

Model Regresi untuk *Return* Aset dengan Volatilitas Mengikuti Model GARCH(1,1) Berdistribusi Epsilon-Skew Normal dan Student-*t*

Didit Budi Nugroho^{*}, Kristia Anggraeni, Hanna Arini Parhusip

Departemen Matematika dan Sains Data, Universitas Kristen Satya Wacana, Salatiga, Indonesia

^{*}Study Center for Multidisciplinary Applied Research and Technology (SeMARTy)

^{*}Email korespondensi: didit.budinugroho@uksw.edu, didit.budinugroho@staff.uksw.edu

Diajukan: 29 Maret 2020, Diperbaiki: 9 Juni 2020, Diterima: 16 Desember 2020

Abstrak

Studi ini mendiskusikan dua perluasan dari model GARCH(1,1), yaitu AR(1)-GARCH(1,1) dan MA(1)-GARCH(1,1), yang diperoleh dengan cara menambahkan *Autoregression* tingkat 1 atau *Moving Average* tingkat 1 pada persamaan *return*. Untuk kasus ini, *error* dari *return* diasumsikan berdistribusi Normal, Skew Normal (SN), Epsilon Skew Normal (ESN), dan Student-*t*. Analisis terhadap model didasarkan pada pencocokan model untuk *return* dari indeks saham FTSE100 periode harian dari Januari 2000 sampai Desember 2017 dan indeks saham TOPIX periode harian dari Januari 2000 sampai Desember 2014. Model yang dipelajari diestimasi menggunakan metode GRG (*Generalized Reduced Gradient*) Non Linear yang tersedia di Solver Excel dan juga metode *Adaptive Random Walk Metropolis* (ARWM) yang diimplementasikan pada program Scilab. Hasil estimasi dari kedua alat bantu tersebut menunjukkan nilai-nilai yang hampir sama, mengindikasikan bahwa Solver Excel mempunyai kemampuan yang handal dalam mengestimasi parameter model. Uji rasio *log-likelihood* dan AIC (*Akaike Information Criterion*) menunjukkan bahwa model dengan distribusi ESN lebih unggul dibandingkan dengan model-model berdistribusi tipe normal lainnya untuk setiap kasus model dan data pengamatan, bahkan ini bisa mengungguli distribusi Student-*t* pada suatu model dan data pengamatan. Lebih lanjut, model-model dengan penambahan proses regresi di persamaan *return* menyediakan pencocokan yang lebih baik daripada model dasar, dimana pencocokan terbaik untuk kedua data pengamatan diberikan oleh model AR(1)-GARCH(1,1) berdistribusi Student-*t*.

Kata kunci: ARWM, GARCH(1,1), GRG Non-Linier, regresi

Abstract

This study discusses two extensions of GARCH(1,1), i.e. AR(1)-GARCH(1,1) and MA(1)-GARCH(1,1), by incorporating either first-order Autoregression or first-order Moving Average into the return equation. In this case, the series of return errors is assumed either Normally, Normal Skew, Epsilon Skew Normal, or Student-t distributed. The data analysis is based on fitting the models to the FTSE100 stock index for the daily period from January 2000 to December 2017 and the TOPIX stock index for the daily period from January 2000 to December 2014. The considered models were estimated by using the GRG (Generalized Reduced Gradient) Non Linear method which is available in Excel's Solver and also the Adaptive Random Walk Metropolis (ARWM) method which is implemented in Scilab. The estimation results obtained from both estimation tools were close each other, indicating that Excel's Solver is able to estimate the models. Log-likelihood ratio test and AIC (Akaike Information Criterion) showed that the model with ESN distribution outperforms the models with other normal-type distributions in each model and observed data cases, even the ESN distribution can outperform the Student-t distribution on a model and observed data. Furthermore, the GARCH(1,1) model with adding a regression process into the return equation provide a better fit than the basic model, where the best fit on both observed data is provided by the AR(1)-GARCH(1,1) model with the Student-t distribution.

Keywords: ARWM, GARCH(1,1), GRG Non-Linier, regression

1 Pendahuluan

Volatilitas (*volatility*) mengukur seberapa besar fluktuasi (laju perubahan) suatu aset di pasar keuangan. Aset keuangan dapat berupa saham, kurs mata uang, komoditas, opsi, obligasi dan lain-lain. Besar kecilnya suatu volatilitas akan berpengaruh pada besarnya keuntungan maupun kerugian yang diperoleh investor di pasar keuangan [1]. Karena itu volatilitas mencerminkan tingkat pengembalian investasi atau mengukur tingkat keuntungan ataupun kerugian dari suatu aset. Secara umum, nilai volatilitas tersebut dinyatakan secara statistik sebagai simpangan baku dari suatu *return* (perubahan nilai) aset dalam jangka waktu yang spesifik [2].

Suatu model yang populer hingga saat ini untuk mendeskripsikan proses volatilitas dari data runtun waktu yaitu model GARCH (*Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*) [3]. Model tersebut merupakan perumuman dari model ARCH (*Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*) yang diperkenalkan di [4]. Kedua model tersebut menyatakan volatilitas sebagai fungsi eksak (bukan stokastik) yang berubah atas waktu (heteroskedastik).

Untuk mendapatkan model dan ramalan yang tepat bagi volatilitas di pasar keuangan, terdapat banyak perluasan atau modifikasi yang telah diturunkan dari model GARCH. Suatu perluasan tersebut yaitu dengan menambahkan proses regresi pada persamaan *return*. Model regresi yang dapat ditambahkan yaitu seperti model AR(*p*) (*Autoregression* tingkat *p*) dan MA(*q*) (*Moving Average* tingkat *q*). [5] telah mengaplikasikan model AR(1)-GARCH(1,1) dengan menggunakan tiga macam distribusi berekor tebal (*heavy tailed*) untuk *error* dari *return*, yaitu *generalized error distribution*, hiperbolik, dan Student-*t*. Sementara itu, [6] telah mengaplikasikan model MA(1)-GARCH(1,1) untuk data beberapa kurs mata uang dengan mengasumsikan *error* dari *return* berdistribusi Johnson Su. Dalam pengestimasian model, [5,6] telah menggunakan metode yang didasarkan pada estimasi *likelihood* maksimum.

Perumuman suatu model statistik dapat juga dilakukan pada distribusinya. [7] menyarankan penggantian distribusi Normal pada model GARCH dengan distribusi Student-*t* untuk mengatasi karakteristik ketebalan ekor (*heavy-tails*) pada data *returns*. Untuk karakteristik kemencengan (*skewness*) dari distribusi, [8,9] mengusulkan distribusi Skew Normal (SN), yang merupakan perumuman dari distribusi Normal. Selanjutnya [10] memperumum distribusi SN menjadi Epsilon-Skew Normal (ESN) dan menunjukkan bahwa distribusi ESN lebih cocok daripada normal.

Studi ini memperluas kerja dari [5,6] dengan berkontribusi pada dua hal. Pertama, *error* dari *return* diasumsikan berdistribusi Normal, SN, ESN, dan Student-*t* untuk mengetahui perbandingan antara distribusi Normal, bertipe menceng, dan bertipe ekor tebal. Kedua, metode GRG (*Generalized Reduced Gradient*) Non-Linear di Solver Excel dan metode ARWM (*Adaptive*

Random Walk Metropolis) dalam skema Markov Chain Monte Carlo yang diimplementasikan di Scilab dikerjakan untuk mengestimasi model-model yang dipelajari. Kedua metode dan alat bantu tersebut sudah pernah dipelajari dan ditunjukkan handal di [11]–[15] pada model-model bertipe GARCH. Ketiga, analisis perbandingan model didasarkan pada data indeks saham FTSE periode harian dari tahun 2000 sampai 2017 dan indeks saham TOPIX periode harian dari 2000 sampai 2014 untuk menyediakan bukti keunggulan distribusi ESN dan Student- t .

