Limits: Journal of Mathematics and Its Applications
E-ISSN: 2579-8936
P-ISSN: 1829-605X
Vol. 17, No. 1, Juli 2020, 35-50
DOI: http://dx.doi.org/10.12962/limits.v17i1.6680

Pembuktian Sifat non-Hausdorff dari Grup Lie $\boldsymbol{GL(n,\mathbb{C})}$ Bertindak pada $\boldsymbol{M(n,\mathbb{C})}$

Rif'an Amrozi [1] *, Subiono [2]
[1,2]Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Analitika Data, ITS
Jl. Arief Rahman Hakim, Surabaya 60111 Indonesia
e-mail: [1]rifanamrozimath@gmail.com, [2]subiono2008@matematika.its.ac.id

Diajukan:3 Maret 2020, Diperbaiki: 23 Juni 2020, Diterima:24 Juni 2020

Abstrak

Pada penelitian ini dibahas grup Lie General Linear $GL(n,\mathbb{C})$ bertindak secara konjugasi pada manifold $M(n,\mathbb{C})$. Himpunan semua orbit dari tindakan grup Lie tersebut dideskripsikan melalui bentuk kanonik Jordan yang merupakan ruang kuasi. Telah diduga jika X dan Y adalah matriks-matriks di $M(n,\mathbb{C})$ dengan nilai-nilai eigen yang sama tetapi memiliki bentuk kanonik Jordan yang berbeda, maka irisan dari persekitaran orbit dari Y dan persekitaran orbit dari X tidak kosong. Namun, pembuktian lengkap dari dugaan tersebut belum ada. Pada paper ini, diberikan pembuktian formal dugaan tersebut dengan perturbasi matriks, yaitu ruang kuasi yang berbentuk kanonik Jordan tersebut adalah suatu ruang non-Hausdorff.

Kata Kunci: grup Lie, bentuk kanonik Jordan, Hausdorff, $GL(n,\mathbb{C})$, perturbasi matriks.

Abstract

In this research, we discuss the action General Linear Lie Group $GL(n,\mathbb{C})$ on manifold $M(n,\mathbb{C})$. The set of all orbits of this action is described through the Jordan canonical form which is a quasi-space. Already guessed if X and Y are matrices in $M(n,\mathbb{C})$ with the same eigenvalues having different Jordan canonical form, then the intersection of the neighborhood of X and the neighborhood of Y is not empty. However, complete proof of that hypothesis does not exist yet. In this paper, we provide a proof that is thought to be related to the perturbation matrix, so that the quasi space described through Jordan canonical form is a non-Hausdorff space.

Keywords: *Lie group, Jordan canonical form, Hausdorff, $GL(n,\mathbb{C})$, matrix perturbation.*

1 Pendahuluan

Suatu ruang topologi S adalah Haussdorff jika diberikan dua buah titik yang berbeda misalkan x,y di dalam S, ada himpunan terbuka U,V yang saling disjoin sedemikian hingga $x\in U$ dan $y\in V$. Sehingga secara makna sifat Hausdorff dapat dipandang sebagai keterpisahan suatu ruang topologi. Misal $M=M(n,\mathbb{C})$ himpunan seluruh matriks persegi berukuran $n\times n$ dan $G=GL(n,\mathbb{C})$ subhimpunan M dengan determinan matriks tak nol, orbit di dalam M/G dengan operasi konjugasi berbentuk kanonik Jordan. Misalkan X dan Y adalah matriks-matriks di M dengan nilai-nilai eigen yang sama tetapi memiliki bentuk kanonik Jordan yang berbeda, irisan persekitaran orbit dari Y dan persekitaran orbit dari X tidak kosong, dengan kata lain M/G non-Hausdorff. Sebenarnya dalam buku [1] sudah dibahas dugaan ini, namun hanya disajikan dalam bukti intuitif.

Grup Lie suatu kajian fundamental dalam aljabar dan mempunyai beberapa aplikasi diantaranya adalah penggunaan grup Lie untuk menyelesaikan masalah optimisasi dalam Pemrosesan Sinyal Buta (PSB), termasuk Analisis Komponen Independen (AKI) dan Analisis Subruang Independen (ASI) [2]. Selain itu dalam [2] dibahas fundamental grup Lie dan aljabar Lie, geometri masalah dalam PSB serta ide-ide dasar teknik optimasi berdasarkan grup Lie. Juga diberikan algoritma optimisasi berdasarkan sifat-sifat grup Lie ditandai oleh fakta bahwa selama gerakan optimasi, mereka memastikan ikatan permanen dengan ruang pencarian. Sifat ini sangat signifikan dalam hal stabilitas dan dinamika algoritma pengoptimalan. Geometri khusus masalah seperti AKI dan ASI bersama dengan homogenitas ruang pencarian memungkinkan penggunaan teknik optimasi berdasarkan sifat-sifat grup Lie ortogonal $O(n)$ dan spesial $SO(n)$. Ide yang menarik adalah gerakan optimasi dalam sub-parameter komutatif satu-parameter dan sub-sub-tropis toral yang memastikan kompleksitas komputasi yang rendah dan algoritma berkecepatan tinggi.

