Limits: Journal of Mathematics and Its Applications
E-ISSN: 2579-8936
P-ISSN: 1829-605X
Vol. 18, No. 2, Nopember 2021, 119-128
DOI: http://dx.doi.org/10.12962/limits.v18i2.6665

Pewarnaan Total pada Graf Bintang Sierpinski

Siti Khabibah [1] *, Dita Anies Munawwaroh [2]
[1,2]Departemen Matematika Universitas Diponegoro Semarang Indonesia; Jl. Prof. H. Soedharto, SH
*e-mail: khabibah.undip@gmail.com

Diajukan: 2 Maret 2020, Diperbaiki: 1 Agustus 2021, Diterima: 6 September 2021

Abstrak

Bilangan kromatik total graf G adalah bilangan bulat terkecil k dimana titik-titik dan sisi-sisi graf G dapat diwarnai dengan k warna sedemikian hingga dua titik yang *adjecent* dan sisi yang *insiden* dengan titik-titik tersebut diberikan warna yang berbeda. Dalam paper ini dibahas mengenai pewarnaan total pada Graf Bintang Sierpinski, SS_n. Bilangan kromatik untuk pewarnaan total pada Graf SS_n adalah 1 untuk $n = 1$ dan $1 + 3.2^{n-2}$ untuk $n \geq 2$.

Kata Kunci: Graf Bintang Sierpinski, Pewarnaan total, Bilangan Kromatik.

Abstract

The total Chromatic number of graph G is the least integer k where the vertices and edges of the graph G can be colored with k color so that two vertices are adjecent and the edge which incident with these vertices are given different colors. This paper discusses total coloring on Sierpinski Star Graph, SS_n. *The chromatic number for total coloring on Graph* SS_n *is* 1 *for* $n = 1$ *and* $1 + 3.2^{n-2}$*for* $n \geq 2$.

Keywords: *Sierpinski Star Graph, Total Coloring, Total chromatic number.*

1 Pendahuluan

Segitiga Sierpinski merupakan salah satu bentuk fraktal yang menarik untuk dikaji lebih dalam. Salah satu kajian matematika yang berkaitan dengan segitiga sierpinski adalah graf. Pada tahun 1997 Klavzar dan Milutinovic [1] memperkenalkan graf *Sierpinski* $S(n,k)$ yang merupakan generalisasi dari masalah Tower Hanoi. Selain graf *Sierpinski*, terdapat graf *Sierpinski Gasket* S_n yang bentuknya identik dengan segitiga Sierpinski, dengan himpunan titik dan sisi dari graf S_n adalah titik sudut dan sisi segitiga-segitiga dari segitiga Sierpinski [2]. Selain berupa segitiga ada juga yang berupa bujursangkar yang dikenal dengan graf *Square Sierpinski* [3]. Survey dan klasifikasi mengenai graf turunan Sierpinski dibahas oleh Andreas dan Sandi [4]. Menggunakan manipulasi pelabelan, Toru Hasunuma [5] mengkonstruksi graf *Universaled Sierpinski*.

Pembahasan yang menarik dalam graf diantaranya adalah pelabelan. Salah satu bentuk pelabelan pada graf adalah pewarnaan graf, beberapa artikel yang terkait dengan pewarnaan graf dan graf Sierpinski diantaranya adalah pewarnaan pada graf *Sierpinski* dan *Sierpinski Gasket* [6]. Pewarnaan titik, sisi, dan pewarnaan total pada graf *Sierpinski* dan graf *Sierpinski Gasket* dibahas oleh Jacovac dan Klavzar [7]. Untuk pewarnaan pada graf *Square Sierpinski* dibahas oleh Xue, Zuo, dan Li [3]. Selanjutnya pada [8] dibahas mengenai pewarnaan pada graf *Hanoi* dan graf *Sierpinski*. Pewarnaan total pada graf-graf turunan Sierpinski ditulis pada [9]. Selain pewarnaan titik, sisi dan total, pewarnaan *Packing* pada graf Sierpinski dibahas oleh Bestjan[10]. Terinspirasi kajian mengenai graf Sierpinski, pada tahun 2017 penulis menyusun graf yang dinamakan graf Bintang Sierpinski berikut pewarnaan titik dan sisinya [11]. Konstruksi grafnya baru dijelaskan secara geometris belum mencantumkan definisi secara matematis. Dalam paper ini dibahas mengenai graf Bintang Sierpinski menggunakan definisi yang lebih matematis beserta pewarnaan totalnya.