2 Model Bertipe GARCH

Model GARCH di [3] merupakan perluasan dari model ARCH yang diusulkan di [4]. Model GARCH diusulkan untuk memperkenalkan struktur lag-variansi yang lebih fleksibel, sehingga variansi tidak hanya bergantung pada *return* masa lalu tetapi juga pada variansi masa lalu. Suatu model yang populer dan banyak digunakan dalam studi yaitu model GARCH(1,1) yang dinyatakan sebagai berikut:

$$R_t = e_t, \quad e_t \sim N(0, \sigma_t^2), \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (1)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha e_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2, \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (2)$$

dimana $\omega > 0$ dan $\alpha, \beta \geq 0$ (untuk menjamin nilai positif dari variansi) dan $0 \leq \alpha + \beta < 1$ (untuk menjamin variansi yang stasioner). Nilai *return* umumnya dihitung sebagai selisih dari logaritma harga aset, yaitu $R_t = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)$, dimana S_t menyatakan harga aset pada saat t .

Suatu perluasan model GARCH dapat dilakukan dengan menambahkan regresi di persamaan *return*. Untuk model AR(1)-GARCH(1,1), persamaan *return* dinyatakan sebagai berikut:

$$R_t = \phi R_{t-1} + e_t \quad (3)$$

atau bisa dituliskan kembali menjadi

$$e_t = R_t - \phi R_{t-1}. \quad (4)$$

Oleh karena itu, proses variansi bersyarat σ_t^2 untuk model AR(1)-GARCH(1,1) diperoleh dengan memasukkan persamaan (4) ke (2):

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha(R_{t-1} - \phi R_{t-2})^2 + \beta \sigma_{t-1}^2. \quad (5)$$

Untuk model MA(1)-GARCH(1,1), ini diperoleh dengan membentuk regresi untuk *error*, sehingga persamaan *return* bisa dinyatakan sebagai berikut:

$$R_t = \mu + e_t + \psi e_{t-1}, \quad (6)$$

atau bisa dituliskan kembali menjadi

$$e_t = R_t - \mu - \psi e_{t-1}, \quad (7)$$

Karena itu, proses variansi bersyarat σ_t^2 untuk model MA(1)-GARCH(1,1) diperoleh dengan memasukkan persamaan (7) ke (2), dengan asumsi $e_0 = 0$ dan $\sigma_0^2 = \text{var}[\{R_t\}_{t=1}^T]$:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha(R_{t-1} - \mu - \psi e_{t-1})^2 + \beta\sigma_{t-1}^2. \quad (8)$$

3 Distribusi untuk *Error*

3.1 Distribusi Normal

Distribusi Normal atau biasa disebut dengan distribusi Gaussian diperkenalkan oleh Karl Fredrich Gauss (1777–1855) ketika meneliti *error* dalam pengukuran yang berulang-ulang dengan bahan yang sama. Suatu variabel acak x yang berdistribusi Normal dengan rata-rata μ dan variansi σ^2 , dinotasikan dengan $x \sim N(\mu, \sigma^2)$, mempunyai persamaan distribusi bersyarat sebagai berikut:

$$f(x|\mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]. \quad (9)$$

Kurva dari fungsi distribusi Normal berbentuk lonceng yang simetris di kedua sisi rata-rata, artinya sisi kanan dari rata-rata merupakan bayangan cermin dari sisi kiri. Dengan kata lain, nilai kemencengan dari distribusi Normal yaitu nol. Lebih lanjut, ekor distribusinya adalah asimptotik, artinya mendekati tetapi tidak pernah benar-benar bertemu dengan sumbu datar (yaitu sumbu x).

3.2 Distribusi Skew Normal

Distribusi SN diusulkan oleh [8,9] untuk memperluas distribusi Normal sehingga mampu mengakomodasi kemencengan data. Fungsi distribusi SN untuk suatu variabel acak $-\infty < x < \infty$ dinyatakan sebagai berikut:

$$g(x|\lambda) = 2 \phi(x) \Phi(\lambda x), \lambda \in \mathbb{R}, \quad (10)$$

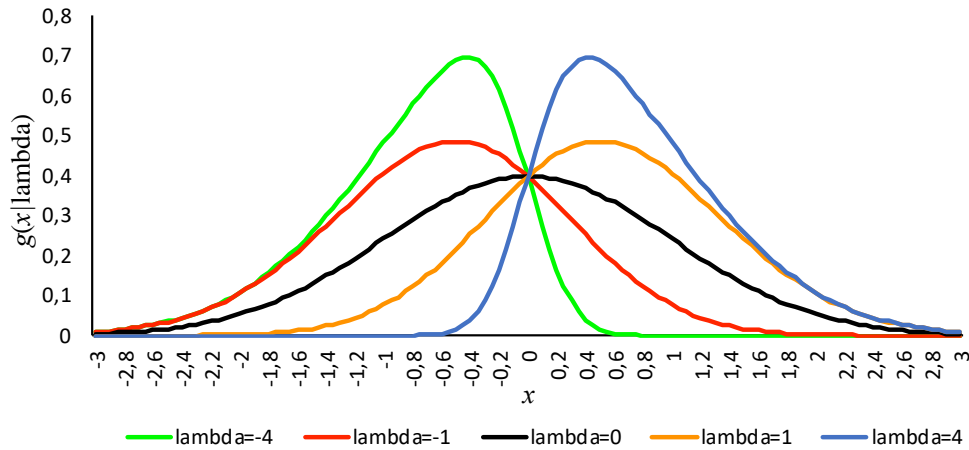
dimana $\phi(\cdot)$ dan $\Phi(\cdot)$ berturut-turut menyatakan fungsi kepadatan peluang dan fungsi kepadatan kumulatif distribusi Normal. Selanjutnya, persamaan (10) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$g(x|\lambda) = 2 \times \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \times \frac{1}{2} \left(1 + \text{Erf}\left(\frac{\lambda(x-\mu)}{\sqrt{2\sigma^2}}\right)\right), \quad (11)$$

dimana *Erf* menyatakan *error function* yang didefinisikan seperti berikut:

$$\text{Erf}(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-z^2} dz.$$

Gambar 1 menyajikan grafik fungsi yang mengilustrasikan distribusi SN untuk lima nilai λ yang berbeda. Terlihat bahwa semakin negatif nilai λ , distribusinya semakin menceng ke kiri. Sebaliknya, semakin positif nilai λ , distribusinya semakin menceng ke kanan. Ketika $\lambda = 0$, maka distribusinya adalah Normal.



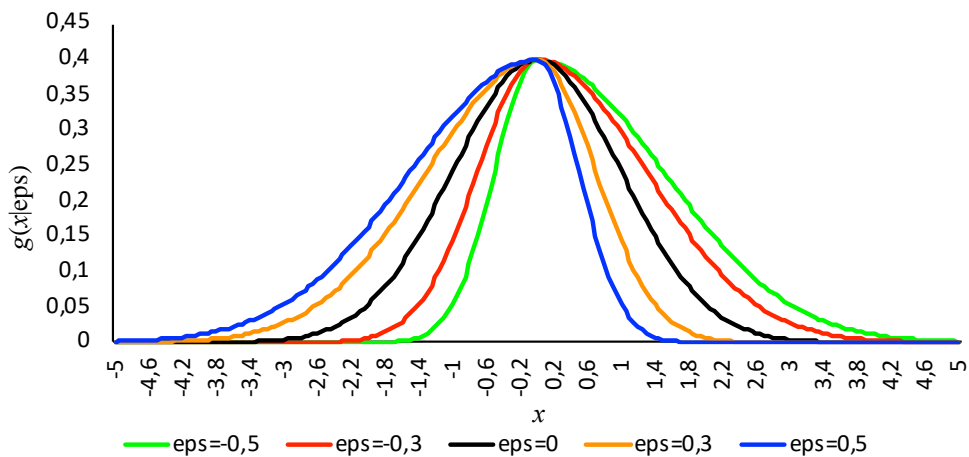
Gambar 1. Grafik fungsi distribusi SN untuk beberapa nilai λ .