Pembahasan tentang ruang Hausdorff juga masih menjadi penelitian yang sedang didalami. Seperti dalam paper [3], yang membahas tentang konsep baru ruang Hausdorff yaitu *soft bitopological Hausdorff space* (SBT Hausdorff space). Setelah didefinisikan hal-hal baru seperti: SBT point, fungsi kontinu SBT, dan SBT *homeomorphism*, didalamnya juga dianalisis bagaimana suatu ruang SBT termasuk ruang Hausdorff atau non-Hausdorff.

Grup General Linear pada tensor yang merupakan bentuk lebih umum dari $GL(n, \mathbb{C})$ juga masih menjadi objek yang masih terus diteliti, hal ini ditunjukan dengan adanya paper [4] yang juga membahas aplikasi tindakan grup general linear pada kriptografi. Tindakan grup yang diperoleh digunakan untuk membangun suatu skema untuk enkripsi *public-key*. Pada paper tersebut digunakan tindakan grup natural yang merepresentasikan pergantian basis, sedangkan dalam penelitian ini adalah konjugasi.

Tindakan grup pada suatu manifold mendapat perhatian dalam 4 dekade terakhir. Pada paper [5] disajikan beberapa *open question* tentang tindakan grup yang berfokus pada manifold berdimensi satu.

Pembahasan kelas konjugasi matriks dalam paper ini menjadi utama. Di sisi lain, kelas konjugasi dari fungsi-fungsi *diffeomorphisms* dalam paper [6] diteliti tentang syaratnya untuk eksistensi suatu barisan ataupun lintasan kontinu dalam suatu topologi C^1.

Seperti yang diketahui, bahwa sistem keamanan dan kriptografi menjadi penting pada era digital. Terakhir, selain dapat memberikan bukti formal tentang sifat non-Hausdorff dari ruang kuasi M/G diharapkan penelitian ini juga dapat memberikan manfaat tentang variasi enkripsi *public-key* pada bidang ilmu kriptografi.

2 Metode Penelitian

Pada bagian ini akan dijelaskan langkah-langkah pengerjaan paper tentang pembuktian sifat non-Hausdorff pada grup Lie $GL(n,\mathbb{C})$ bertindak pada manifold $M(n,\mathbb{C})$, yang secara singkat dibagi menjadi 4 tahapan:

2.1 Menentukan hasil tindakan grup Lie

Pada bagian ini ditunjukan bahwa tindakan grup Lie $GL(n,\mathbb{C})$ pada $M(n,\mathbb{C})$ dengan aturan konjugasi memenuhi aksioma tindakan grup. Selanjutnya ditunjukan bahwa hasil tindakan grup tersebut orbit-orbitnya berbentuk kanonik Jordan.

2.2 Menyajikan langkah-langkah contoh mendekomposisi Jordan suatu matriks

Pada bagian ini akan dibahas mengenai generalisasi vektor eigen dan rantai Jordan. Pembahasan langsung diaplikasikan dengan mendekomposisi suatu matriks berukuran 3×3.

2.3 Menyajikan langkah-langkah perturbasi pada ruang kuasi

Pada bagian ini akan diberikan bukti bagaimana untuk suatu perubahan yang sangat kecil/perturbasi pada suatu orbit, sebarang bentuk kanonik Jordan dapat didiagonalkan. Selanjutnya akan dibuktikan sifat non-Hausdorff dari ruang kuasi yang dibahas.

2.4 Penarikan Kesimpulan

Pada tahap yang terakhir, akan diberikan kesimpulan dari penelitian yang dilakukan yaitu sifat non-Hausdorff dari ruang kuasi terbukti secara formal.

3 Hasil dan Pembahasan

3.1 Tindakan grup Lie

Subhimpunan $G = GL(n,\mathbb{C})$ dari himpunan $M = M(n,\mathbb{C})$ bertindak secara konjugasi pada M. Tindakan ini adalah $G \times M \to M$, dimana $(g,m) \to gmg^{-1}$ untuk setiap $g \in G$ dan setiap $m \in M$. Seluruh sifat/aksioma definisi tindakan grup telah dipenuhi, yaitu:

1) Untuk sebarang $m = [m_{i,j}] \in M$, dengan mengambil $e = I$ (matriks identitas berukuran $n \times n$), diperoleh

$$e.m = I.m = I[m_{i,j}]I^{-1} = [m_{i,j}] = m.$$

2) Untuk setiap $g_1, g_2 \in G$ dan setiap $m \in M$, berlaku

$$\begin{aligned} g_1.(g_2.m) &= g_1.(g_2 m g_2^{-1}) \\ &= g_1 g_2 m g_2^{-1} g_1^{-1} \\ &= (g_1 g_2) m (g_2^{-1} g_1^{-1}) \\ &= (g_1 g_2) m (g_1 g_2)^{-1} \\ &= (g_1.g_2).m. \end{aligned}$$

Melalui tindakan ini, hasil tindakannya dapat dikelompokkan menjadi klas-klas ekivalen.

