \in \mathbb{Z}\right\},$$

merupakan *brace* dua sisi cukup ditunjukkan bahwa W merupakan ring Jacobson. Dengan kata lain akan ditunjukkan bahwa $(W, \circ)$ membentuk grup dengan $a \circ b = a + b + (a \times b)$ untuk setiap $a, b \in W$ [2]. Untuk membuktikan bahwa $(W, \circ)$ merupakan grup, akan dijabarkan dalam empat tahap.

1. Diambil sebarang $a_1, a_2 \in W$, maka a_1 dan a_2 dapat direpresentasikan sebagai

   $$a_1 = \frac{2x_1}{2y_1+1}, a_2 = \frac{2x_2}{2y_2+1}$$

   dengan $\gcd(2x_1, 2y_1+1) = \gcd(2x_2, 2y_2+1) = 1$. Selanjutnya perhatikan perkalian berikut ini

   $$\begin{aligned} a_1 \circ a_2 &= \frac{2x_1}{2y_1+1} + \frac{2x_2}{2y_2+1} + \left(\frac{2x_1}{2y_1+1} \times \frac{2x_2}{2y_2+1}\right) \\ &= \frac{2x_1}{2y_1+1} + \frac{2x_2}{2y_2+1} + \frac{4x_1x_2}{(2y_1+1)(2y_2+1)} \end{aligned}$$

$$= \frac{2x_1(2y_2+1)+2x_2(2y_1+1)+4x_1x_2}{(2y_1+1)(2y_2+1)}$$

$$= \frac{4x_1y_2+2x_1+4x_2y_1+2x_2+4x_1x_2}{4y_1y_2+2y_1+2y_2+1}$$

$$a_1 \circ a_2 = \frac{2(2x_1y_2+x_1+2x_2y_1+x_2+2x_1x_2)}{2(2y_1y_2+y_1+y_2)+1}$$

Untuk

$$\gcd(2(2x_1y_2+x_1+2x_2y_1+x_2+2x_1x_2), 2(2y_1y_2+y_1+y_2)+1) = 1$$

Jelas mengakibatkan $a_1 \circ a_2 \in W$.

Untuk

$$\gcd(2(2x_1y_2+x_1+2x_2y_1+x_2+2x_1x_2), 2(2y_1y_2+y_1+y_2)+1) \neq 1$$

Misalkan

$$\gcd(2(2x_1y_2+x_1+2x_2y_1+x_2+2x_1x_2), 2(2y_1y_2+y_1+y_2)+1) = d$$

Untuk suatu bilangan bulat positif $d \neq 1$. Dengan kata lain bilangan rasional

$$\frac{2(2x_1y_2+x_1+2x_2y_1+x_2+2x_1x_2)}{2(2y_1y_2+y_1+y_2)+1}$$

bukan dalam primitif atau pecahan yang paling sederhana. Lebih lanjut diperoleh

$$\frac{2(2x_1y_2+x_1+2x_2y_1+x_2+2x_1x_2)}{2(2y_1y_2+y_1+y_2)+1} = \frac{\frac{2(2x_1y_2+x_1+2x_2y_1+x_2+2x_1x_2)}{d}}{\frac{2(2y_1y_2+y_1+y_2)+1}{d}}.$$

Dengan memperhatikan bahwa

$$\gcd(2(2x_1y_2+x_1+2x_2y_1+x_2+2x_1x_2), 2(2y_1y_2+y_1+y_2)+1) = d,$$

maka

$$\frac{2(2x_1y_2+x_1+2x_2y_1+x_2+2x_1x_2)}{d}$$

dan

$$\frac{2(2y_1y_2+y_1+y_2)+1}{d}$$

Masing-masing merupakan bilangan bulat. Lebih lanjut dengan menggunakan sifat dasar dalam *great common divisor* yang telah kita pelajari dalam teori bilangan, dipenuhi sifat

$$\gcd\left(\frac{2(2x_1y_2+x_1+2x_2y_1+x_2+2x_1x_2)}{d}, \frac{2(2y_1y_2+y_1+y_2)+1}{d}\right) = 1$$