3.3 Distribusi Epsilon Skew Normal

Distribusi ESN diperkenalkan oleh [10] untuk menyatakan suatu distribusi asimetris yang berbeda dengan distribusi SN yang diperkenalkan oleh [8,9]. Untuk suatu parameter kemencengan $|\varepsilon| < 1$, persamaan untuk fungsi distribusi ESN dari suatu variabel acak x didefinisikan seperti berikut:

$$g(x|\varepsilon) = \begin{cases} \phi\left(\frac{x}{(1+\varepsilon)}\right) & \text{untuk } x < 0, \\ \phi\left(\frac{x}{(1-\varepsilon)}\right) & \text{untuk } x \geq 0. \end{cases} \quad (12)$$

Gambar 2 menyajikan grafik yang mengilustrasikan distribusi ESN untuk tiga nilai ε yang berbeda. Terlihat bahwa semakin negatif nilai ε , distribusinya semakin menceng ke kanan. Sebaliknya, semakin positif nilai ε , distribusinya semakin menceng ke kiri. Ketika $\varepsilon = 0$, maka distribusinya adalah Normal.



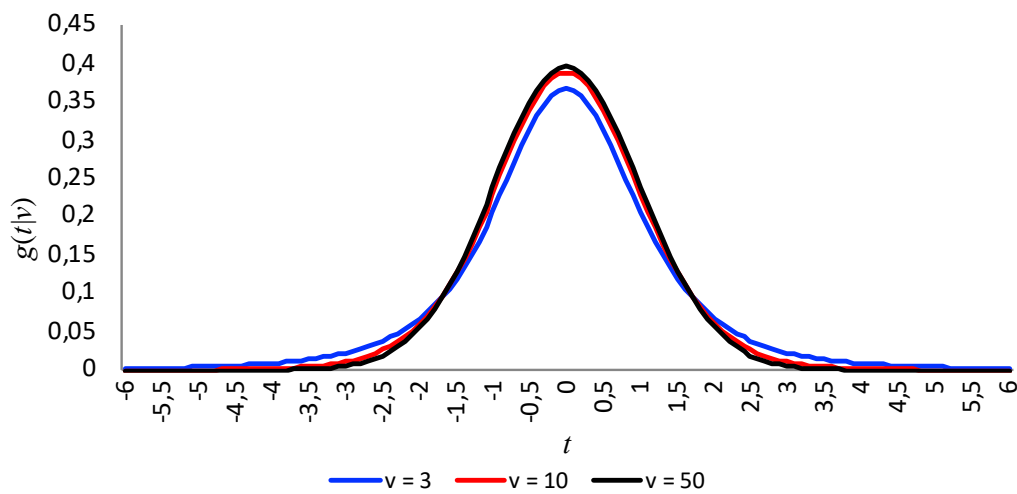
Gambar 2. Grafik fungsi distribusi ESN untuk beberapa nilai ε .

3.4 Distribusi Student-*t*

Distribusi Student-*t* diperkenalkan oleh *William Sealy Gosset* (13 Juni 1876–16 Oktober 1937) pada tahun 1908 dengan nama samarannya adalah Student [16]. Distribusi Student-*t* mempunyai dua variabel acak, yaitu yang satu berdistribusi Normal dan satunya lagi berdistribusi *chi-square* dengan derajat kebebasan ν . Persamaan distribusi Student-*t* dinyatakan sebagai berikut:

$$g(t|\nu) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi\nu}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(\frac{1}{1+t^2/\nu}\right)^{\frac{\nu+1}{2}}, \quad -\infty < t < \infty. \quad (13)$$

Dalam hal ini, t dikatakan berdistribusi Student-*t* dengan derajat kebebasan ν [17].



Gambar 3. Grafik fungsi distribusi Student-*t* untuk beberapa nilai ν .

Gambar 3 mengilustrasikan grafik fungsi distribusi Student-*t* untuk beberapa nilai derajat kebebasan ν . Semakin besar nilai ν maka ketebalan ekor distribusi di kedua sisi akan semakin menipis, atau dengan kata lain jika nilai ν semakin mengecil maka ekor distribusi di kedua sisi semakin tebal.

4 Alat Estimasi

Untuk mendapat nilai-nilai parameter, model diestimasi menggunakan metode GRG-Non Linear yang tersedia di Solver Excel dan sebagai pembandingnya studi ini mengerjakan metode ARWM dalam algoritma MCMC yang diimplementasikan di Scilab. Perbandingan tersebut diperlukan karena metode GRG Non-Linear diaplikasikan secara langsung dari Solver Excel. Prinsip dari metode GRG-Non Linear dijelaskan di [18], yaitu penyelesaian dimulai dari nilai-nilai awal parameter dan akan berubah sedikit demi sedikit sehingga nilainya optimal, artinya ini

diharapkan secara bertahap “menanjak” jika tujuannya memaksimalkan dan “menurun” jika tujuannya meminimumkan fungsi tujuan.

Untuk metode ARWM di [19], algoritmanya secara rinci telah dijelaskan oleh [11]. Identya yaitu membangkitkan suatu kandidat untuk parameter θ pada iterasi ke- (j) dengan cara:

$$\theta^{(j)} = \theta^{(j-1)} + \sqrt{\Delta^{(j-1)}} z^{(j)}, z^{(j)} \sim N(0,1), \quad (14)$$

dimana $\Delta^{(j-1)}$ menyatakan lebar langkah dan diperbarui menjadi:

$$\Delta^{(j)} = \Delta^{(j-1)} + \frac{m - 0.44}{j^{0.6}}, \quad (15)$$

yang mana m menyatakan banyaknya penerimaan dari kandidat. Metode tersebut diaplikasikan dalam langkah pertama dari algoritma MCMC, yaitu membangkitkan rantai Markov untuk parameter θ . Selanjutnya, langkah kedua dari algoritma MCMC yaitu menghitung nilai-nilai statistik seperti rata-rata dan interval kepercayaan berdasarkan pendekatan Monte Carlo.

Studi ini memilih interval HPD (*Highest Posterior Density*) sebagai interval kepercayaan untuk mengetahui signifikansi estimasi parameter. Algoritma untuk menghitung 95% interval HPD untuk rantai Markov $\{\theta^{(j)}\}_{j=1}^M$ dijelaskan di [20] seperti berikut:

1. Menghitung M_{potong} dan $M_{rentang}$, dengan $M_{potong} = [0,05 \times M]$ dan $M_{rentang} = M - M_{potong}$, dimana $[\cdot]$ menyatakan fungsi pembulatan baku.
2. Mengurutkan nilai estimasi dari kecil ke besar: $\{\theta_k\}_{k=1}^M$, dimana $\theta_1 \leq \theta_2 \leq \dots \leq \theta_M$
3. Menghitung $\theta^* = \{\theta_k\}_{k=M_{rentang}}^M - \{\theta_k\}_{k=1}^{M_{potong}}$
4. Menentukan indeks k^* , dimana $\theta^*(k^*)$ merupakan nilai minimum.
5. Interval kepercayaan untuk 95% yaitu $(\theta_{k^*}, \theta_{k^*+M_{rentang}})$.