Teorema 1. [7] **(Dekomposisi Jordan)** *Misal A suatu matriks dengan entri-entri bilangan kompleks. Maka ada suatu matriks invertible P sedemikian hingga*

$$P^{-1}AP = J_1 \oplus \cdots \oplus J_n,$$

dimana J_i adalah blok Jordan dari A dengan nilai eigen dari A pada diagonal. Blok Jordan ditentukan secara unik oleh A.

Berdasarkan jaminan Teorema Dekomposisi Jordan dengan mengambil matriks P pada persamaan $P^{-1}AP$ sebagai matriks pada G, dan karena untuk setiap elemen $g \in G$ punya invers, maka orbit tindakannya adalah bentuk kanonik Jordan. Himpunan orbit-orbit tersebut selanjutnya kita notasikan dengan M/G.

Sebagai gambaran misal $m_1, m_2 \in M$ memiliki bentuk Jordan yang sama J. Berdasarkan Teorema dekomposisi Jordan, yaitu ada matriks invertible g_1 sedemikian hingga $m_1 = g_1^{-1} J g_1$, dan ada matriks invertible g_2 sedemikian hingga $m_2 = g_2^{-1} J g_2$. Tindakan konjugasi G pada M membuat matriks m_1 dan m_2 terletak pada orbit yang sama, yaitu klas konjugasi

$$K_G(J) = \{gJg^{-1} | g \in G\},$$

yaitu dengan mengambil $g = g_1^{-1}$ untuk m_1 dan $g = g_2^{-1}$ untuk m_2, diperoleh

$$g_1^{-1} J g_1 = (g_1^{-1}) J (g_1^{-1})^{-1} \in K_G(J),$$
$$g_2^{-1} J g_2 = (g_2^{-1}) J (g_2^{-1})^{-1} \in K_G(J).$$

3.2 Dekomposisi Jordan

Berikut diberikan langkah-langkah dalam mendapatkan matriks $P \in GL(n,\mathbb{C})$ sedemikian hingga $J = P^{-1}AP, \forall A \in M(n,\mathbb{C})$, sebagaimana dijamin eksistensinya oleh Teorema Dekomposisi Jordan.

1. Tentukan nilai-nilai eigen dari matriks A.
2. Tentukan vektor-vektor eigen yang bebas linier dari matriks A. Jika banyak vektor sama dengan ukuran matriks, maka proses selesai, bentuk matriks P sebagai kolom-kolom dari vektor-vektor tersebut, jika hal tersebut terjadi maka bentuk kanonik Jordan dari A adalah matriks diagonal. jika tidak, lanjut ke langkah selanjutnya.

3. Dapatkan bilangan terkecil $n \in \mathbb{N}$, sedemikian hingga banyaknya vektor-vektor pembangun $\mathrm{Ker}(A - \lambda I)^n$, tidak bertambah lagi jika n ditambah satu. Vektor-vektor v_n yang memenuhi $(A - \lambda I)^n v_n = \bar{0}$ tetapi $(A - \lambda I)^{n-1} v_n \neq \bar{0}$ disebut vektor eigen tergeneralisir dengan rank n.
4. Susun vektor-vektor rantai Jordan yang didapat menjadi kolom-kolom matriks P dengan urutan vektor dengan rank yang lebih besar terletak pada kanan vektor rank satu kurangnya pada rantai Jordan yang sama. Misal x_m adalah vektor eigen tergeneralisir dengan rank m dengan nilai eigen λ. [8] Rantai Jordan yang dibangun oleh x_m adalah himpunan vektor-vektor bebas linear.

$$\{x_m, x_{m-1}, \cdots, x_1\},$$

yang didapat melalui

$$\begin{gathered} x_{m-1} = (A - \lambda I)x_m, \\ x_{m-2} = (A - \lambda I)^2 x_m = (A - \lambda I)x_{m-1}, \\ \vdots \\ x_1 = (A - \lambda I)^{m-1} x_m = (A - \lambda I)x_2. \end{gathered}$$

Berikut disajikan contoh mendapatkan matriks P sedemikian hingga $J = P^{-1}AP$ untuk suatu matriks A dengan J bentuk kanonik Jordan dari A.

Contoh 1. Pandang matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya akan dicari matriks P sedemikian hingga $P^{-1}AP$ bentuk kanonik Jordan. Berikut langkah-langkahnya:

1. Dengan menghitung $\det(A - \lambda I)$, diperoleh persamaan karakteristik dan diketahui bahwa seluruh nilai eigen dari matriks A adalah 2 dengan multiplisitas aljabarnya 3.
2. Dengan menentukan $\mathrm{Ker}(A - \lambda I)$, diperoleh vektor-vektor eigennya yaitu