2 Metode Penelitian

Penelitian dilaksanakan dengan terlebih dahulu mengkonstruksi graf Bintang Sierpinski yang dibangun dari segitiga Sierpinski dari iterasi ke-1 sampai dengan iterasi ke-n. Definisi mengenai graf Bintang Sierpinski secara matematis diberikan berikut keterangan melalui tabel dan gambar. Jumlah titik dan sisi dari graf Bintang Sierpinksi untuk iterasi ke-n diambil dari hasil penelitian sebelumnya. Selanjutnya dibahas mengenai pewarnaan total pada graf Bintang Sierpinski. Pewarnaan total dari graf Bintang Sierpinski disajikan dalam bentuk fungsi untuk pewarnaan titik dan sisinya. Bilangan kromatik total hasil pewarnaan pada graf Bintang Sierpinski disajikan dalam bentuk proposisi.

3 Hasil dan Pembahasan

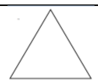
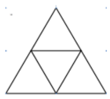
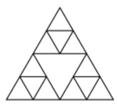
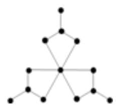
Pada bab ini akan diberikan definisi mengenai graf Bintang Sierpinksi beserta penjelasan menggunakan contoh dan gambar. Pewarnaan total pada graf Bintang Sierpinski dilengkapi dengan fungsi dari pewarnaan total beserta hasil pewarnaan untuk titik dan sisinya.

3.1 Graf Bintang Sierpinski

Secara geometris graf Bintang Sierpinski SS_n dengan $n \geq 1$ didefinisikan sebagai graf yang dibentuk dari segitiga Sierpinski. Himpunan titik dari graf Bintang Sierpinski SS_n merupakan himpunan semua segitiga dari segitiga Sierpinski hasil iterasi ke-*n,* dan titik yang mewakili segitiga pusat disebut titik pusat (*center vertex*), sedangkan himpunan sisinya merupakan himpunan semua sisi yang merupakan persekutuan dari dua segitiga dalam segitiga Sierpinski. Dinamakan Graf Bintang Sierpinski karena bentuk dasarnya merupakan graf bintang dan dibangun dari segitiga Sierpinski. Banyaknya titik dan sisi dari graf SS_n dinotasikan dengan $|V_n|$ dan $|E_n|$ [11].

Untuk lebih jelasnya, Tabel 1 berikut menjelaskan bagaimana konstruksi graf Bintang Sierpinski dari segitiga Sierpinski untuk iterasi 1, 2 dan 3 beserta jumlah titik dan sisi dari masing-masing graf.

Tabel 1. Segitiga Sierpinski dan Graf SS_n

n	Segitiga Sierpinski iterasi ke-n	Graf SS_n	$\lvert V_n \rvert$	$\lvert E_n \rvert$
1		•	1	0
2			4	3
3			13	15

Secara umum, graf Bintang Sierpinski dijelaskan dalam definisi berikut.

Definisi 1. *Graf Bintang Sierpinski, SS_n, didefinisikan sebagai berikut, untuk SS_1 hanya terdiri atas satu titik, untuk $n \geq 2$, himpunan titik dari SS_n terdiri atas* (n-1)*-tupel dari bilangan* 0,1,2,3 *yaitu $V(SS_n) = \{0,1,2,3\}^{n-1}$. Dua titik $u = (u_1, u_2, \dots, u_{n-1})$ dengan $u_i \in \{0,1,2,3\}$ dan $v = (v_1, v_2, \dots, v_{n-1})$ dengan $v_i \in \{1,2,3\}$ dikatakan adjacent jika dan hanya jika terdapat $k \in \{1,2, \dots, n-1\}$ sedemikian hingga*

i. $u_i = 0$ *untuk* $i = k, k+1, \dots, n-1$

ii. $u_i = v_i$ *untuk* $i = 1,2, \dots, k-1$

iii. $v_i \neq v_k$ *untuk* $i = k+1, k+2, \dots, n-1$

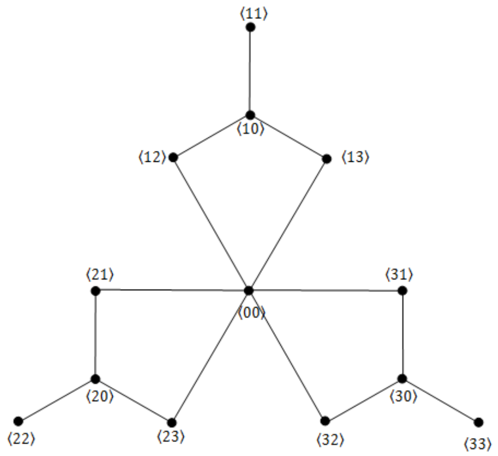
Selanjutnya titik $(u_1, u_2, \dots, u_{n-1})$ ditulis dengan $\langle u_1 u_2 \dots u_{n-1} \rangle$.

