Limits: Journal of Mathematics and Its Applications
E-ISSN: 2579-8936
P-ISSN: 1829-605X
Vol. 18, No. 1, Mei 2021, 71-78
DOI: http://dx.doi.org/10.12962/limits.v18i1.6690

Model Kredibilitas Bühlmann dengan Frekuensi Klaim Berdistribusi Binomial Negatif-Lindley

Ikhsan Maulidi [1] *, Vina Apriliani [2]
[1] Jurusan Matematika, Universitas Syiah Kuala, Banda Aceh, Indonesia
[2] Jurusan Pendidikan Matematika, Universitas Islam Negeri Ar-Raniry, Banda Aceh, Indonesia
e-mail: ikhsanmaulidi@unsyiah.ac.id

Diajukan: 7 Maret 2020, Diperbaiki: 19 Mei 2020, Diterima:22 April 2021

Abstrak

Dalam artikel ini, kami mengembangkan model kredibilitas Bühlmann parametrik dengan frekuensi klaim diasumsikan mengikuti distribusi Binomial Negatif-Lindley. Penduga dari kuantitas dalam model Bühlmann telah diberikan untuk distribusi ini dengan menggunakan metode yang umum digunakan dalam kredibilitas akurasi terbaik. Dugaan premi yang dihasilkan dalam model ini merupakan kombinasi linear dari klaim-klaim di masa lampau yang memberikan kuadrat kesalahan terkecil. Fungsi pembangkit momen dari distribusi Binomial-Lindley sangat bermanfaat dalam penentuan kuantitas Bühlmann ini. Simulasi penerapan model ini juga diberikan untuk data klaim yang sederhana beserta algoritma penerapannya. Meskipun memberikan nilai faktor kredibilitas yang cukup besar, namun model ini membutuhkan n yang lebih besar untuk mendapatkan dugaan premi yang baik.

Kata Kunci: Kredibilitas Bühlmann, Binomial Negatif-Lindley, Premi Kredibilitas, Metode Momen, Penduga Maksimum Likelihood.

Abstract

In this article, we develop a parametric Bühlmann credibility model with the frequency of claims that are assumed following the Negative Binomial- Lindley distribution. The Estimator of the quantities in the Bühlmann model have provided for this distribution using methods commonly used in the greatest accuracy credibility. The premium estimation that resulted in this model is a linear combination of the past claims which gives a minimum error square. The momen function of the Binomial-Lindley distribution is very helpful to determine these Bühlmann's quantities. Application simulations of this model are also given for simple data claims along with the algorithm. However, it gives an appreciable credibility factor value, this model requires many past claims to get a good premium estimation.

Keywords*: Buhlmann Credibility, Negative Binomial-Lindley, Credibility Premium, Momen Method, Maximum Likelihood Estimation.*

1 Pendahuluan

Asuransi adalah suatu bentuk perjanjian dimana seorang tertanggung mengikatkan diri pada penanggung. Pihak yang mengalihkan risiko (tertanggung) akan membayar sejumlah biaya (disebut premi) kepada perusahaan asuransi yang menanggung risiko (penanggung). Penentuan premi yang baik akan selalu menjadi fokus dalam asuransi. Terdapat dua jenis premi dalam asuransi yaitu premi berbasis risiko dan premi yang tidak berbasis risiko. Setiap individu akan dikelompokkan ke dalam satu grup risiko yang sama pada premi berbasis risiko. Besarnya klaim atau banyaknya klaim yang akan terjadi diasumsikan berupa peubah acak yang bergantung pada risiko.

Teori kredibilitas adalah salah satu alat yang dapat digunakan untuk memodelkan premi berbasi risiko ini [1]. Teori ini menilai klaim individu atau kelompok yang terjadi di masa lalu guna memprediksi premi di masa mendatang. Terdapat dua pendekatan dalam teori kredibilitas ini yaitu pendekatan kredibilitas klasik atau *Limited Fluctuation Credibility* dan pendekatan kredibilitas modern atau yang disebut *Greatest Accurasy Credibility*. Metode kredibilitas Bühlmann adalah metode kredibilitas yang masuk dalam kelompok metode kredibilitas akurasi terbaik. Metode ini didasarkan pada model linear dari data klaim masa lampau, dimana prediksi di masa mendatang diduga dengan kondisi klaim di masa lampau tersebut.