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

3. Karena $(A - \lambda I)^2$ matriks nol, berarti 2 adalah n terkecil, disini dapat dipilih sebarang satu vektor pembangun asalkan bebas linear dengan dua vektor di awal, vektor ini merupakan vektor eigen tergeneralisir, dalam pengerjaan ini dipilih

$$x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Lalu dicari rantai Jordannya

$$x_1 = (A-2I)x_2$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Diperoleh

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Untuk rantai Jordan yang lain dapat dipilih sebarang vektor eigen diawal yang bebas linear dari rantai Jordan yang sudah terpilih. Karena untuk memenuhi tinggal satu vektor lagi, vektor eigen ini sama halnya dengan vektor eigen tergeneralisir dengan rank satu. Diperoleh

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

4. Sehingga diperoleh matriks P yaitu

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dapat diperiksa

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = J.$$

Setelah mengetahui bentuk elemen-elemen M/G, berikutnya akan dibahas bagaimana mengambil persekitaran pada orbit-orbit M/G, kemudian akan diarahkan eksistensi irisannya untuk pembuktian sifat non-Hausdorff M/G dengan perturbasi matriks.

3.3 Perturbasi Matriks

Diberikan suatu matriks $A \in M(n,\mathbb{C})$, suatu matriks $A^* \in M(n,\mathbb{C})$ diperoleh dengan menambahkan entri-entrinya dengan suatu bilangan yang relatif kecil atau memberikan perubahan sedikit entri-entri pada matriks A. Dalam hal ini artinya matriks A mengalami perturbasi sehingga menjadi matriks A^*.

Contoh 2. Misal $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, diberikan $\varepsilon = 0{,}05$, sehingga untuk $|A - A^*| < \varepsilon$ dapat dipilih $\delta = \sqrt{(\delta_1^2 + \delta_2^2} < \varepsilon$ dimana $\delta_1 = 0{,}01$ dan $\delta_2 = 0{,}02$, berakibat A^* dapat ditentukan

$$\begin{aligned} A^* &= \begin{bmatrix} 3-\delta_1 & -1 \\ 0 & 2-\delta_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2{,}99 & -1 \\ 0 & 1{,}98 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Karena

$$\begin{aligned} |A - A^*| &= \left\| \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2{,}99 & -1 \\ 0 & 1{,}98 \end{bmatrix} \right\| \\ &= \left\| \begin{bmatrix} 0{,}01 & 0 \\ 0 & 0{,}02 \end{bmatrix} \right\| \\ &= \sqrt{|0{,}01|^2 + |0|^2 + |0{,}02|^2 + |0|^2} \\ &\approx 0{,}02236 < 0{,}05 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Sekarang misalkan $A, B \in M(n, \mathbb{C})$ adalah dua matriks yang memiliki nilai-nilai eigen yang sama dan memenuhi $A = [g_A]J_A[g_A]^{-1}$, $B = [g_B]J_B[g_B]^{-1}$ dengan J_A dan J_B berturut-turut bentuk kanonik Jordan matriks A dan B. Terlihat A dan B memiliki bentuk Jordan yang berbeda, sehingga pada $M/G, A$ dan B terletak pada orbit yang berbeda. Misalkan

$$\begin{aligned} J_A &= J_A(\lambda_1)_{n_1\times n_1} \oplus J_A(\lambda_2)_{n_2\times n_2} \oplus \cdots \oplus J_A(\lambda_s)_{n_s\times n_s} \\ &= \begin{bmatrix} J_A(\lambda_1)_{n_1\times n_1} & [0]_{n_1\times n_2} & \cdots & [0]_{n_1\times n_s} \\ [0]_{n_2\times n_1} & J_A(\lambda_2)_{n_2\times n_2} & \cdots & [0]_{n_2\times n_s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0]_{n_s\times n_1} & [0]_{n_s\times n_2} & \cdots & J_A(\lambda_s)_{n_s\times n_s} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

dengan $J_A(\lambda_i)_{n_i\times n_i}$, untuk $i = 1,2,\cdots,s$, adalah blok-blok Jordan ke-i yang eigennya λ_i dengan ukuran blok $n_i \times n_i$ dan $[0]_{n_i\times n_j}$ adalah matriks dengan ukuran $n_i \times n_j$.

$$J_A(\lambda_i)_{n_i\times n_i} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}.$$

Dengan cara yang serupa dapat ditentukan juga J_B.

Selanjutnya, diberikan perturbasi ε pada kedua matriks J_A dan J_B, sehingga matriks J_A setelah mengalami perturbasi menjadi J_A^*

$$J_A^* = J_A^*(\lambda_1)_{n_1\times n_1} \oplus J_A^*(\lambda_2)_{n_2\times n_2} \oplus \cdots \oplus J_A^*(\lambda_s)_{n_s\times n_s},$$

yaitu setiap elemen pada diagonal utama matriks dikurangi δ_i, sehingga jika diperhatikan setiap blok ke-$j, \forall j = 1,2,\cdots,s$, akan terlihat

$$J_A^*(\lambda_j)_{n_j\times n_j} = \begin{bmatrix} \lambda_j-\delta_{i_1} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_j-\delta_{i_2} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_j-\delta_{i_3} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_j-\delta_{i_{n_j-1}} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_j-\delta_{i_{n_j}} \end{bmatrix},$$

dengan syarat δ_i, $\forall i = 1,2,\cdots,n$, menghasilkan nilai $(\lambda_j - \delta_i)$ yang seluruhnya berbeda dan memenuhi