Yang menjamin bahwa bilangan rasional

$$\frac{2(2x_1y_2+x_1+2x_2y_1+x_2+2x_1x_2)}{2(2y_1y_2+y_1+y_2)+1}$$

dapat disederhanakan dalam bentuk pecahan paling sederhana katakan

$$\frac{2(2x_1y_2 + x_1 + 2x_2y_1 + x_2 + 2x_1x_2)}{2(2y_1y_2 + y_1 + y_2) + 1} = \frac{m}{n}$$

dengan sifat m bilangan genap dan n bilangan ganjil sedemikian sehingga $\gcd(m, n) = 1$. Lebih lanjut karena m bilangan genap dan n bilangan ganjil, maka m dapat direpresentasikan sebagai $m = 2m_1$ untuk suatu $m_1 \in \mathbb{Z}$ dan $n = 2n_1 + 1$ untuk suatu $n_1 \in \mathbb{Z}$. Hal ini juga mengakibatkan $a_1 \circ a_2 \in W$. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa operasi biner $(\circ)$ atas W bersifat tertutup. Untuk memperjelas ilustrasi tahapan 1 perhatikan bahwa bilangan rasional

$$\frac{2}{3}, \frac{4}{3} \in W$$

dengan sifat $\gcd(2,3) = \gcd(4,3) = 1$. Lebih lanjut perhatikan

$$\frac{2}{3} \circ \frac{4}{3} = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} + \left(\frac{2}{3} \times \frac{4}{3}\right) = \frac{6}{3} + \frac{8}{9} = \frac{26}{9} \in W$$

Dilain pihak andaikata ditemui hasil operasi $\circ$ yang menghasilkan bilangan rasional $\frac{6}{9}$. Meskipun $\gcd(6,9) = 3 \neq 1$, bilangan rasional $\frac{6}{9}$ juga merupakan anggota W dengan memperhatikan bahwa

$$\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

Dengan sifat $\gcd(2,3) = 1$.

2. Diambil sebarang $a_1, a_2, a_3 \in W$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
(a_1 \circ a_2) \circ a_3 &= (a_1 + a_2 + a_1a_2) \circ a_3 \\
&= a_1 + a_2 + a_3 + a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 + a_1a_2a_3 \\
&= a_1 \circ (a_2 + a_3 + a_2a_3) \\
(a_1 \circ a_2) \circ a_3 &= a_1 \circ (a_2 \circ a_3).
\end{aligned}$$

   Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa operasi biner $(\circ)$ atas W bersifat asosiatif.

3. Perhatikan bahwa terdapat $0 \in W$ dengan sifat $a \circ 0 = a + 0 + a.0 = a$ untuk setiap $\in$ $a \in W$. Jadi W memuat elemen identitas.

4. Diambil sebarang $a_1 \in W$, akan ditentukan $a_2 \in W$ dengan sifat $a_1 \circ a_2 = 0$. Perhatikan $a_1 \in W$, maka

$$a_1 = \frac{2x_1}{2y_1 + 1},$$

   dengan $\gcd(2x_1, 2y_1 + 1) = 1$ dan $x_1, y_1 \in \mathbb{Z}$. Selanjutnya,

$$a_1 + a_2 + a_1a_2 = 0,$$

$$\frac{2x_1}{2y_1+1}+a_2+\left(\frac{2x_1}{2y_1+1}\right)a_2=0,$$
$$a_2+\left(\frac{2x_1}{2y_1+1}\right)a_2=-\frac{2x_1}{2y_1+1},$$
$$\left(\frac{2y_1+1}{2y_1+1}\right)a_2+\left(\frac{2x_1}{2y_1+1}\right)a_2=-\frac{2x_1}{2y_1+1},$$
$$\left(\frac{(2y_1+1)2x_1}{2y_1+1}\right)a_2=-\frac{2x_1}{2y_1+1},$$
$$a_2=-\frac{2x_1}{2y_1+1}\left(\frac{2y_1+1}{(2y_1+1)2x_1}\right),$$
$$a_2=-\frac{2\left(\frac{2x_1y_1+x_1}{(2y_1+1)2x_1}\right)}{2y_1+1}\in W.$$

Berdasarkan empat langkah penjabaran di atas, dapat disimpulkan bahwa $(W,\circ)$ merupakan grup. Oleh sebab itu, W merupakan ring Jacobson. Kemudian berdasarkan Teorema 10 dan Teorema 11, ring W merupakan *brace* dua sisi.

6 Simpulan

Berdasarkan hasil peneliti-peneliti sebelumnya, *brace* merupakan salah satu struktur dalam aljabar abstrak yang digunakan sebagai alat untuk menentukan solusi dari persamaan Yang-Baxter. Oleh sebab itu, mengkaji sifat-sifat *brace* sangat penting bagi perkembangan Aljabar Abstrak khsususnya Teori Ring. Berdasarkan sifatnya, *brace* dibagi menjadi tiga yaitu *brace* kiri, *brace* kanan, dan *brace* dua sisi. Hasil dalam penelitian ini adalah memberikan kontruksi *brace* dua sisi dari sudut pandang teori radikal ring, yaitu dengan menggunakan konsep ring Jacobson dan radikal Jacobson.