Nilai parameter-parameter dari model Bühlmann ini akan diestimasi. Pendekatan yang digunakan pun terdiri dari tiga pendekatan yaitu pendekatan nonparametrik, pendekatan semiparametrik, dan pendekatan parametrik. Data klaim di masa lampau dan ukuran risiko yang menggunakan pendekatan parametrik diasumsikan mengikuti suatu distribusi tertentu. Beberapa penelitian yang mengkaji model Bühlmann parametrik dapat dilihat dalam [2]–[4]. Dalam artikel ini, kami mengkaji model parametrik Bühlmann dengan klaim diasumsikan mengikuti distribusi Binomial Negatif-Lindley. Perumusan dugaan parameter akan diformulasikan dan diberikan contoh simulasi penerapan model yang dikaji tersebut.

2 Metode Penelitian

2.1 Model Binomial Negatif

Definisi 1. M*isalkan X adalah peubah acak diskret yang berdistribusi binomial negatif dengan parameter r, p dan dinotasikan dengan $X \sim NB(r,p)$. Peubah acak X memiliki fungsi massa peluang sebagai berikut*

$$p_X(x) = P(X = x) = \binom{x + r - 1}{x} p^r (1 - p)^x,$$

dengan $0 \leq p \leq 1, r > 0,$ *dan* $x = 0,1,2,3, \ldots$ [5].

Nilai harapan dan momen kedua dari distribusi ini diberikan sebagai berikut

$$E(X) = \frac{r(1 - p)}{p}, \tag{1}$$

$$E(X^2) = \frac{r(1 - p)[1 + r(1 - p)]}{p^2}. \tag{2}$$

Distribusi ini mudah dipahami sebagai distribusi dari peubah acak jumlah percobaan sampai mendapatkan sukses ke k dengan peluang sukses setiap percobaan adalah p. Dalam teori aktuaria, distribusi ini sangat banyak digunakan untuk memodelkan banyaknya frekuensi klaim yang terjadi.

2.2 Model Distribusi Lindley

Definisi 2. *Misalkan Θ adalah peubah acak kontinu yang berdistribusi Lindley dengan parameter θ dan dinotasikan $\Theta \sim Lind(\lambda)$, maka Θ memiliki fungsi kepekatan peluang sebagai berikut*

$$f_{\Theta}(\theta) = \frac{\lambda^2}{\lambda + 1}(1 + \theta)e^{-\lambda\theta},$$

dimana $\theta > 0$ and $\lambda > 0$.

Distribusi Lindley lebih baik dibandingkan distribusi eksponensial [6]. Salah satu karakteristik distribusi ini yang sangat berguna adalah fungsi pembangkit momen yang diberikan dalam Lemma 3 berikut ini.

Lemma 3. *Misalkan $\Theta \sim Lind(\lambda)$, maka fungsi pembangkit momen dari Θ adalah*

$$M_{\Theta}(z) = \frac{\lambda^2}{\lambda + 1}\frac{\lambda - z + 1}{(\lambda - z)^2}. \quad (3)$$

Bukti: Lihat [7].

2.3 Model Binomial Negatif-Lindley

Frekuensi klaim dapat dimodelkan dalam distribusi peubah acak diskret seperti Poisson, geometrik, and binomial negatif. Namun, frekuensi untuk klaim yang bernilai 0 cukup banyak, sehingga model binomial negatif-Lindley (NB-L) dapat diusulkan. Distribusi NB-L dapat diaplikasikan untuk menyelesaikan masalah overdispersi dari data. Hal ini ditandai dengan banyaknya data yang bernilai nol dan sangat sedikit data yang bernilai lebih dari nol.

Definisi 4. *Misalkan X adalah peubah acah yang berdistribusi Binomial Negatif-Lindley dengan parameter (r, θ), dinotasikan dengan NB-L(r, λ), apabila memenuhi representasi stokastik sebagai berikut*

$$X|\Theta \sim NB\left(r, p = e^{-\theta}\right) \text{ dan } \Theta \sim Lin(\lambda). \quad (4)$$

Beberapa penerapan distribusi ini dapat dilihat pada beberapa penelitian berikut [8]–[11].