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|\delta_i|^2} < \varepsilon.$$

Dengan cara yang serupa dapat ditentukan juga J_B^*.

$$J_B^* = J_B^*(\lambda_1)_{n_1\times n_1} \oplus J_B^*(\lambda_2)_{n_2\times n_2} \oplus \cdots \oplus J_B^*(\lambda_s)_{n_s\times n_s}.$$

Pada J_A^* dan J_B^*, karena setiap hasil $(\lambda_j - \delta_i)$ berbeda, setiap entri pada diagonal utama menjadi berbeda. Berdasarkan sifat di Aljabar Linier, suatu matriks yang seluruh nilai-nilai eigennya berbeda maka similar dengan matriks diagonal. Mengingat matriks blok Jordan adalah matriks segitiga, nilai-nilai eigennya dapat diketahui dari entri-entri pada diagonal utama. Akibatnya J_A^* dan J_B^* sama-sama similar dengan matriks diagonal atau bentuk Jordan dengan ukuran tiap bloknya adalah satu. Sehingga dapat ditulis

$$\begin{aligned} J_A^* &= J_A^*(\lambda_1)_{n_1\times n_1} \oplus J_A^*(\lambda_2)_{n_2\times n_2} \oplus \cdots \oplus J_A^*(\lambda_s)_{n_s\times n_s} \\ &= P_A^{-1}\Big(J(\lambda_1-\delta_1)_{1\times1} \oplus J(\lambda_1-\delta_2)_{1\times1} \oplus \cdots \oplus J\big(\lambda_1-\delta_{n_1}\big)_{1\times1} \oplus J\big(\lambda_2-\delta_{n_1+1}\big)_{1\times1} \oplus \cdots \\ &\quad \oplus J\big(\lambda_2-\delta_{n_1+n_2}\big)_{1\times1} \oplus \cdots \oplus J(\lambda_s-\delta_n)_{1\times1}\Big)P_A \\ &\sim J(\lambda_1-\delta_1)_{1\times1} \oplus J(\lambda_1-\delta_2)_{1\times1} \oplus \cdots \oplus J\big(\lambda_1-\delta_{n_1}\big)_{1\times1} \oplus J\big(\lambda_2-\delta_{n_1+1}\big)_{1\times1} \oplus \cdots \\ &\quad \oplus J\big(\lambda_2-\delta_{n_1+n_2}\big)_{1\times1} \oplus \cdots \oplus J(\lambda_s-\delta_n)_{1\times1}. \end{aligned}$$

Begitu juga dengan J_B^*

$$J_B^* \sim J(\lambda_1-\delta_1)_{1\times1} \oplus J(\lambda_1-\delta_2)_{1\times1} \oplus \cdots \oplus J(\lambda_s-\delta_n)_{1\times1}.$$

Oleh karena J_A^* dan J_B^* sama-sama ekivalen dengan matriks blok-blok Jordan berukuran satu-satu, maka J_A^* dan J_B^* ekivalen atau dapat ditulis

$$J_A^* \sim J_B^*.$$

Untuk menunjukan sifat non-Hausdorff ruang kuasi M/G hanya diperlukan suatu eksistensi irisan dua persekitaran orbit berbeda agar bertentangan dengan definisi ruang Hausdorff. Pada penelitian ini irisan tersebut adalah bentuk diagonal. Keberagaman nilai-nilai eigen menjadi kunci agar suatu matriks dapat didiagonalkan. Hal itulah yang menjadi alasan digunakan perturbasi hanya pada entri-entri diagonal utama.

Dari itu, ambil sebarang persekitaran pada dua orbit berbeda matriks-matriks dengan nilai-nilai eigen yang sama tapi memiliki bentuk kanonik Jordan berbeda, yaitu himpunan buka pada topologi standar M/G dengan ukurannya ε. Himpunan buka tersebut mempunyai arti sama dengan perturbasi $\varepsilon > 0$. Padahal untuk setiap perturbasi $\varepsilon > 0$ memuat orbit matriks diagonal nilai-nilai eigen bersesuaian yang sama, dan matriks diagonal tersebutlah yang menjadi irisan setiap himpunan buka. Karena ketiadaan dua buah himpunan buka yang saling asing tersebut, maka M/G bersifat non-Hausdorff.

Teorema berikut digunakan untuk mempermudah dalam mendapatkan matriks P dari suatu matriks A yang berbentuk khusus mirip blok Jordan sedemikian hingga $P^{-1}AP$ matriks diagonal. Teorema ini akan digunakan untuk mendapatkan matriks P pada contoh di bagian akhir.