Jumlah titik dan sisi pada graf Bintang Sierpinksi ditunjukkan dalam proposisi berikut:

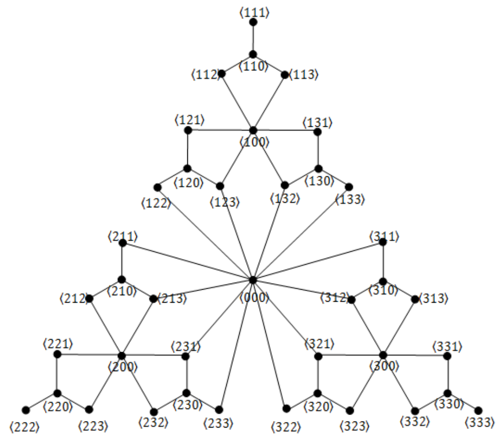
Proposisi 2.[11] *Graf Bintang Sierpinski SS_n mempunyai $\frac{1}{2}(3^n - 1)$ titik untuk $n \geq 1$ dan $\sum_{i=0}^{n-2} 2^i . 3^{n-1-i}$ sisi untuk $n \geq 2$.*

Setiap graf Bintang Sierpinski, SS_n untuk $n \geq 2$ memuat tiga subgraf yang identik dengan graf SS_{n-1}. Dalam paper ini subgraf atas, kiri,dan kanan masing-masing dinotasikan dengan SS_{n-1}^1, SS_{n-1}^2, dan SS_{n-1}^3, dan subgraf-subgraf ini pun terdiri atas tiga subgraf dari iterasi sebelumnya. Titik pusat utama merupakan titik dengan derajat tertinggi, yaitu titik $\langle u_1 u_2 \dots u_{n-1}\rangle$ dengan $u_i = 0$ untuk semua i. Untuk semua titik $v = (v_1, v_2, \dots, v_{n-1})$ pada SS_{n-1}^1, SS_{n-1}^2, dan SS_{n-1}^3 nilai v_1 berturut-turut sama dengan 1, 2, dan 3. Untuk $i \neq 1$, $v_i \in \{0,1,2,3\}$, untuk titik yang memuat $v_i = 0$ merupakan titik pusat dari masing-masing subgraf, sedangkan untuk $v_i \in \{2,3\}, v_i \in \{1,3\}$, dan $v_i \in \{1,2\}$ berturut-turut untuk graf SS_{n-1}^1, graf SS_{n-1}^2, dan graf SS_{n-1}^3 dihubungkan dengan titik pusat utama.

Contoh 3. Diberikan Graf SS_3 dan SS_4 yang masing-masing mempunyai titik berjumlah 13 dan 40 serta banyaknya sisi masing-masing 15 dan 57.



Gambar 1a. Graf SS_3



Gambar 1b. Graf SS_4

Gambar 1a memperlihatkan bahwa Graf SS_3 mempunyai 13 titik terdiri atas 1 titik pusat utama, 3 titik pusat dari tiga subgraf (SS_2^1, SS_2^2, dan SS_2^3), dan 9 titik yang masing-masing adjacent dengan titik pusat pada masing-masing subgraf yang bersesuaian. Titik pusat utama merupakan titik dengan derajat tertinggi, yaitu titik $\langle 00\rangle$. Titik pusat subgraf SS_2^1, SS_2^2, dan SS_2^3 masing-masing adalah titik $\langle 10\rangle, \langle 20\rangle$, dan $\langle 30\rangle$. Titik $\langle 11\rangle, \langle 12\rangle$, dan $\langle 13\rangle$ merupakan titik dari subgraf SS_2^1 yang adjacent dengan $\langle 10\rangle$. Titik $\langle 21\rangle, \langle 22\rangle$, dan $\langle 23\rangle$ merupakan titik dari subgraf SS_2^2 yang adjacent dengan $\langle 20\rangle$. Titik $\langle 31\rangle, \langle 32\rangle$, dan $\langle 33\rangle$ merupakan titik dari subgraf SS_2^3 yang adjacent dengan $\langle 30\rangle$. Titik yang adjacent dengan titik pusat utama adalah titik $\langle 12\rangle, \langle 13\rangle, \langle 21\rangle, \langle 23\rangle, \langle 31\rangle$, dan $\langle 32\rangle$. Jadi titik-titik pada SS_3 adalah $\langle 00\rangle, \langle 10\rangle, \langle 11\rangle, \langle 12\rangle, \langle 13\rangle, \langle 20\rangle, \langle 21\rangle, \langle 22\rangle, \langle 23\rangle, \langle 30\rangle$, $\langle 31\rangle, \langle 32\rangle$, dan $\langle 33\rangle$