3 Hasil dan Pembahasan

3.1 Model Kredibilitas Bühlmann Binomial Negatif-Lindley

Dalam artikel ini, kami menurunkan formula untuk memprediksi premi kredibilitas Buhlmann dengan klaim diasumsikan berdistribusi NB-L. Ide yang digunakan sama seperti penurunan formula Bühlmann yang menggunakan pendekatan kredibilitas akurasi terbaik. Premi di masa mendatang pada pendekatan ini merupakan kombinasi linear dari serangkaian amatan, n, masa lampau [12], [13].

Misalkan N_j menyatakan banyaknya klaim tahun ke $j, j = 1,2,\ldots,n$. Prediksi dari premi dinyatakan sebagai

$$\alpha_0 + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j N_j = Z\bar{N} + (1 - Z)\mu, \tag{5}$$

dengan α_j menyatakan koefisien dari peubah acak N_j, α_0 adalah konstanta, $\bar{N} = \frac{\sum_{j=1}^{n} N_j}{n}$, μ disebut juga sebagai premi kolektif (*Collective premium*), dan Z merupakah faktor kredibilitas yang akan diduga nilainya. Asumsi yang digunakan dalam formulasi model kredibilitas Bühlmann NB-L ini adalah

a. $N_j |\, \Theta$ berdistribusi Binomial Negatif $(r, p = e^{-\theta})$ untuk $j = 1,2,\ldots n$. Kuantitas $\mu(\theta)$ dan $v(\theta)$ berturut-turut didefinisikan sebagai *hypothetical mean* dan *process variance* dengan

$$\mu(\theta) = E(N_j |\, \Theta),$$
$$v(\theta) = Var(N_j |\, \Theta).$$

b. Nilai dari peubah acak Θ adalah θ. Θ menggambarkan peubah acak risiko terjadinya klaim. Dalam hal ini $\Theta \sim \text{Lindley}(\lambda)$.

Berdasarkan asumsi (a) di atas, kita dapat memastikan bahwa frekuensi terjadinya klaim mengikuti distribusi NB-L. Hal ini jelas karena N_j merupakan distribusi campuran Binomial Negatif dan distribusi Lindley yang memenuhi asumsi persamaan (4).

3.2 Formula *Hypothetical mean*

Berdasarkan asumsi pada subbab 3.1 dan persamaan (1), formula *hypothetical mean* dapat ditentukan sebagai berikut

$$\mu(\theta) = E\left(N_j \middle| \Theta = \theta\right) = \frac{r(1-p)}{p} = \frac{r(1-e^{-\theta})}{e^{-\theta}} = r\left(e^{\theta} - 1\right). \tag{6}$$

Nilai dari μ adalah

$$\begin{aligned} \mu = E\left(N_j\right) = E\left(E\left(N_j \middle| \Theta = \theta\right)\right) &= E\left(\mu(\Theta)\right) \\ &= E(r(e^{\Theta} - 1)) \\ &= r(E(e^{\Theta}) - 1). \end{aligned}$$

Karena Θ berdistribusi Lindley, dengan menggunakan fungsi pembangkit momen dari distribusi ini seperti persamaan (3) dengan $z = 1$ diperoleh

$$\mu = r\left(\frac{\lambda^3}{\lambda+1}\frac{1}{(\lambda-1)^2} - 1\right). \tag{7}$$

Kuantitas a yang merupakan ragam dari $\mu(\Theta)$ dapat dinyatakan sebagai

$$a = Var\big(\mu(\Theta)\big) = Var\big(r(e^{\Theta} - 1)\big)$$

$$= r^2 Var(e^{\Theta}) = r^2\left[E(e^{2\Theta}) - \big(E(e^{\Theta})\big)^2\right].$$

Dengan menggunakan fungsi pembangkit momen untuk $z = 2$ dan $z = 1$, maka diperoleh

$$a = r^2\left[\frac{\lambda^2}{\lambda+1}\frac{\lambda-2+1}{(\lambda-2)^2} - \left(\frac{\lambda^2}{\lambda+1}\frac{\lambda-1+1}{(\lambda-1)^2}\right)^2\right]$$

$$a = r^2\frac{\lambda^2}{\lambda+1}\left[\frac{\lambda-1}{(\lambda-2)^2} - \frac{\lambda^4}{(\lambda+1)(\lambda-1)^4}\right]. \tag{8}$$