Teorema 2. *Misalkan A suatu matriks berukuran $n \times n$ yang memenuhi kondisi:*

1. *Seluruh entri pada diagonal utama berbeda.*
2. *Seluruh entri pada super diagonal atas, yaitu entri-entri tepat satu baris diatas diagonal utama, bernilai 1.*
3. *Seluruh entri selain pada diagonal utama dan super diagonal atas bernilai nol.*

Yaitu A dapat ditulis menjadi

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{bmatrix}.$$

Jika J_A adalah bentuk kanonik Jordan dari A, maka matriks P, dengan sifat $P^{-1}AP = J_A$, dapat ditentukan oleh

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dfrac{1}{a_3 - a_1} & \cdots & \dfrac{1}{\prod_{i=1}^{n-2}(a_n - a_i)} \\ 0 & a_2 - a_1 & 1 & \cdots & \dfrac{1}{\prod_{i=2}^{n-2}(a_n - a_i)} \\ 0 & 0 & a_3 - a_2 & \cdots & \dfrac{1}{\prod_{i=3}^{n-2}(a_n - a_i)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n - a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Bukti: Karena A matriks segitiga atas maka nilai-nilai eigennya terletak pada entri-entri diagonal utama, yaitu $a_i, \forall i = 1,2,\cdots,n$. Sekarang akan dicari vektor-vektor eigennya, karena diketahui

$\forall i = 1,2,\cdots,n$ seluruh a_i berbeda, maka seluruh eigennya juga berbeda, berakibat untuk setiap ruang eigen E_{a_i} hanya dibangun satu eigen vektor. Selanjutnya akan dicari masing-masing vektor eigennya.

$$
\begin{aligned}
E_{a_1} &= \mathrm{Ker}(A - a_1 I) \\
&= \mathrm{Ker}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 - a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 - a_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} - a_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n - a_1 \end{bmatrix}\right) \\
&= \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E_{a_2} &= \mathrm{Ker}(A - a_2 I) \\
&= \mathrm{Ker}\left(\begin{bmatrix} a_1 - a_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 - a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} - a_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n - a_2 \end{bmatrix}\right) \\
&= \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ a_2 - a_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E_{a_3} &= \mathrm{Ker}(A - a_3 I) \\
&= \mathrm{Ker}\left(\begin{bmatrix} a_1 - a_3 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 - a_3 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} - a_3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n - a_3 \end{bmatrix}\right) \\
&= \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix} \frac{1}{a_3 - a_1} \\ 1 \\ a_3 - a_2 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}.
\end{aligned}
$$

$\vdots$

$$
\begin{aligned}
E_{a_n} &= \mathrm{Ker}(A - a_nI)\\
&= \mathrm{Ker}\left(\begin{bmatrix} a_1-a_n & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & a_2-a_n & 1 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & a_3-a_n & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1}-a_n & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{bmatrix}\right)\\
&= \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix} \frac{1}{\prod_{i=1}^{n-2}(a_n-a_i)}\\ \frac{1}{\prod_{i=2}^{n-2}(a_n-a_i)}\\ \frac{1}{\prod_{i=3}^{n-2}(a_n-a_i)}\\ \vdots\\ 1\\ a_n-a_{n-1}\end{bmatrix}\right\}.
\end{aligned}
$$

Sehingga diperoleh vektor-vektor eigennya:

$$
\begin{bmatrix}1\\0\\0\\ \vdots\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\frac{1}{a_2-a_1}\\0\\ \vdots\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\frac{1}{a_3-a_1}\\ \frac{1}{a_3-a_2}\\ \vdots\\0\\0\end{bmatrix}, \cdots, \begin{bmatrix}\frac{1}{\prod_{i=1}^{n-2}(a_n-a_i)}\\ \frac{1}{\prod_{i=2}^{n-2}(a_n-a_i)}\\ \frac{1}{\prod_{i=3}^{n-2}(a_n-a_i)}\\ \vdots\\ 1\\ a_n-a_{n-1}\end{bmatrix}.
$$

Maka dapat dibentuk matriks P dengan kolom-kolomnya adalah vektor-vektor eigen yang didapat.

■

Berikut disajikan contoh dari uraian yang telah dibahas.

Contoh 3. Pandang matriks $A \in M(3,\mathbb{C})$

$$
A = \begin{bmatrix} 5+2i & 1-i & 1-i\\ 3-3i & 7 & 3-3i\\ -4+4i & -4+4i & 7i\end{bmatrix}.
$$

Selanjutnya akan dicari matriks P_A sedemikian hingga $P_A^{-1}AP_A$ bentuk kanonik Jordan. Berikut langkah-langkahnya:

1. Dengan menghitung $|\lambda I - A|$, diperoleh polinomial karakteristiknya $\Delta(\lambda) = \big(\lambda - (4+3i)\big)^3$ lalu didapat polinomial minimumnya $m(\lambda) = \big(\lambda-(4+3i)\big)^2$, maka seluruh nilai eigen dari matriks A adalah $4+3i$ dengan multiplisitas aljabarnya 3, dan bentuk kanonik Jordan dari A bukan matriks diagonal.