Graf SS_4 memuat tiga subgraf yang identik dengan graf SS_3 ditambah dengan satu titik yang disebut titik utama. Titik pusat utamanya adalah titik $\langle 000\rangle$, sedangkan titik-titik dari subgraf SS_3^1, SS_3^2, dan SS_3^3 identik dengan titik-titik pada graf SS_3. Sebagai contoh, subgraf SS_3^1 mempunyai 13 titik dan 15 sisi yang identik dengan graf SS_3. Adapun titik-titik dari subgraf SS_3^1 adalah

$\langle 100\rangle, \langle 110\rangle, \langle 111\rangle, \langle 112\rangle, \langle 113\rangle, \langle 120\rangle, \langle 121\rangle, \langle 122\rangle, \langle 123\rangle, \langle 130\rangle, \langle 131\rangle, \langle 132\rangle$ dan $\langle 133\rangle$. Untuk titik $\langle u_1 u_2 u_3\rangle$ pada SS_3^2 dan SS_3^3 nilai u_1 masing-masing bernilai 2 dan 3, sedangkan u_2 dan u_3 identik dengan SS_3^1.

Secara umum setiap graf Bintang Sierpinski, SS_n untuk $n \geq 2$ memuat tiga subgraf yang identik dengan graf SS_{n-1} yaitu subgraf atas, kiri,dan kanan masing-masing dinotasikan dengan SS_{n-1}^1, SS_{n-1}^2, dan SS_{n-1}^3

Pada SS_{n-1}^1, setiap titik $v = (v_1, v_2, \dots, v_{n-1})$ berlaku aturan untuk $i = 1$ nilai $v_i = 1$ dan untuk $i \neq 1$ nilai $v_i \in \{0,1,2,3\}$, dimana titik yang memuat $v_i = 0$ merupakan titik pusat dari subgraf pada SS_{n-1}^1, sedangkan titik-titik v dimana $v_i \in \{2,3\}$ untuk $i \neq 1$ terhubung dengan titik pusat utama.

Pada SS_{n-1}^2 berlaku aturan untuk $i = 1$ nilai $v_1 = 2$ dan untuk $i \neq 1$ nilai $v_i \in \{0,1,2,3\}$, dimana titik yang memuat $v_i = 0$ merupakan titik pusat dari subgraf pada SS_{n-1}^2, sedangkan titik-titik v dimana $v_i \in \{1,3\}$ untuk $i \neq 1$ terhubung dengan titik pusat utama.

Serupa dengan SS_{n-1}^1 dan SS_{n-1}^2, nilai v_i untuk $i = 1$ pada SS_{n-1}^3 selalu bernilai 3, atau $v_1 = 3$ dan untuk $i \neq 1$ nilai $v_i \in \{0,1,2,3\}$, dimana titik yang memuat $v_i = 0$ merupakan titik pusat dari subgraf pada SS_{n-1}^2, sedangkan untuk titik v dimana $v_i \in \{1,2\}$ untuk $i \neq 1$ terhubung dengan titik pusat utama.

3.2 Pewarnaan Total pada Graf Bintang Sierpinski

Pewarnaan total dari suatu graf G merupakan fungsi $\pi: V \cup E \rightarrow C$ sedemikian sehingga tidak ada dua elemen adjacent (yaitu titik dengan titik, sisi dengan sisi, maupun titik dengan sisi yang insiden) yang mempunyai warna yang sama. Bilangan kromatik total dari graf G,yang dinotasikan dengan $\lambda_T(G)$, menunjukkan banyaknya warna minimum yang digunakan pada pewarnaan total graf G. Menurut Vizing [12], jika G adalah graf sederhana dengan derajat maksimum titik dari G adalah $\Delta(G)$ maka $\lambda_T(G) \leq \Delta(G) + 2$. Ada 2 tipe graf terkait dengan pewarnaan total yaitu graf tipe I dan garf tipe II. Graf G dikatakan graf tipe I jika jumlah minimal warna pada pewarnaan totalnya adalah $\Delta(G) + 1$ warna atau $\lambda_T(G) = \Delta(G) + 1$. Selanjutnya graf G dikatakan graf tipe II jika jumlah warna minimal pada pewarnaan totalnya adalah $\Delta(G) + 2$ atau $\lambda_T(G) = \Delta(G) + 2$.