3.2 Formula *Process Variance* dan nilai harapannya

Process variance untuk model NB-L dapat ditentukan sebagai berikut

$$v(\theta) = Var\big(N_j \big| \Theta = \theta\big) = E\big(N_j^2 \big| \Theta = \theta\big) - \Big(E\big(N_j \big| \Theta = \theta\big)\Big)^2$$

$$= \frac{r(1-p)[1 + r(1-p)]}{p^2} - \left(\frac{r(1-p)}{p}\right)^2$$

$$= \frac{r(1-p)}{p^2} = r(p^{-2} - p^{-1}) = r(e^{2\theta} - e^{\theta}).$$

Nilai harapan dari $v(\Theta)$ adalah

$$v = E\big(v(\Theta)\big) = E(r(e^{2\Theta} - e^{\Theta})) = r[E(e^{2\Theta}) - E(e^{\Theta})].$$

Dengan menggunakan momen kedua dimana $z = 2$ dan $z = 1$ maka diperoleh

$$v = r\left[\frac{\lambda^2}{\lambda+1}\frac{\lambda-2+1}{(\lambda-2)^2} - \frac{\lambda^2}{\lambda+1}\frac{\lambda-1+1}{(\lambda-1)^2}\right]$$

$$v = r\frac{\lambda^2}{\lambda+1}\left[\frac{\lambda-1}{(\lambda-2)^2} - \frac{\lambda}{(\lambda-1)^2}\right]. \tag{9}$$

3.3 Faktor Kredibilitas Bühlmann dan Premi Bühlmann

Bagian terakhir dari penentuan premi kredibilitas Bühlmann adalah perlu diberikannya nilai faktor kredibilitas. Persamaan (8) disubstitusi ke persamaan (9) sehingga diperoleh faktor Bühlmann sebagai berikut

$$k = \frac{v}{a} = \frac{\left[\frac{\lambda-1}{(\lambda-2)^2} - \frac{\lambda}{(\lambda-1)^2}\right]}{r\left[\frac{\lambda-1}{(\lambda-2)^2} - \frac{\lambda^4}{(\lambda+1)(\lambda-1)^4}\right]} = \frac{(\lambda^2-\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-1)^2}{r(\lambda^4 - 5\lambda^2 + 4\lambda - 1)}. \tag{10}$$

Faktor kredibilitas Bühlmannnya adalah

$$Z = \frac{n}{n+k}.$$

Dugaan premi kredibilitas Bühlmann dapat diperoleh dengan menyubstitusikan nilai z yang diperoleh ke persamaan (5).

3.4 Simulasi Data

Data yang digunakan dalam penelitian ini bersumber dari [4]. Data tersebut disajikan dalam tabel berikut ini

Tabel 1. Data Simulasi

	Number of polis in year *j*					
Number of Claims	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
0	1661	1650	1653	1677	1668	1682
1	573	584	581	557	566	552
2	0	0	0	0	0	0

Algoritma yang digunakan dalam simulasi ini adalah sebagai berikut

a. Dengan menggunakan metode maksimum Likelihood (menggunakan *package* `fitdistplus` di R), berikan dugaan parameter θ_j dan r_j dari peubah acak $N_j|\ \Theta$ yang berdistribusi Binomial Negatif $(r_j, e^{-\theta_j})$.
b. Dengan menggunakan metode momen, duga parameter λ dari peubah acak Θ yang berdistribusi Lindley (λ).

Dari simulasi yang telah dilakukan diperoleh nilai θ_j dan r_j sebagai berikut:

Tabel 2. Dugaan Parameter Binomial Negatif-Lindley

j	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
θ_j	8,2660021	8,264191	8,2632099	8,2676181	8,2656181	8,2660021
r_j	0,1916861	0,192012	0,1920538	0,1912953	0,1916483	0,1911941

Metode momen memberikan nilai dugaan untuk $\lambda = 0{,}220137$. Nilai r dipilih dengan merata-ratakan nilai r_j, diperoleh $r = 0{,}191648233$.