5 Aplikasi Model dan Metode pada Data Indeks Saham

5.1 Data dan Deskripsi

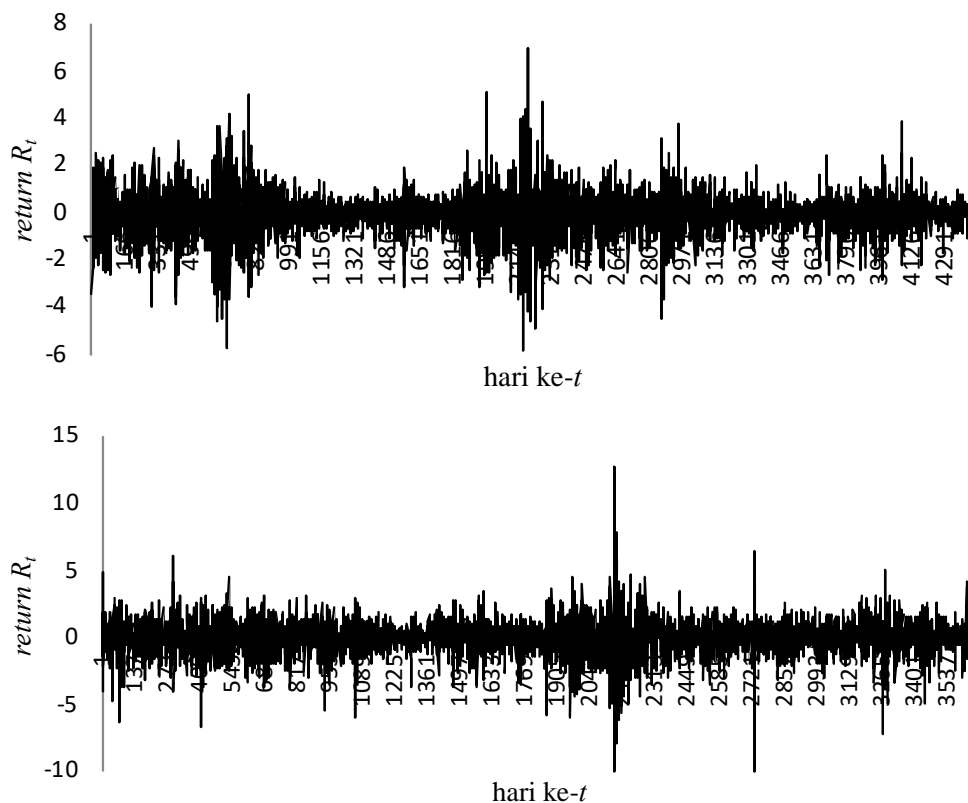
Model-model yang dipelajari selanjutnya diaplikasikan pada dua data indeks saham internasional yang populer, yaitu FTSE100 dan TOPIX. Indeks saham FTSE100 (*Financial Time Stock Exchange 100*) merupakan indeks saham dari 100 perusahaan yang terdaftar di pasar saham London berdasarkan ukuran kapitalisasi pasar terbesar. Yang disebut dengan kapitalisasi pasar yaitu nilai atau harga sebuah perusahaan yang dihitung dari jumlah total nilai saham yang beredar dikalikan dengan harganya di pasar saham [21]. Menurut [22] kapitalisasi pasar yang besar umumnya menjadi salah satu daya tarik para investor dalam memilih saham. Sementara itu, indeks saham TOPIX (*Tokyo Stock Price Index*) merupakan suatu indeks saham yang penting di Jepang

dan dihitung serta dipublikasikan oleh Tokyo Stock Exchange [23] yang biasanya digunakan untuk menentukan tren di pasar saham yang dijadikan patokan oleh investor.

Data harian dari *returns* indeks saham FTSE100 terdiri dari 4437 pengamatan untuk periode dari Januari 2000 sampai Desember 2017 dan indeks saham TOPIX terdiri dari 3665 pengamatan untuk periode Januari 2000 sampai Desember 2014. Tabel 1 menyajikan deskripsi statistik untuk data *return* harian dari FTSE100 dan TOPIX.

Tabel 1. Deskripsi data *return* untuk indeks saham FTSE100 dan TOPIX.

Statistik	FTSE100	TOPIX
Rata-rata	-0,0359	-0,0073
Simpangan Baku	0,9364	1,4138
Kurtosis	4,4279	5,9357
Kemencengan	-0,1431	-0,3440
Stat. JB	392,11	1388,37



Gambar 4. Plot *return* harian dari indeks saham FTSE100 (atas) dan TOPIX (bawah).

Tabel 1 memperlihatkan bahwa nilai kemencengan untuk kedua *return* tidak terlalu mendekati nol, yang berarti bahwa distribusi *return* tidak benar-benar simetris. Sementara itu, nilai kurtosis untuk kedua *return* adalah lebih dari 3, yang berarti bahwa ekor distribusinya lebih tebal daripada daripada ekor distribusi Normal. Berdasarkan uji normalitas Jarquera–Bera (JB),

distribusi untuk kedua *return* adalah tidak Normal. Lebih lanjut, Gambar 4 menyajikan pergerakan nilai *return* harian untuk kedua indeks saham. Ini terlihat bahwa kedua *return* indeks saham adalah stasioner, yaitu berfluktuasi di sekitar rata-ratanya (yang mendekati nol). Konsekuensinya bahwa variansi dari *return* juga stasioner dan sesuai dengan asumsi model.

5.2 Fungsi Log-likelihood Model

Karena penghitungan log-likelihood lebih mudah daripada penghitungan likelihood dalam komputasi, maka bahasan di Bagian 2 dan 3 menyatakan persamaan fungsi log-likelihood dari model AR(1)-GARCH(1,1) berdistribusi Normal sebagai berikut:

$$\mathcal{L} = \ln f(\mathbf{R}|\phi, \omega, \alpha, \beta) = -\frac{T}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^T \ln(\sigma_t^2) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^T \frac{(R_t - \phi R_{t-1})^2}{\sigma_t^2} \quad (16)$$

Secara serupa, fungsi log-likelihood untuk model MA(1)-GARCH(1,1) dengan *return error* e_t berdistribusi Normal dengan rata-rata $\mu + \psi e_{t-1}$ dan variansi σ_t^2 dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\mathcal{L} = \ln f(\mathbf{R}|\mu, \psi, \omega, \alpha, \beta) = -\frac{T}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^T \ln(\sigma_t^2) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^T \frac{(R_t - \mu - \psi e_{t-1})^2}{\sigma_t^2} \quad (17)$$

Ketika e_t berdistribusi SN, model AR(1)-GARCH(1,1) mempunyai fungsi log-likelihood yang dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\mathcal{L} = \ln f(\mathbf{R}|\phi, \omega, \alpha, \beta, \lambda) = -\frac{T}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^T \ln(\sigma_t^2) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^T \frac{(R_t - \phi R_{t-1})^2}{\sigma_t^2} + \sum_{t=1}^T \ln \left(1 + \operatorname{Erf} \left(\frac{\lambda(R_t - \phi R_{t-1})}{\sqrt{2\sigma_t^2}} \right) \right). \quad (18)$$

Sementara itu, model MA(1)-GARCH(1,1) berdistribusi SN mempunyai fungsi log-likelihood sebagai berikut:

$$\mathcal{L} = \ln f(\mathbf{R}|\mu, \psi, \omega, \alpha, \beta, \lambda) = -\frac{T}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^T \ln(\sigma_t^2) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^T \frac{(R_t - \mu - \psi e_{t-1})^2}{\sigma_t^2} + \sum_{t=1}^T \ln \left(1 + \operatorname{Erf} \left(\frac{\lambda(R_t - \mu - \psi e_{t-1})}{\sqrt{2\sigma_t^2}} \right) \right). \quad (19)$$

Ketika e_t berdistribusi ESN, model AR(1)-GARCH(1,1) mempunyai fungsi log-likelihood sebagai berikut:

$$\mathcal{L} = \ln f(\mathbf{R}|\phi, \omega, \alpha, \beta, \varepsilon) = \begin{cases} -\frac{T}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^T \ln(\sigma_t^2) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^T \frac{\left(\frac{R_t - \phi R_{t-1}}{1+\varepsilon}\right)^2}{\sigma_t^2} & \text{untuk } (R_t - \phi R_{t-1}) < 0, \\ -\frac{T}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^T \ln(\sigma_t^2) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^T \frac{\left(\frac{R_t - \phi R_{t-1}}{1-\varepsilon}\right)^2}{\sigma_t^2} & \text{untuk } (R_t - \phi R_{t-1}) \geq 0. \end{cases} \quad (20)$$