Graf sikel C_n merupakan graf dengan $\Delta(C_n) = 2$ untuk setiap *n*. Graf sikel C_3 termasuk dalam graf tipe I karena $\lambda_T(C_3) = \Delta(C_n) + 1 = 3$. Sedangkan graf sikel C_4 merupakan graf tipe II karena $\lambda_T(C_4) = \Delta(C_n) + 2 = 4$.

Proposisi 3. *Bilangan kromatik untuk pewarnaan total graf* SS_n *adalah* 1 *untuk* $n = 1$ *dan* $3.2^{n-2} + 1$ *untuk* $n \geq 2$.

Bukti : Untuk $n = 1$ hanya terdiri atas satu titik sehingga warna yang bisa diaplikasikan hanya ada 1 warna, untuk $n = 2$ graf SS_n identik dengan graf bintang dengan banyaknya titik dan sisi masing-masing adalah 4 dan 3. Karena terdapat satu titik berderajat 3 maka jumlah warna minimal yang bisa diaplikasikan adalah 4 yaitu sama dengan derajat maksimum titik ditambah 1, empat warna untuk titik dan 3 warna untuk sisi. Dengan cara yang sama, untuk $n \geq 3$, derajat maksimum titik dari graf SS_n adalah 3.2^{n-2}, sehingga graf SS_n dapat diwarnai dengan minimal $3.2^{n-2} + 1$ warna. Jadi terbukti bahwa bilangan kromatik dari SS_n adalah 1 untuk $n = 1$ dan $3.2^{n-2} + 1$ untuk $n \geq 2$. ■

Untuk lebih jelasnya berikut ini diberikan rumus pewarnaan total untuk graf Bintang Sierpinski. Untuk $n \geq 2$ diberikan fungsi $\pi: (V \cup E)(SS_n) \to \{0,1,\ldots,3.2^{n-2}\}$,

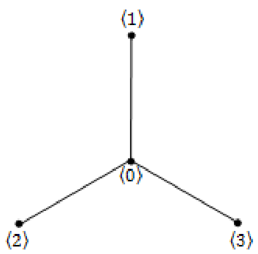
Untuk $n = 2$

Karena graf SS_2 merupakan graf bintang yang terdiri atas 1 titik berderajat 3 dan 3 titik berderajat 1 maka jumlah warna minimalnya adalah 4. Berikut ini rumus pewarnaan total untuk graf SS_2

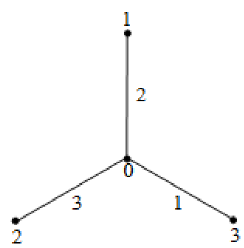
$\pi: (V \cup E)(SS_2) \to \{0,1,2,3\}$,

$V(SS_2) = \{\langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \langle 2\rangle, \langle 3\rangle\}$ dan $E(SS_2) = \{\langle 0\rangle\langle 1\rangle, \langle 0\rangle\langle 2\rangle, \langle 0\rangle\langle 3\rangle\}$

Pewarnaan titik :	Pewarnaan sisi:
$\pi(\langle 0\rangle) = 0$	$\pi(\langle 0\rangle\langle 1\rangle) = 2$
$\pi(\langle 1\rangle) = 1$	$\pi(\langle 0\rangle\langle 2\rangle) = 3$
$\pi(\langle 2\rangle) = 2$	$\pi(\langle 0\rangle\langle 3\rangle) = 1$
$\pi(\langle 3\rangle) = 3$	



Gambar 2a. Graf SS_2



Gambar 2b. Pewarnaan pada graf SS_2

Untuk $n = 3$,

Graf SS_3 terdiri atas tiga subgraf yang identik dengan SS_2 yaitu SS_2^1, SS_2^2, dan SS_2^3. Pewarnaan titik dan sisi pada masing-masing subgraf sama dengan pewarnaan pada graf SS_2. Untuk titik pusat pada SS_3 diberi warna 0, sedangkan pewarnaan untuk sisi-sisi yang insiden dengan titik pusat diberi warna 1 sampai dengan $3.\,2^{n-2}$ searah jarum jam dimulai dari sisi yang insident dengan titik dari subgraf SS_2^1. Berikut adalah hasil pewarnaan pada graf SS_3.