Dengan menggunakan persamaan (10) diperoleh nilai k =2,419183412 dan Z =0,712658189. Nilai μ diperoleh dengan persamaan (7) sebesar $\mu = -0{,}188893125$. Dugaan kredibilitas Bühlmann untuk model NB-L ini adalah

$$Z\overline{N} + (1-Z)\mu = 0{,}127184.$$

Nilai Z yang diperoleh ini mengartikan bahwa data masa lampau yang kita peroleh cukup kredibel 71.26% untuk digunakan menduga premi di masa mendatang. Meskipun nilai Z yang diperoleh cukup besar, nilai premi kolektif μ untuk model ini bernilai negatif sehingga untuk n yang kecil model ini kurang baik untuk digunakan karena akan memperkecil nilai premi.

4 Simpulan

Model kredibilitas Bühlmann parametrik dengan klaim berdistribusi Binomial Negatif-Lindley dapat diaplikasikan untuk data yang memiliki overdispersi. Penduga kuantitas Bühlmann untuk model ini telah diberikan. Dari simulasi yang dilakukan, model NB-L ini memberikan nilai faktor kredibilitas Bühlmann cukup besar. Namun kelemahan dari model Bühlmann NB-L ini adalah memerlukan data amatan yang banyak dibandingkan model lainnya.

5 Daftar Pustaka

[1] I. Slamet and K. Natalia, "Kredibilitas dengan Pendekatan Bühlmann," in *Seminar Nasional MIPA*, 2007, pp. 63–74.

[2] L. M. Wen, W. Wang, and J. L. Wang, "The credibility premiums for exponential principle," *Acta Math. Sin. Engl. Ser.*, vol. 27, no. 11, pp. 2217–2228, 2011, doi: 10.1007/s10114-011-9198-4.

[3] A. Hassan Zadeh and D. A. Stanford, "Bayesian and Bühlmann credibility for phase-type distributions with a univariate risk parameter," *Scand. Actuar. J.*, vol. 2016, no. 4, pp. 338–355, 2016.

[4] T. M. Karina, S. Nurrohmah, and I. Fithriani, "Buhlmann credibility model in predicting claim frequency that follows heterogeneous Weibull count distribution," in *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 1218, no. 1, p. 012041, doi: 10.1088/1742-6596/1218/1/012041.

[5] S. Ghahramani, *Fundamentals of Probability*. New York (US): Prentice Hall, 2005.

[6] M. E. Ghitany, B. Atieh, and S. Nadarajah, "Lindley distribution and its application," *Math. Comput. Simul.*, vol. 78, no. 4, pp. 493–506, 2008, doi: 10.1016/j.matcom.2007.06.007.

[7] H. Zamani and N. Ismail, "Negative binomial-Lindley distribution and its application," *J. Math. Stat.*, vol. 6, no. 1, pp. 4–9, 2010, doi: 10.3844/jmssp.2010.4.9.

[8] D. Lord and S. R. Geedipally, "The negative binomial–Lindley distribution as a tool for analyzing crash data characterized by a large amount of zeros," *Accid. Anal. Prev.*, vol. 43, no. 5, pp. 1738–1742, 2011.

[9] S. R. Geedipally, D. Lord, and S. S. Dhavala, "The negative binomial-Lindley generalized linear model: Characteristics and application using crash data," *Accid. Anal. Prev.*, vol. 45, pp. 258–265, 2012.

[10] M. Shirazi, S. S. Dhavala, D. Lord, and S. R. Geedipally, "A methodology to design heuristics for model selection based on the characteristics of data: Application to investigate when the Negative Binomial Lindley (NB-L) is preferred over the Negative Binomial (NB)," *Accid. Anal. Prev.*, vol. 107, pp. 186–194, 2017, doi: 10.1016/j.aap.2017.07.002.

[11] M. R. R. Shaon, X. Qin, M. Shirazi, D. Lord, and S. R. Geedipally, "Developing a Random Parameters Negative Binomial-Lindley Model to analyze highly over-dispersed crash count data," *Anal. Methods Accid. Res.*, vol. 18, pp. 33–44, 2018, doi: 10.1016/j.amar.2018.04.002.

[12] H. Bühlmann and A. Gisler, *A Course in Credibility Theory and Its Applications*. Springer Science & Business Media, 2006.

[13] T. N. Herzog, *Introduction to Credibility Theory*. Actex Publications, 1999.