Sementara itu, model MA(1)-GARCH(1,1) berdistribusi ESN mempunyai fungsi *log-likelihood* seperti berikut:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \ln f(\mathbf{R}|\phi, \omega, \alpha, \beta, \varepsilon) = \\ \begin{cases} -\frac{T}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^T \ln(\sigma_t^2) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^T \frac{\left(\frac{R_t - \mu - \psi\varepsilon_{t-1}}{1+\varepsilon}\right)^2}{\sigma_t^2} & \text{untuk } (R_t - \mu - \psi\varepsilon_{t-1}) < 0, \\ -\frac{T}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^T \ln(\sigma_t^2) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^T \frac{\left(\frac{R_t - \mu - \psi\varepsilon_{t-1}}{1-\varepsilon}\right)^2}{\sigma_t^2} & \text{untuk } (R_t - \mu - \psi\varepsilon_{t-1}) \geq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (21)$$

Untuk model AR(1)-GARCH(1,1) dengan e_t berdistribusi Student-*t*, maka fungsi *log-likelihood* untuk model dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \ln f(\mathbf{R}|\phi, \omega, \alpha, \beta, \nu) = T \ln \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) - T \ln \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \\ - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^T \left[\pi\sigma_t^2 \ln(\nu - 2) + (\nu + 1) \ln\left(1 + \frac{(R_t - \mu - \psi\varepsilon_{t-1})^2}{\sigma_t^2(\nu-2)}\right) \right]. \end{aligned} \quad (22)$$

Sementara itu, model MA(1)-GARCH(1,1) dengan e_t berdistribusi Student-*t* mempunyai fungsi *log-likelihood* yang dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = T \ln \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) - T \ln \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \\ - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^T \left[\pi\sigma_t^2 \ln(\nu - 2) + (\nu + 1) \ln\left(1 + \frac{(R_t - \mu - \psi\varepsilon_{t-1})^2}{\sigma_t^2(\nu-2)}\right) \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

5.3 Implementasi Metode Estimasi

Metode GRG Non-Linear di Solver Excel diaplikasikan dengan mengikuti langkah-langkah yang serupa dari [14]. Studi ini mengambil nilai awal untuk parameter-parameter model seperti berikut:

$$\phi = 0, \omega = 0,005, \alpha = 0,2, \beta = 0,7, \mu = 0, \psi = 0, \nu = 10, \lambda = 0, \varepsilon = 0.$$

Pada *spreadsheet* Excel, untuk setiap waktu yang berkorespondensi dengan data *return*, nilai-nilai variansi σ_t^2 dan *log-likelihood* \mathcal{L}_t dihitung berdasarkan rumus (16)–(23) sesuai dengan model yang diperhatikan. Dicatat bahwa Solver Excel tidak memiliki syarat kendala yang tegas untuk tanda lebih besar (“>”) atau lebih kecil (“<”) sehingga hasil estimasinya mungkin tidak memenuhi kendala. Sebagai contoh, kasus tersebut muncul di [2] dimana terdapat kendala yang dilanggar, yaitu $\alpha + \beta = 1$, yang seharusnya $\alpha + \beta < 1$.

Untuk melihat kemampuan Solver Excel dalam mengestimasi model, metode ARWM digunakan sebagai pembanding. Studi ini mengerjakan metode ARWM dalam algoritma MCMC dan diimplementasikan pada program Scilab dengan membuat kode pemrograman sendiri. MCMC dijalankan untuk 6000 iterasi yang mana 1000 iterasi pertama dibuang untuk menghilangkan ketidakstasioneran yang disebabkan oleh nilai awal parameter. Selanjutnya, nilai-nilai estimasi setiap parameter dari 5000 iterasi yang tersisa digunakan untuk menghitung nilai-nilai statistik.

Algoritma MCMC diimplementasikan pada program Scilab dengan membuat kode pemrograman sendiri. Nilai-nilai awal yang digunakan adalah sama dengan nilai yang digunakan di Solver Excel. Karena MCMC bekerja dalam kerangka Bayesian, maka ini dilengkapi dengan distribusi prior, yaitu parameter-parameter $\omega, \alpha, \beta, \theta, \mu, \psi, \lambda, \varepsilon$ berdistribusi $N(0,1000)$ seperti di [24] dan parameter ν berdistribusi $\text{exp}(0,01)$ seperti di [25].

5.4 Hasil Estimasi dari Metode GRG Non-Linear dan ARWM

Hasil estimasi parameter untuk model-model yang dipelajari dilaporkan dalam Tabel 2–3 untuk indeks saham FTSE 100 dan Tabel 4–5 untuk indeks saham TOPIX. Ini ditunjukkan bahwa estimasi dari Solver Excel tidak ada yang melanggar kendala seperti di [2]. Lebih lanjut, ini dicatat bahwa Solver Excel dan Scilab menghasilkan nilai-nilai estimasi yang saling dekat. Dari pengamatan tersebut, maka ini dapat dikatakan bahwa Solver Excel melalui metode GRG Non-Linear memiliki kemampuan yang handal dalam mengestimasi model meskipun fungsi tujuan atau *log-likelihood* mempunyai pernyataan yang rumit. Oleh karena itu, studi ini merekomendasikan Solver Excel untuk digunakan oleh praktisi keuangan yang tidak mempunyai kemampuan lebih dalam hal pemrograman komputer.

Tabel 2. Hasil estimasi untuk model-model berdistribusi Normal dan Student-*t* yang dicocokkan pada data saham FTSE100.

Parameter	Distribusi Normal			Distribusi Student- <i>t</i>		
	GARCH(1,1)	AR(1)- GARCH(1,1)	MA(1)- GARCH(1,1)	GARCH(1,1)	AR(1)- GARCH(1,1)	MA(1)- GARCH(1,1)
Solver Excel						
ω	0,0063	0,0062	0,0061	0,0053	0,0053	0,0053
α	0,0965	0,0971	0,0966	0,0914	0,0921	0,0916
β	0,8982	0,8977	0,8983	0,9047	0,9040	0,9045
ϕ		-0,0340			-0,0272	
μ			-0,0149			-0,0047
ψ			-0,0365			-0,0287
ν				9,4187	9,6528	9,5781
$\alpha + \beta$	0,9947	0,9949	0,9949	0,9961	0,9961	0,9960
Scilab						
ω	0,0064	0,0066	0,0068	0,0064	0,0060	0,0060
α	0,0975	0,0984	0,0991	0,0978	0,0940	0,0939
β	0,8970	0,8959	0,8946	0,8968	0,9007	0,9009
ϕ		-0,0332			-0,0267	
μ			-0,0149			-0,0050
ψ			-0,0363			-0,0285
ν				9,9081	10,0586	10,0772
$\alpha + \beta$	0,9945	0,9942	0,9909	0,9946	0,9947	0,9948

Tabel 3. Hasil estimasi untuk model-model berdistribusi SN dan ESN yang dicocokkan pada data saham FTSE100.

Parameter	Distribusi SN			Distribusi ESN		
	GARCH(1,1)	AR(1)- GARCH(1,1)	MA(1)- GARCH(1,1)	GARCH(1,1)	AR(1)- GARCH(1,1)	MA(1)- GARCH(1,1)
Solver Excel						
ω	0,0063	0,0062	0,0067	0,0060	0,0059	0,0056
α	0,0969	0,0975	0,0988	0,0971	0,0975	0,0976
β	0,8979	0,8975	0,8957	0,8974	0,8972	0,8952
ϕ		-0,0363			-0,0410	
μ			0,0719			0,0825
ψ			-0,0423			-0,0506
λ	-0,0639	-0,0651	-0,2045			
ϵ				0,0530	0,0539	0,1203
$\alpha + \beta$	0,9947	0,9949	0,9945	0,9945	0,9947	0,9928
Scilab						
ω	0,0068	0,0069	0,0073	0,0067	0,0063	0,0057
α	0,0982	0,1006	0,1003	0,1007	0,0982	0,0954
β	0,8955	0,8975	0,8934	0,8930	0,8959	0,8971
ϕ		-0,0363			-0,0406	
μ			-0,0712			0,0802
ψ			-0,0429			-0,0498
λ	-0,0644	-0,0647	-0,2029			
ϵ				0,0532	0,0542	0,1178
$\alpha + \beta$	0,9937	0,9936	0,9937	0,9937	0,9941	0,9925

Tabel 4. Hasil estimasi untuk model-model berdistribusi Normal dan Student-*t* yang dicocokkan pada data saham TOPIX.