$\pi: (V \cup E\ )(SS_3) \to \{0,1,2,3,4,5,6\}$,

$V(SS_3) = \{\langle 00\rangle, \langle 10\rangle, \langle 11\rangle, \langle 12\rangle, \langle 13\rangle, \langle 20\rangle, \langle 21\rangle, \langle 22\rangle, \langle 23\rangle, \langle 30\rangle, \langle 31\rangle, \langle 32\rangle, \langle 33\rangle\}$

dan$E(SS_2) = \{\langle 10\rangle\langle 11\rangle, \langle 10\rangle\langle 12\rangle, \langle 10\rangle\langle 13\rangle, \langle 20\rangle\langle 21\rangle, \langle 20\rangle\langle 22\rangle, \langle 20\rangle\langle 23\rangle, \langle 30\rangle\langle 31\rangle,$
$\langle 30\rangle\langle 32\rangle, \langle 30\rangle\langle 33\rangle, \langle 00\rangle\langle 12\rangle, \langle 00\rangle\langle 13\rangle, \langle 00\rangle\langle 21\rangle, \langle 00\rangle\langle 23\rangle, \langle 00\rangle\langle 31\rangle, \langle 00\rangle\langle 32\rangle\}$

Pewarnaan titik :

$\pi(\langle 00\rangle) = 0$ $\quad \pi(\langle 11\rangle) = 1$ $\quad \pi(\langle 12\rangle) = 2$ $\quad \pi(\langle 13\rangle) = 3$

$\pi(\langle 10\rangle) = 0$ $\quad \pi(\langle 21\rangle) = 1$ $\quad \pi(\langle 22\rangle) = 2$ $\quad \pi(\langle 23\rangle) = 3$

$\pi(\langle 20\rangle) = 0$ $\quad \pi(\langle 31\rangle) = 1$ $\quad \pi(\langle 32\rangle) = 2$ $\quad \pi(\langle 33\rangle) = 3$

$\pi(\langle 30\rangle) = 0$

Pewarnaan sisi:

$\pi(\langle 10\rangle\langle 11\rangle) = 2$ $\quad \pi(\langle 00\rangle\langle 12\rangle) = 1$

$\pi(\langle 10\rangle\langle 12\rangle) = 3$ $\quad \pi(\langle 00\rangle\langle 13\rangle) = 2$

$\pi(\langle 10\rangle\langle 13\rangle) = 1$ $\quad \pi(\langle 00\rangle\langle 31\rangle) = 3$

$\pi(\langle 20\rangle\langle 21\rangle) = 2$ $\quad \pi(\langle 00\rangle\langle 32\rangle) = 4$

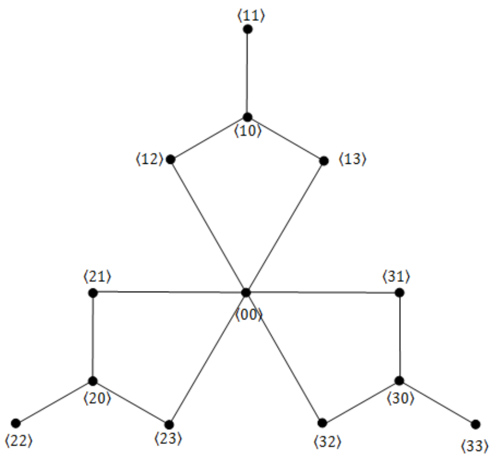
$\pi(\langle 20\rangle\langle 22\rangle) = 3$ $\quad \pi(\langle 00\rangle\langle 21\rangle) = 5$

$\pi(\langle 20\rangle\langle 23\rangle) = 1$ $\quad \pi(\langle 00\rangle\langle 23\rangle) = 6$

