

Kendali Optimal Penyebaran Penyakit Influenza H1N1 Tiga Strain dengan Vaksinasi dan Pengobatan

Adinda Rizki Kinanti¹, Nashrul Millah², Irma Fitria^{3*}

Program Studi Matematika, Institut Teknologi Kalimantan, Karang Joang KM 15, Indonesia.

e-mail: irma.fitria@lecturer.itk.ac.id

Diajukan: 15 April 2020, Diperbaiki: 17 Desember 2020, Diterima: 31 Maret 2021

Abstrak

Influenza H1N1 merupakan suatu penyakit infeksi saluran pernapasan dengan gejala umum yaitu demam, sakit kepala, batuk, dan nyeri tenggorokan. Influenza H1N1 memiliki beberapa strain yang diketahui pernah menginfeksi manusia, burung dan babi. Beberapa upaya yang dapat dilakukan untuk menanggulangi infeksi virus influenza H1N1 adalah pemberian vaksin dan pengobatan. Penelitian ini membahas mengenai kendali optimal berupa vaksinasi dan pengobatan yang diterapkan pada model penyebaran penyakit Influenza H1N1. Metode yang digunakan untuk menyelesaikan permasalahan kendali optimal ini adalah Prinsip Minimum Pontryagin dilanjutkan dengan pencarian solusi numerik menggunakan metode Runge-Kutta *Forward-Backward Sweep*. Simulasi numerik dilakukan untuk mengetahui perbandingan penyebaran penyakit Influenza H1N1 sebelum dan sesudah diberikan upaya kendali optimal. Berdasarkan hasil simulasi ditunjukkan bahwa pemberian kendali optimal berupa vaksinasi pada individu yang rentan dan pengobatan pada individu yang terinfeksi tiga strain dapat menurunkan jumlah individu yang terinfeksi penyakit Influenza H1N1.

Kata kunci : Influenza H1N1, Kontrol Optimal, Prinsip Minimum Pontryagin, Runge Kutta *Forward-Backward Sweep*.

Abstract

H1N1 influenza is a respiratory tract infection with common symptoms, namely fever, headache, coughing, and sore throat. H1N1 influenza has several strains known to infect humans, birds, and pigs. Some efforts to overcome the infection of the H1N1 influenza virus are vaccination and treatment. This Research discusses the optimal control in the form of vaccination and treatment applied to the model H1N1 Influenza disease spread. The method used to solve this optimal control problem is the Pontryagin Minimum Principle followed by searching numerical solutions using the Runge-Kutta Forward-Backward Sweep method. Numerical simulations were conducted to compare the spread of H1N1 Influenza before and after optimal control efforts were given. Based on the simulation result, it was shown that giving optimal control in the form of vaccination to susceptible individuals and treatment in individuals infected with three strains could reduce the number of individuals infected with H1N1 Influenza disease.

Keyword : *Influenza H1N1, Optimal Control, Pontryagin Minimum Principle, Runge-Kutta Forward-Backward Sweep.*

1 Pendahuluan

Influenza merupakan suatu penyakit infeksi saluran pernapasan dengan gejala umum yaitu demam, sakit kepala, batuk, nyeri tenggorokan, dan rasa tidak nyaman. Menurut Casagrandi dkk [1], virus yang menyebabkan epidemi flu dapat dibedakan dalam tiga tipe yaitu tipe A, B, dan C.

Virus tipe A secara epidemiologi sangat berpengaruh terhadap kehidupan manusia. Influenza tipe A dibagi dalam beberapa subtipe berdasarkan dua jenis protein pada permukaannya. Protein ini disebut sebagai Hemagglutinin (HA) dan Neuraminidase (NA). Terdapat delapan belas jenis subtipe HA dan sebelas subtipe NA, dan berbagai kombinasi dari kedua jenis protein ini. Diantara kombinasi tersebut hanya beberapa virus flu tipe A yang saat ini menyerang manusia, salah satunya yaitu H1N1 [2].