Parameter	Distribusi Normal			Distribusi Student- <i>t</i>		
	GARCH(1,1)	AR(1)- GARCH(1,1)	MA(1)- GARCH(1,1)	GARCH(1,1)	AR(1)- GARCH(1,1)	MA(1)- GARCH(1,1)
Solver Excel						
ω	0,0451	0,0445	0,0444	0,0379	0,0377	0,0375
α	0,1092	0,1081	0,1099	0,0943	0,0946	0,0968
β	0,8696	0,8708	0,8693	0,8866	0,8864	0,8847
ϕ		0,0516			0,0449	
μ			0,3760			0,0459
ψ			0,0496			0,0428
v				11,5161	11,6723	11,5212
$\alpha + \beta$	0,9788	0,9790	0,9792	0,9810	0,9811	0,9815
Scilab						
ω	0,0472	0,0481	0,0469	0,0387	0,0396	0,0393
α	0,1099	0,1105	0,1124	0,0952	0,0960	0,0983
β	0,8680	0,8667	0,8693	0,8856	0,8844	0,8824
ϕ		0,0516			0,0453	
μ			0,0368			0,0461
ψ			0,0501			0,0440
v				12,1336	12,2100	12,1384
$\alpha + \beta$	0,9778	0,9772	0,9781	0,9808	0,9804	0,9807

Tabel 5. Hasil estimasi untuk model-model berdistribusi SN dan ESN yang dicocokkan pada data saham TOPIX.

Parameter	Distribusi SN			Distribusi ESN		
	GARCH(1,1)	AR(1)- GARCH(1,1)	MA(1)- GARCH(1,1)	GARCH(1,1)	AR(1)- GARCH(1,1)	MA(1)- GARCH(1,1)
Hasil Solver Excel						
ω	0,0452	0,0446	0,0506	0,0455	0,0443	0,0420
α	0,1093	0,1082	0,1171	0,1096	0,1088	0,1126
β	0,8694	0,8707	0,8624	0,8687	0,8700	0,8628
ϕ		0,0515			0,0277	
μ			0,3998			0,2696
ψ			0,0397			0,0311
λ	-0,0113	-0,0100	-0,4326			
ϵ				0,0304	0,0284	0,1424
$\alpha + \beta$	0,9787	0,9789	0,9795	0,9783	0,9788	0,9754
Hasil Scilab						
ω	0,0479	0,0480	0,0572	0,0506	0,0470	0,0446
α	0,1149	0,1113	0,1210	0,1161	0,1159	0,1168
β	0,8633	0,8661	0,8558	0,8602	0,8663	0,8576
ϕ		0,0518			0,0470	
μ			0,4120			0,2729
ψ			0,0398			0,0316
λ	-0,0106	-0,0102	-0,4523			
ϵ				0,0310	0,0274	0,1441
$\alpha + \beta$	0,9783	0,9774	0,9768	0,9763	0,9822	0,9744

Dicatat bahwa suatu kekurangan ketika menggunakan metode GRG Non-Linier di Solver Excel yaitu bahwa signifikansi dari estimasi parameter tidak bisa diketahui, artinya nilai estimasinya tidak dapat dikatakan berbeda atau nyata secara statistik. Sementara itu, metode ARWM yang dikerjakan dalam algoritma MCMC menghasilkan suatu rantai Markov sehingga lebih lanjut interval kepercayaan parameter bisa dihitung berdasarkan rantai tersebut.

Pertama kali, signifikansi parameter dari proses AR(1) dan MA(1) diperhatikan. Tabel 6 melaporkan 95% interval HPD untuk parameter-parameter ϕ , μ , dan ψ . Untuk kasus model AR(1)-GARCH(1,1), hasil menunjukkan bahwa 95% interval HPD untuk parameter ϕ tidak memuat nol ketika distribusinya SN dan Student- t pada data FTSE100 dan ketika distribusinya SN, ESN, dan Student- t pada data TOPIX. Hasil tersebut mengindikasikan signifikansi parameter ϕ pada AR(1) untuk proses *return*, yang berarti bahwa data menyediakan dukungan terhadap proses regresi untuk *return*. Untuk model MA(1)-GARCH(1,1), 95% interval HPD mengindikasikan signifikansi untuk parameter ψ (karena interval tidak memuat nol) untuk kasus distribusi SN pada data FTSE100 dan untuk semua kasus distribusi pada data TOPIX. Ini berarti bahwa penambahan MA di persamaan *return* memang diperlukan. Secara khusus, data TOPIX menyediakan dukungan sangat kuat terhadap proses MA(1) untuk persamaan *return*.

Tabel 6. Interval HPD pada tingkat signifikansi 5% untuk parameter-parameter regresi.

Data	Distribusi	AR(1)-GARCH(1,1)		MA(1)-GARCH(1,1)	
		ϕ	μ	ψ	
FTSE100	Normal	(-0,0591, 0,0261)	(-0,0495, 0,0002)	(-0,0660, 0,0240)	
	SN	(0,0004, 0,0330)	(0,0264, 0,1120)	(-0,0770, -0,0131)	
	ESN	(-0,0661, 0,0246)	(0,0250, 0,1023)	(-0,0756, 0,0092)	
	Student- <i>t</i>	(-0,0929, -0,0120)	(-0,0339, 0,0100)	(-0,0551, 0,0321)	
TOPIX	Normal	(-0,0115, 0,0798)	(-0,0279, 0,0679)	(0,0212, 0,1092)	
	SN	(0,0190, 0,1010)	(0,0144, 0,1100)	(0,0177, 0,0952)	
	ESN	(0,0229, 0,1174)	(0,2866, 0,5216)	(0,0050, 0,0724)	
	Student- <i>t</i>	(0,0190, 0,1205)	(0,2217, 0,3805)	(0,0044, 0,0954)	

Tabel 7. Interval HPD pada tingkat signifikansi 5% untuk parameter-parameter distribusi
SN dan ESN.

Distribusi	FTSE100		TOPIX	
	λ	ε	λ	ε
AR(1)-GARCH(1,1)				
SN	(-0,1330, -0,0328)		(-0,0439, 0,0805)	
ESN		(0,0237, 0,0682)		(0,0123, 0,0682)
MA(1)-GARCH(1,1)				
SN	(-0,2895, -0,1022)		(-0,5950, -0,3091)	
ESN		(0,0634, 0,1396)		(0,1189, 0,1987)

Berikutnya, signifikansi parameter dari distribusi SN dan ESN diperhatikan. Tabel 7 menyajikan 95% interval HPD untuk parameter λ dan ε . Hasil menunjukkan bahwa parameter λ tidak signifikan hanya untuk kasus distribusi SN pada model AR(1)-GARCH(1) yang mengadopsi data TOPIX. Sementara itu, parameter ε dari distribusi ESN signifikan untuk setiap kasus model dan data pengamatan. Oleh karena itu, ini dapat dikatakan bahwa data memberikan dukungan yang kuat terhadap spesifikasi distribusi SN dan ESN untuk *error* dari *return*.

5.5 Pemilihan Model

Selain signifikansi parameter, kebaikan suatu model bisa dilihat berdasarkan beberapa uji kecocokan model. Studi ini secara khusus menggunakan uji LRT (*Log-likelihood Ratio Test*) [26] dan nilai statistik AIC (*Akaike Information Criterion*) [27]. Uji LRT hanya bisa digunakan ketika dua model yang dibandingkan adalah bersarang, artinya bahwa model yang satu bisa diperoleh atau sebagai suatu kasus khusus dari model yang lain. Untuk model sederhana M_s yang merupakan kejadian khusus dari model alternatif M_a , nilai statistik LRT dapat dihitung sebagai berikut:

$$\text{LRT}(M_s, M_a) = 2(\mathcal{L}(M_a) - \mathcal{L}(M_s)). \quad (24)$$

Model M_a akan menyediakan pencocokan yang lebih baik daripada model M_s jika nilai LRT lebih besar daripada nilai kritis. Sesuai dengan kasus pada studi ini, nilai-nilai kritis untuk derajat kebebasan 1 (selisih banyaknya parameter antara dua model) dari Tabel Chi-Square yaitu 2,71 pada tingkat signifikansi 10%, 3,84 pada tingkat signifikansi 5%, dan 6,64 pada tingkat

signifikansi 1%. Sementara itu, nilai-nilai kritis untuk derajat kebebasan 2 yaitu 4,61 pada tingkat signifikansi 10%, 5,99 pada tingkat signifikansi 5%, dan 9,21 pada tingkat signifikansi 1%.