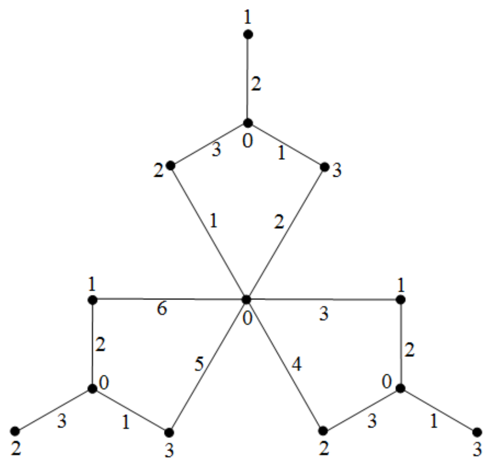
$\pi(\langle 30\rangle\langle 31\rangle) = 2$

$\pi(\langle 30\rangle\langle 32\rangle) = 3$

$\pi(\langle 30\rangle\langle 33\rangle) = 1$



Gambar 3a. Graf SS_3



Gambar 3b. Pewarnaan pada graf SS_3

Selanjutnya secara umum rumus pewarnaan total untuk SS_n untuk $n \geq 2$ adalah sebagai berikut:

$\pi: (V \cup E)(SS_n) \rightarrow \{0,1,\ldots,3.\,2^{n-2}\}$

Pewarnaan titik :

$\pi(\langle u_1 \ldots u_{n-1} \rangle) = u_{n-1}$, dengan $u_{n-1} \in \{0,1,2,3\}$

Pewarnaan sisi :

untuk $u_i \neq 0\ untuk\ i = 1,2,\ldots,n-2$, pewarnaan sisi dari graf SS_n adalah sebagai berikut.

$\pi(\langle u_1 \ldots u_{n-2}0\rangle\langle u_1 \ldots u_{n-2}1\rangle) = 2,$

$\pi(\langle u_1 \ldots u_{n-2}0\rangle\langle u_1 \ldots u_{n-2}2\rangle) = 3,$

$\pi(\langle u_1 \ldots u_{n-2}0\rangle\langle u_1 \ldots u_{n-2}3\rangle) = 1,$

untuk $u_i \neq 0\ untuk\ i = 1,2,\ldots,n-3$, pewarnaan sisi dari graf SS_n adalah sebagai berikut.

$\pi(\langle u_1 \ldots u_{n-3}00\rangle\langle u_1 \ldots u_{n-3}12\rangle) = 1,$

$\pi(\langle u_1 \ldots u_{n-3}00\rangle\langle u_1 \ldots u_{n-3}13\rangle) = 2,$

$\pi(\langle u_1 \ldots u_{n-3}00\rangle\langle u_1 \ldots u_{n-3}31\rangle) = 3,$

$\pi(\langle u_1 \ldots u_{n-3}00\rangle\langle u_1 \ldots u_{n-3}32\rangle) = 4,$

$\pi(\langle u_1 \ldots u_{n-3}00\rangle\langle u_1 \ldots u_{n-3}21\rangle) = 5,$

$\pi(\langle u_1 \ldots u_{n-3}00\rangle\langle u_1 \ldots u_{n-3}23\rangle) = 6,$

Selanjutnya untuk suatu bilangan bulat positif $k \in \{1,2,\ldots,n-1\}$ dan $n \geq 3$, berlaku pewarnaan sisi sebagai berikut.

$\pi(\langle u_1 \ldots u_{n-k-1}0 \ldots 0\rangle\langle u_1 \ldots u_{n-k-1}13 \ldots 32\rangle) = 1$

$\pi(\langle u_1 \ldots u_{n-k-1}0 \ldots 0\rangle\langle u_1 \ldots u_{n-k-1}13 \ldots 33\rangle) = 2$

jika $u_k = 3$ dan $u_i \in \{1,2\}$ untuk $i = k+1, k+2, \ldots n-1$, maka

$\pi(\langle u_1 \ldots u_{n-k-1}0 \ldots 0\rangle\langle u_1 \ldots u_{n-k-1}31 \ldots 11\rangle) = 3$

$\pi(\langle u_1 \ldots u_{n-k-1}0 \ldots 0\rangle\langle u_1 \ldots u_{n-k-1}31 \ldots 12\rangle) = 4$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

$\pi(\langle u_1 \ldots u_{n-k-1}0 \ldots 0\rangle\langle u_1 \ldots u_{n-k-1}32 \ldots 22\rangle) = 2 + 2^{k-1}$

jika $u_k = 2$ dan $u_i \in \{1,3\}$ untuk $i = k+1, k+2, \ldots n-1$, maka

$\pi(\langle u_1 \ldots u_{n-k-1}0 \ldots 0\rangle\langle u_1 \ldots u_{n-k-1}23 \ldots 33\rangle) = 2 + 2^{k-1} + 1$