2. Selanjutnya dicari vektor-vektor eigennya yaitu
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$
3. Karena $(A - \lambda I)^2$ matriks nol, berarti 2 adalah n terkecil, disini dapat dipilih sebarang satu vektor pembangun asalkan bebas linear dengan dua vektor eigen di awal, dalam pengerjaan ini dipilih
$$x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$
lalu dicari rantai Jordannya
$$\begin{aligned} x_1 &= (A - (4+3i)I)x_2 \\ &= \begin{bmatrix} 1-i & 1-i & 1-i \\ 3-3i & 3-3i & 3-3i \\ -4+4i & -4+4i & -4+4i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1-i \\ 3-3i \\ -4+4i \end{bmatrix}. \end{aligned}$$
Diperoleh
$$\left\{ \begin{bmatrix} 1-i \\ 3-3i \\ -4+4i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$
Untuk rantai Jordan yang lain dapat dipilih sebarang vektor eigen di awal yang bebas linear dari rantai Jordan yang sudah terpilih. Karena untuk memenuhi tinggal satu vektor lagi, vektor eigen ini sama halnya dengan vektor eigen tergeneralisir dengan rank satu. Diperoleh
$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.$$
4. Sehingga dengan menyusun vektor-vektor eigen tergeneralisir sebagai kolom-kolom matriks P_A diperoleh
$$P_A = \begin{bmatrix} 1-i & 0 & 0 \\ 3-3i & 0 & 1 \\ -4+4i & 1 & -1 \end{bmatrix},$$
dan bentuk kanonik Jordan dari A, yaitu matriks $J_A = P_A^{-1} A P_A$
$$J_A = \begin{bmatrix} 4+3i & 1 & 0 \\ 0 & 4+3i & 0 \\ 0 & 0 & 4+3i \end{bmatrix}.$$

Sekarang pandang matriks $B \in M(3, \mathbb{C})$

$$B = \begin{bmatrix} 4+3i & -i & 1 \\ 0 & 4+3i & 1-3i \\ 0 & 0 & 4+3i \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya akan dicari matriks P_B sedemikian hingga $P_B^{-1}BP_B$ bentuk kanonik Jordan. Berikut langkah-langkahnya:

1. Dengan menghitung $|\lambda I - B|$, diperoleh polinomial karakteristiknya $\Delta(\lambda) = \left(\lambda - (4+3i)\right)^3$ lalu didapat polinomial minimumnya $m(\lambda) = \left(\lambda - (4+3i)\right)^3$, maka seluruh nilai eigen dari matriks B adalah $4+3i$ dengan multiplisitas aljabarnya 3, dan bentuk kanonik Jordan dari B bukan matriks diagonal.
2. Selanjutnya dicari vektor-vektor eigennya yaitu
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$
3. Karena $(B - \lambda I)^2$ bukan matriks nol, sedangkan $(B - \lambda I)^3$ matriks nol berarti 3 adalah n terkecil, disini dapat dipilih satu vektor pembangun
$$x_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$
Lalu dicari rantai Jordannya
$$\begin{aligned} x_2 &= (B - (4+3i)I)x_3 \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 1-3i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1-3i \\ 0 \end{bmatrix}, \\ x_1 &= (B - (4+3i)I)x_2 \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 1-3i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1-3i \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -3-i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$
Diperoleh
$$\left\{ \begin{bmatrix} -3-i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1-3i \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

4. Sehingga dengan menyusun vektor-vektor eigen tergeneralisir sebagai kolom-kolom matriks P_B yaitu

$$P_B = \begin{bmatrix} -3-i & 1 & 0 \\ 0 & 1-3i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

dan bentuk kanonik Jordan dari B, yaitu matriks J_B

$$J_B = \begin{bmatrix} 4+3i & 1 & 0 \\ 0 & 4+3i & 1 \\ 0 & 0 & 4+3i \end{bmatrix}.$$

Maka A dan B adalah contoh dari matriks-matriks yang memiliki nilai-nilai eigen yang sama tapi memiliki bentuk kanonik Jordan yang berbeda. Berakibat jika $M = M(3,\mathbb{C})$ dan $G = GL(3,\mathbb{C})$, maka pada M/G, A dan B terletak pada orbit yang berbeda.

Misal diambil $\varepsilon = 0{,}001$ dengan $\delta_i, \forall i = 1{,}2{,}3$ diberikan oleh

$$\delta_1 = 0{,}001;$$

$$\delta_2 = 0{,}002;$$

$$\delta_3 = 0{,}0005;$$

didapat

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{3} |\delta_i|^2} = 0{,}00000525 < 0{,}001 = \varepsilon.$$

Lalu perturbasi ε kedua matriks J_A dan J_B menjadi J_A^* dan J_B^*, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} J_A^* &= \begin{bmatrix} 4+3i-\delta_1 & 1 & 0 \\ 0 & 4+3i-\delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 4+3i-\delta_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3{,}999+3i & 1 & 0 \\ 0 & 3{,}998+3i & 0 \\ 0 & 0 & 3{,}9995+3i \end{bmatrix} \\ &= P_{A^*} D_{A^*} P_{A^*}^{-1} \\ &\sim D_{A^*}. \end{aligned}$$

Dengan matriks diagonal D_{A^*} adalah

$$D_{A^*} = \begin{bmatrix} 3{,}999+3i & 0 & 0 \\ 0 & 3{,}998+3i & 0 \\ 0 & 0 & 3{,}9995+3i \end{bmatrix}.$$