Tabel 8. Nilai-nilai statistik LRT

Data	Model	Distribusi			LRT	
		Normal (N)	SN	ESN	N vs SN	N vs ESN
Solver Excel						
FTSE100	(s): GARCH(1,1)	-5104,62	-5098,88	-5085,99	11,48	37,26
	(a ₁): AR(1)-GARCH(1,1)	-5095,97	-5090,03	-5076,78	11,88	38,38
	(a ₂): MA(1)-GARCH(1,1)	-5100,78	-5090,29	-5066,30	20,98	68,96
	LRT (s) vs (a ₁)	17,30	17,70	18,42		
	LRT (s) vs (a ₂)	7,68	17,18	39,38		
TOPIX	(s): GARCH(1,1)	-6040,86	-6040,71	-6035,76	0,30	10,19
	(a ₁): AR(1)-GARCH(1,1)	-6032,72	-6032,60	-6027,45	0,23	10,53
	(a ₂): MA(1)-GARCH(1,1)	-6034,78	-6013,32	-6000,36	42,92	68,83
	LRT (s) vs (a ₁)	16,28	16,22	16,62		
	LRT (s) vs (a ₂)	12,16	54,78	70,80		
Scilab						
FTSE100	(s): GARCH(1,1)	-5104,63	-5098,88	-5086,11	11,48	37,05
	(a ₁): AR(1)-GARCH(1,1)	-5096,00	-5090,14	-5076,83	11,73	38,36
	(a ₂): MA(1)-GARCH(1,1)	-5100,90	-5093,20	-5066,35	15,40	69,09
	LRT (s) vs (a ₁)	17,26	17,48	18,56		
	LRT (s) vs (a ₂)	7,46	11,36	39,52		
TOPIX	(s): GARCH(1,1)	-6040,89	-6040,84	-6035,98	0,09	9,82
	(a ₁): AR(1)-GARCH(1,1)	-6032,92	-6032,68	-6028,59	0,48	8,66
	(a ₂): MA(1)-GARCH(1,1)	-6034,82	-6016,35	-6000,45	36,94	68,75
	LRT (s) vs (a ₁)	15,94	16,32	14,78		
	LRT (s) vs (a ₂)	12,14	48,98	71,06		

Untuk Uji LRT, ini dibandingkan antara model GARCH(1,1) sebagai M_s dengan AR(1)-GARCH(1,1) atau MA(1)-GARCH(1,1) sebagai M_a pada setiap kasus distribusi dan hanya antara distribusi Normal sebagai M_s dengan SN atau ESN sebagai M_a . Tabel 8 menyajikan nilai-nilai statistik LRT dari perbandingan-perbandingan tersebut. Pertama kali ini diperhatikan bahwa nilai-nilai log-likelihood model yang dihasilkan oleh Solver dan Scilab adalah saling dekat. Selanjutnya, nilai-nilai statistik LRT mengindikasikan bahwa model AR(1)-GARCH(1,1) dan MA(1)-GARCH(1,1) menampilkan pencocokan yang lebih baik secara signifikan pada tingkat 1% daripada model GARCH(1,1) pada setiap kasus distribusi bertipe Normal dan setiap data pengamatan. Pengecualian hanya pada kasus MA(1)-GARCH(1,1) berdistribusi Normal pada data FTSE100 yang memberikan signifikansi kebaikan pada tingkat 5%. Hasil tersebut mendukung signifikansi parameter regresi yang sudah dibahas sebelumnya.

Selanjutnya, spesifikasi distribusi SN menyediakan pencocokan yang lebih daripada spesifikasi distribusi Normal pada tingkat 1% ketika diaplikasikan pada data FTSE100 untuk setiap kasus model tetapi hanya untuk model MA(1)-GARCH(1,1) ketika diaplikasikan pada data TOPIX. Sementara itu, spesifikasi distribusi ESN menyediakan pencocokan yang lebih daripada

spesifikasi distribusi Normal pada tingkat 1% untuk setiap kasus model dan data pengamatan. Hasil tersebut mengkonfirmasi signifikansi parameter λ dan ε pada hasil sebelumnya.

Karena Uji LRT terbatas pada dua model bersarang, maka selanjutnya AIC dapat digunakan untuk memilih model terbaik dari keseluruhan model yang diperhatikan, Nilai statistik AIC untuk suatu model dicari menggunakan rumus berikut:

$$AIC = 2k - 2\mathcal{L}, \quad (25)$$

dimana k menyatakan banyaknya parameter yang diestimasi dari model. Kriterianya yaitu bahwa model terbaik mempunyai nilai AIC terkecil.

Tabel 9 menyajikan nilai AIC untuk semua model dengan superskrip menyatakan peringkat kebaikan pada perbandingan distribusi. Pertama kali ini dilihat bahwa nilai-nilai AIC dari hasil Solver Excel dan Scilab adalah saling dekat dan memberikan peringkat kebaikan yang sama. Data FTSE100 menyediakan bukti keunggulan dari spesifikasi distribusi Student-*t*, yang diikuti oleh distribusi ESN, SN, dan Normal untuk setiap kasus model. Pada setiap kasus distribusi, model AR(1)-GARCH(1,1) dan MA(1)-GARCH(1,1) lebih baik daripada GARCH(1,1). Pengecualian pada kasus model MA(1)-GARCH(1,1) berdistribusi Student-*t* yang tidak lebih baik daripada model GARCH(1,1) berdistribusi Student-*t*, yang konsisten dengan ketidaksignifikanan dari parameter-parameter MA(1). Model terbaik untuk data FTSE100 yaitu model AR(1)-GARCH(1,1) berdistribusi Student-*t*.

Tabel 9. Nilai-nilai AIC

Model	Distribusi	Solver Excel		Scilab	
		FTSE100	TOPIX	FTSE100	TOPIX
GARCH(1,1)	Normal	10215,24 ⁴	12087,72 ³	10215,27 ⁴	12087,77 ³
	SN	10205,76 ³	12089,42 ⁴	10205,91 ³	12089,68 ⁴
	ESN	10179,98 ²	12079,53 ²	10180,21 ²	12079,95 ²
	Student- <i>t</i>	10131,34¹	12021,19¹	10132,05¹	12023,33¹
AR(1)-GARCH(1,1)	Normal	10199,94 ⁴	12073,43 ³	10200,01 ⁴	12073,83 ³
	SN	10190,06 ³	12075,20 ⁴	10190,28 ³	12075,35 ⁴
	ESN	10163,56 ²	12064,90 ²	10163,65 ²	12067,17 ²
	Student- <i>t</i>	10120,86¹	12010,00¹	10121,14¹	12010,15¹
MA(1)-GARCH(1,1)	Normal	10211,56 ⁴	12079,56 ⁴	10211,80 ⁴	12079,65 ⁴
	SN	10192,58 ³	12038,64 ³	10198,41 ³	12044,86 ³
	ESN	10144,60 ²	12012,73¹	10144,71 ²	12012,90¹
	Student- <i>t</i>	10131,80¹	12014,65 ²	10132,10¹	12014,82 ²

Untuk data TOPIX, spesifikasi distribusi Student-*t* adalah yang paling baik, diikuti oleh distribusi ESN, Normal, dan SN untuk kasus model GARCH(1,1) dan AR(1)-GARCH(1,1). Sementara itu, untuk kasus model MA(1)-GARCH(1,1), distribusi terbaik diberikan oleh ESN, diikuti oleh distribusi Student-*t*, SN, dan Normal. Setiap kasus distribusi menyediakan bukti bahwa

model AR(1)-GARCH(1,1) dan MA(1)-GARCH(1,1) lebih baik daripada GARCH(1,1). Secara keseluruhan, model AR(1)-GARCH(1,1) berdistribusi Student- t adalah yang paling cocok untuk data TOPIX.