7 Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terimakasih kepada reviewer serta semua pihak yang telah memberikan masukan dan saran dalam menyempurnakan paper ini. Penulis juga mengucapkan terimakasih kepada LPPM Universitas Ahmad Dahlan atas kontrak penelitian nomor PD-120/SP3/LPPM-UAD/2020

8 Daftar Pustaka

[1] C. N. Yang, “Some Exact Results For The Many-Body Problem In One Dimension with Repulsive,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 19, no. 23, pp. 1312–1315, 1967.

[2] R. Baxter, "Partition function of the Eight-Vertex lattice model," *Ann. Phys. (N. Y).*, vol. 70, no. 1, pp. 193–228, Mar. 1972.

[3] R. Baxter, *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics*. London, UK: Academic Press, 1982.

[4] F. Nichita, "Introduction to the Yang-Baxter Equation with Open Problems," *axioms*, vol. 1, no. 1, pp. 33–37, Apr. 2012.

[5] Wikipedia, "en.wikipedia.org," *Wikimedia Foundation, Inc*, 2019. [Online]. Available: https://en.wikipedia.org/wiki/Knot_theory. [Accessed: 26-Feb-2020].

[6] Wikipedia, "en.wikipedia.org," *Wikimedia Foundation, Inc*, 2020. [Online]. Available: https://en.wikipedia.org/wiki/Braid_group. [Accessed: 26-Feb-2020].

[7] A. Smoktunowicz and A. Smoktunowicz, "Set-theoretic solutions of the Yang–Baxter equation and new classes of R-matrices," *Linear Algebra Appl.*, vol. 546, pp. 86–114, Jun. 2018.

[8] T. Gateva-Ivanova, "A combinatorial approach to the set-theoretic solutions of the Yang-Baxter equation," *J. Math. Phys.*, vol. 45, no. 10, pp. 3828–3858, Oct. 2004.

[9] R. Larry A, Lambe dan David E, *Introduction to the quantum Yang-Baxter equation and quantum groups: An algebraic approach. In Mathematics and Its Applications 423*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1997.

[10] A. Smoktunowicz, "On Engel groups, nilpotent groups, rings, braces and the Yang-Baxter equation," *Trans. Am. Math. Soc.*, vol. 370, no. 9, pp. 6535–6564, Mar. 2018.

[11] A. Smoktunowicz, "A note on set-theoretic solutions of the Yang–Baxter equation," *J. Algebr.*, vol. 500, pp. 3–18, Apr. 2018.

[12] M. Castelli, F. Catino, and G. Pinto, "About a question of Gateva-Ivanova and Cameron on square-free set-theoretic solutions of the Yang-Baxter equation," *Commun. Algebr.*, vol. 48, no. 6, pp. 1–13, Jun. 2020.

[13] D. K. Matsumoto and K. Shimizu, "Quiver-theoretical approach to dynamical Yang–Baxter maps," *J. Algebr.*, vol. 507, pp. 47–80, Aug. 2018.

[14] F. Cedó, A. Smoktunowicz, and L. Vendramin, "Skew left braces of nilpotent type," *Proc. London Math. Soc.*, vol. 118, no. 6, pp. 1367–1392, Jun. 2019.

[15] W. Rump, "Braces, radical rings, and the quantum Yang-Baxter equation," *J. Algebr.*, vol. 307, no. 1, pp. 153–170, Jan. 2007.

[16] D. B. Pérez, "Study Of The Algebraic Structure Of Left Braces And The Yang-Baxter Equation," Universitat Autonoma de Barelona, 2016.

[17] E. Acri and M. Bonatto, "Skew braces of size pq," *Commun. Algebr.*, vol. 48, no. 5, pp. 1–

20, May 2020.

[18] L. Guarnieri and L. Vendramin, "Skew braces and the Yang–Baxter equation," *Math. Comput.*, vol. 86, no. 307, pp. 2519–2534, Nov. 2017.

[19] D. B. Pérez, "Counterexample to a conjecture about braces," *J. Algebr.*, vol. 453, pp. 160–176, May 2016.

[20] F. Cedó, T. Gateva-Ivanova, and A. Smoktunowicz, "Braces and symmetric groups with special conditions," *J. Pure Appl. Algebr.*, vol. 222, no. 12, pp. 3877–3890, Dec. 2018.

[21] B. J. Gardner and R. Wiegandt, *Radical Theory of Rings*. New York: Marcel Dekker, Inc, 2004.

[22] P. W. Prasetyo, S. Wahyuni, I. E. Wijayanti, and H. France-Jackson, "Dari Radikal Ring Ke Radikal Modul (From Radical Of Rings To Radical Of Modules)," *Pros. Semin. Nas. Mat. Univ. Jember*, 2014.