Untuk mendapatkan matriks P_{A^*} dapat menggunakan Teorema 2. Perhatikan bahwa pada J_{A^*} terdapat 2 blok diagonal (misal didefinisikan matriks blok A_1 dan A_2) yang memenuhi kriteria teorema tersebut.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3,999 + 3i & 1 \\ 0 & 3,998 + 3i \end{bmatrix},$$

$$A_2 = [3,9995 + 3i].$$

Dengan Teorema 2 diperoleh matriks P_1 dan P_2 sedemikian hingga berlaku $P_1^{-1}A_1P_1$ dan $P_2^{-1}A_2P_2$ keduanya matriks diagonal.

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3,998 + 3i - (3,999 + 3i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -0,001 \end{bmatrix},$$

$$P_2 = [1].$$

Sehingga dapat dibentuk matriks P_{A^*} dengan blok-blok diagonalnya adalah P_1 dan P_2.

$$\begin{aligned} P_{A^*} &= P_1 \oplus P_2 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -0,001 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Begitu juga untuk J_B^*, diperoleh

$$\begin{aligned} J_B^* &= \begin{bmatrix} 4 + 3i - \delta_1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 + 3i - \delta_2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 + 3i - \delta_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3,999 + 3i & 1 & 0 \\ 0 & 3,998 + 3i & 1 \\ 0 & 0 & 3,9995 + 3i \end{bmatrix} \\ &= P_{B^*}^{-1} D_{B^*} P_{B^*} \\ &\sim D_{B^*}. \end{aligned}$$

Dengan matrik diagonal D_{B^*} adalah

$$D_{B^*} = \begin{bmatrix} 3,999 + 3i & 0 & 0 \\ 0 & 3,998 + 3i & 0 \\ 0 & 0 & 3,9995 + 3i \end{bmatrix}.$$

Dengan cara yang seperti mendapatkan P_{A^*}, gunakan Teorema 2 lalu diperoleh P_{B^*}

$$P_{B^*} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dfrac{1}{0,0005} \\ 0 & -0,001 & 1 \\ 0 & 0 & 0,0015 \end{bmatrix}.$$

Karena $D_{A^*} = D_{B^*}$ sehingga $J_{A^*} \sim J_{B^*}$. Maka dengan perturbasi ε, persekitaran A dan B sama-sama memuat orbit matriks diagonal, berakibat irisannya tidak kosong.

4 Simpulan

Berdasarkan analisis dan pembahasan yang telah disampaikan, maka dapat disimpulkan hipotesis Kirilov pada bukunya [1], bahwa sifat non-Hausdorff ruang hasil tindakan grup Lie $GL(n, \mathbb{C})$ bertindak secara konjugasi pada $M(n, \mathbb{C})$ adalah benar.

Pada penelitian selanjutnya, diharapkan juga dikaji bagaimana sifat T_0 dan T_1 pada ruang hasil tindakan grup Lie $GL(n,\mathbb{C})$ bertindak pada $M(n,\mathbb{C})$ secara konjugasi, atau bahkan T_2 namun untuk topologi yang berbeda dengan tindakan yang berbeda pula. Pengetahuan tentang sifat-sifat hasil tindakan grup yang didapat dapat diaplikasikan untuk variasi pembentuk *public-key* pada Kriptografi ataupun di ilmu fisika *General Relativity*.

5 Daftar Pustaka

[1] J. Alexander Kirilov, *Introduction to Lie Groups and Lie Algebras*. Cambridge University Press, 2008.

[2] D. Mika and J. Jozwik, "Lie group methods in blind signal processing," *Sensors (Switzerland)*, vol. 20, no. 2, 2020, doi: 10.3390/s20020440.

[3] G. Şenel, "A New Approach to Hausdorff Space Theory via the Soft Sets," *Math. Probl. Eng.*, vol. 2016, 2016, doi: 10.1155/2016/2196743.

[4] Z. Ji, Y. Qiao, F. Song, and A. Yun, "General Linear Group Action on Tensors: A Candidate for Post-quantum Cryptography," *Lect. Notes Comput. Sci. (including Subser. Lect. Notes Artif. Intell. Lect. Notes Bioinformatics)*, vol. 11891 LNCS, pp. 251–281, 2019, doi: 10.1007/978-3-030-36030-6_11.

[5] A. Navas, "Group actions on 1-manifolds: A list of very concrete open questions," *Proc. Int. Congr. Math. ICM 2018*, vol. 3, pp. 2053–2083, 2018.

[6] É. Farinelli, "Conjugacy classes of diffeomorphisms of the interval in C1-regularity," *Fundam. Math.*, vol. 237, no. 3, pp. 201–248, 2017, doi: 10.4064/fm594-8-2014.

[7] F. Zhang, *Matrix Theory Basic Results and Techniques Second Edition*. Springer, 2011.

[8] R. Bronson, *MATRIX METHODS An Introduction Second Edition*. Academic Press, Inc., 1991.