6 Simpulan dan Perluasan

Studi ini membahas tentang dua perluasan dari model GARCH(1,1), yaitu AR(1)-GARCH(1,1) dan MA(1)-GARCH(1,1), dengan mengasumsikan bahwa distribusi untuk *error* dari *return* adalah Normal, Skew Normal, Epsilon Skew Normal, dan Student- t . Model-model tersebut diaplikasikan untuk *return* harian dari indeks saham FTSE100 dan TOPIX. Model diestimasi menggunakan metode GRG Non-Linier di Solver Excel dan metode ARWM dalam algoritma MCMC yang diimplementasikan di program Scilab. Hasil studi dapat diringkas sebagai berikut:

- (i) Solver Excel mempunyai kemampuan yang baik untuk mengestimasi parameter model. Ini diindikasikan oleh tidak adanya pelanggaran terhadap kendala dan juga nilainya dekat dengan yang diperoleh menggunakan metode ARWM di Scilab.
- (ii) Uji LRT atau AIC mengindikasikan bahwa distribusi ESN dan Student- t selalu lebih unggul daripada distribusi Normal dan SN. Pada setiap kasus distribusi, model dengan proses AR(1) dan MA(1) mengungguli model dasar dan secara keseluruhan, model AR(1)-GARCH(1,1) berdistribusi Student- t menyediakan pencocokkan terbaik terhadap kedua data pengamatan.

Lebih lanjut studi ini dapat diperluas dengan cara mengambil proses ARMA(1,1) untuk proses *return*.

7 Ucapan Terima Kasih

Studi ini merupakan bagian dari penelitian yang didanai oleh: (1) Kemenristek-BRIN Indonesia melalui skema PDUPT tahun anggaran 2020 (No Kontrak 001/LL6/PG/SP2H/AMD/PL.1/2020) dan (2) Universitas Kristen Satya Wacana melalui Dana Penelitian Wajib Internal tahun anggaran Januari–Juni 2020 (SK Rektor No 102/Pen./Rek./2/V/2020)

8 Daftar Pustaka

- [1] N. G. Emenogu, M. O. Adenomon, and N. O. Nweze, “On the volatility of daily stock returns of Total Nigeria Plc: evidence from GARCH models, value-at-risk and backtesting,” *Financ. Innov.*, vol. 6, p. 18, 2020.
- [2] D. B. Nugroho, B. Susanto, K. N. P. Prasetya, and R. Rorimpandey, “Modeling of returns

- volatility using GARCH(1,1) model under Tukey transformations,” *J. Akunt. dan Keuang.*, vol. 21, no. 1, pp. 12–20, 2019.
- [3] T. Bollerslev, “Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity,” *J. Econom.*, vol. 31, no. 3, pp. 307–327, 1986.
- [4] R. F. Engle, “Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation,” *Econometrica*, vol. 50, no. 4, pp. 987–1007, 1982.
- [5] E. Ferenstein and M. Gąsowski, “Modelling stock returns with AR-GARCH processes,” *Sort*, vol. 28, no. 1, pp. 55–68, 2004.
- [6] M. E. Hassan, H. Mwambi, and A. Babikir, “Volatility Parameters Estimation and Forecasting of GARCH(1,1) Models with Johnson’s SU Distributed Errors,” in *Time Series Analysis and Applications*, InTech, 2018.
- [7] T. Bollerslev, “A conditionally heteroskedastic time series model for speculative prices and rates of return,” *Rev. Econ. Stat.*, vol. 69, no. 3, pp. 542–547, 1987.
- [8] A. Azzalini, “A class of distributions which includes the normal ones,” *Scand. J. Stat.*, vol. 12, no. 2, pp. 171–178, 1985.
- [9] A. Azzalini, “Skew-normal distribution,” in *International encyclopedia of statistical science*, M. Lovric, Ed. Springer Berlin Heidelberg, 2011.
- [10] G. S. Mudholkar and A. D. Hutson, “The epsilon-skew-normal distribution for analyzing near-normal data,” *J. Stat. Plan. Inference*, vol. 83, no. 2, pp. 291–309, 2000.
- [11] F. C. Salim, D. B. Nugroho, and B. Susanto, “Model volatilitas GARCH(1,1) dengan error Student-t untuk kurs beli EUR dan JPY terhadap IDR,” *J. MIPA*, vol. 39, no. 1, pp. 63–69, 2016.
- [12] D. B. Nugroho and B. Susanto, “Volatility modeling for IDR exchange rate through APARCH model with student- *t* distribution,” *AIP Conf. Proc.*, vol. 1868, no. August, 2017, doi: 10.1063/1.4995120.
- [13] D. B. Nugroho, “Comparative analysis of three MCMC methods for estimating GARCH models,” in *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 2018, vol. 403, no. 1, p. 012061.
- [14] D. B. Nugroho, B. Susanto, and M. M. M. Rosely, “Penggunaan MS Excel untuk Estimasi Model GARCH(1,1),” *J. Mat. Integr.*, vol. 14, no. 2, pp. 71–83, 2018.
- [15] D. B. Nugroho, D. Kurniawati, L. P. Panjaitan, Z. Kholil, B. Susanto, and L. R. Sasongko, “Empirical performance of GARCH, GARCH-M, GJR-GARCH and log-GARCH models for returns volatility,” *J. Phys. Conf. Ser.*, vol. 1307, no. 1, p. 012003, 2019.
- [16] Student, “The probable error of a mean,” *Biometrika*, vol. 6, pp. 1–25, 1908.

- [17] L. A. Asimow and M. M. Maxwell, *Probability and statistics with applications: A problem solving text*. Connecticut: ACTEX Publication, Inc., 2010.
- [18] L. S. Lasdon, R. L. Fox, and M. W. Ratner, “Nonlinear optimization using the generalized reduced gradient method,” *Rech. Opérationnelle*, vol. 8, no. 3, pp. 73–103, 1974.
- [19] Y. F. Atchade and J. S. Rosenthal, “On adaptive Markov chain Monte Carlo algorithms,” *Bernoulli*, vol. 11, no. 5, pp. 815–828, 2005.
- [20] M.-H. Chen and Q.-M. Shao, “Monte Carlo estimation of Bayesian credible and HPD intervals,” *J. Comput. Graph. Stat.*, vol. 8, no. 1, pp. 69–92, 1999.
- [21] A. M. Raharjo and A. M. Haryanto, “Analisis pengaruh EVA, ROA, DER, volume perdagangan dan kapitalisasi pasar terhadap harga saham (Studi pada perusahaan umum yang terdaftar di BEI),” *Diponegoro J. Manag.*, vol. 4, no. 3, pp. 1–11, 2015.
- [22] F. Musbitul, *Kapitalisasi Pasar Indonesia*, 6th ed. Yogyakarta: BPFE, 2012.
- [23] TSE, “Tokyo Stock Exchange Index Guidebook,” 2012.
- [24] D. Ardia and L. F. Hoogerheide, “Bayesian estimation of the garch (1, 1) model with student-t innovations,” *R J.*, vol. 2, no. 2, pp. 41–47, 2010.
- [25] P. J. Deschamps, “A flexible prior distribution for Markov switching autoregressions with Student-t errors,” *J. Econom.*, vol. 133, no. 1, pp. 153–190, 2006.
- [26] Q. Wu and P. Vos, “Inference and Prediction,” in *Handbook of Statistics*, vol. 38, V. N. Gudivada and C. R. Rao, Eds. Amsterdam: North-Holland, pp. 111–172, 2018.
- [27] M. Snipes and D. C. Taylor, “Model selection and Akaike Information Criteria: An example from wine ratings and prices,” *Wine Econ. Policy*, vol. 3, no. 1, pp. 3–9, 2014.