$\vdots$ $\vdots$

$\pi(\langle u_1 \dots u_{n-k-1}0 \dots 0\rangle\langle u_1 \dots u_{n-k-1}21 \dots 11\rangle) = 2 + 2.2^{k-1}$

jika $u_k = 1$ dan $u_i \in \{2,3\}$ untuk $i = k+1, k+2, \dots n-1$, maka
$\pi(\langle u_1 \dots u_{n-k-1}0 \dots 0\rangle\langle u_1 \dots u_{n-k-1}12 \dots 22\rangle) = 2 + 2.\,2^{k-1} + 1$

$\vdots$ $\vdots$

$\pi(\langle u_1 \dots u_{n-k-1}0 \dots 0\rangle\langle u_1 \dots u_{n-k-1}13 \dots 23\rangle) = 3.\,2^{k-1}$

untuk subgraf SS_n sama dengan pewarnaan graf SS_{n-1}, dan untuk sisi yang insiden dengan titik pusat diberi warna 1,2,..., $3.\,2^{n-2}$ berurutan searah jarum jam dimulai dari *dua sisi paling kanan* dari subgraf SS_{n-1}^1 yang insiden dengan titik pusat utama.

4 Simpulan

Berdasarkan pembahasan mengenai konstruksi dan pewarnaan total pada graf Bintang Sierpinski diperoleh kesimpulan bahwa graf Bintang Sierpinski merupakan graf yang serupa dengan dirinya atau *self similar*. Untuk bilangan kromatik pewarnaan total pada graf Bintang Sierpinski sama dengan derajat tertinggi titiknya ditambah satu. Titik yang mempunyai derajat tertinggi adalah titik pusat utama.

5 Daftar Pustaka

[1] S. Klavžar and U. Milutinović, “Graphs S(n, k) and a variant of the tower of Hanoi problem,” *Czechoslov. Math. J.*, vol. 47, no. 1, pp. 95–104, 1997, doi: 10.1023/A:1022444205860.

[2] A. M. Teguia and A. Godbole, “Sierpi ´ nski Gasket Graphs and Some of Their Properties,” *Australas. J. Comb.*, vol. 35, pp. 181–192, 2006.

[3] B. Xue, L. Zuo, and G. Li, “Coloring the Square of Sierpiński Graphs,” *Graphs Comb.*, vol. 31, no. 5, pp. 1795–1805, 2015, doi: 10.1007/s00373-014-1444-y.

[4] A. M. Hinz, S. Klavžar, and S. S. Zemljič, “A survey and classification of Sierpiński-type graphs,” *Discret. Appl. Math.*, vol. 217, pp. 565–600, 2017, doi: 10.1016/j.dam.2016.09.024.

[5] T. Hasunuma, “Constructions of universalized Sierpiński graphs based on labeling manipulations,” *Electron. Notes Discret. Math.*, vol. 60, pp. 47–54, 2017.

[6] S. Klavzar, “COLORING SIERPIN´ SKI GRAPHS AND SIERPIN´ SKI GASKET GRAPHS,” *Taiwan. J. Math.*, vol. 12, no. 2, pp. 513–522, 2008.

[7] M. Jakovac and S. Klavžar, “Vertex-, edge-, and total-colorings of Sierpiński-like graphs,” *Discrete Math.*, vol. 309, no. 6, pp. 1548–1556, 2009, doi: 10.1016/j.disc.2008.02.026.

[8] A. M. Hinz and D. Parisse, “Coloring Hanoi and Sierpiski graphs,” *Discrete Math.*, vol. 312, no. 9, pp. 1521–1535, 2012, doi: 10.1016/j.disc.2011.08.019.

[9] J. Geetha and K. Somasundaram, “Total coloring of generalized sierpiński graphs,” *Australas. J. Comb.*, vol. 63, no. 1, pp. 58–69, 2015.

[10] B. Brešar and J. Ferme, “Packing coloring of Sierpiński-type graphs,” *Aequationes Math.*, vol. 92, no. 6, pp. 1091–1118, 2018, doi: 10.1007/s00010-018-0561-8.

[11] S. Khabibah, “PEWARNAAN PADA GRAF BINTANG SIERPINSKI,” *J. Ilm. Mat. dan Pendidik. Mat.*, vol. 9, no. 1, pp. 37–44, 2017.

[12] V. Vizing, “On an estimate of the chromatic class of a p-graph,” *Disk. Anal.*, vol. 3, pp. 25–30, 1964.