Virus Influenza subtipe H1N1 terdiri dari beberapa strain yang ditemukan dapat menyerang manusia, burung, dan babi. strain merupakan generasi baru dari virus yang berevolusi [3]. Penyakit akibat infeksi virus ini pertama kali ditemukan pada tahun 1918 di Spanyol. Saat itu sedang terjadi wabah penyakit influenza secara pandemik yang menelan korban sekitar 21 juta orang meninggal dunia [4]. Tahun 2009 di Meksiko, WHO mengumumkan bahwa terjadi penyebaran virus Influenza subtipe H1N1 yang dengan cepat menjadi pandemik [5].

Penelitian terkait penyakit Influenza H1N1 sebelumnya telah dikaji oleh Natalia, dkk [3] menggunakan model SVIR. Penelitian tersebut, melibatkan 2 strain virus H1N1 dengan variabel kendali yaitu vaksinasi pada individu yang rentan dan pengobatan pada individu yang terinfeksi masing-masing strain. Disamping itu, terdapat juga penelitian yang telah dilakukan oleh Baba dan Hincal [6] yang menganalisis model SVIR penyebaran penyakit Influenza tiga strain dengan melihat pengaruh vaksinasi dan kesadaran akan bahaya penyakit terhadap populasi individu yang terinfeksi 3 strain. Pengaruh vaksinasi dan kesadaran diberikan dalam bentuk parameter yang bernilai konstan. Selanjutnya, penelitian ini melanjutkan penelitian dari Baba dan Hincal [6] dengan merekonstruksi model dan menambahkan variabel kendali berupa pemberian vaksinasi pada populasi individu yang rentan dan pengobatan pada individu yang terinfeksi virus Influenza subtipe H1N1 tiga strain.

2 Metode Penelitian

Bagian ini membahas mengenai metode penelitian yang akan digunakan sebagai acuan teori dan penunjang dalam menyelesaikan permasalahan pada penelitian ini. Materi yang dibahas yaitu Prinsip Minimum Pontryagin, dan metode Runge-Kutta. Selanjutnya rekonstruksi model penyebaran penyakit Influenza subtipe H1N1 dengan kendali berupa vaksinasi pada individu yang rentan dan pengobatan pada individu yang terinfeksi tiga strain virus.

2.1 Prinsip Minimum Pontryagin

Kendali optimal bertujuan untuk menentukan sinyal kendali yang akan menyebabkan proses (keadaan) memenuhi beberapa kendala dan pada saat yang sama mengoptimalkan fungsi tujuan

atau fungsi biaya. Variabel kendali \mathbf{u} yang memenuhi kondisi optimal didefinisikan sebagai (\mathbf{u}^*) [7].

Pada umumnya, masalah kendali optimal dalam bentuk ungkapan matematik dapat diformulasikan seperti pada Persamaan (1) – (3), dengan mencari kendali $\mathbf{u}(t)$ yang mengoptimalkan fungsi tujuan.

$$\min J = S(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} V(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt. \quad (1)$$

Fungsi tujuan yang memiliki persamaan Mayer dan persamaan Lagrange disebut dengan persamaan Bolza [7] seperti pada Persamaan (1), dengan sistem dinamik yang dinyatakan oleh

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), \quad (2)$$

dan kondisi batas

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \text{ dan } \mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f. \quad (3)$$

Penyelesaian kendali optimal dapat dilakukan dengan menggunakan metode Prinsip Minimum Pontryagin atau disebut juga sebagai metode Hamiltonian. Tahap-tahap penyelesaian kendali optimal dengan metode Prinsip Minimum Pontryagin dijelaskan sebagai berikut.

1. Membentuk fungsi Pontryagin \mathcal{H} dengan persamaan,

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), t) = V(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \boldsymbol{\lambda}'(t) \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t). \quad (4)$$

2. Meminimumkan \mathcal{H} terhadap $\mathbf{u}(t)$ dengan persamaan,

$$\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{u}} \right) = 0 \quad (5)$$

dan diperoleh

$$\mathbf{u}^*(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}^*(t), \boldsymbol{\lambda}^*(t), t).$$

3. Substitusikan nilai $\mathbf{u}^*(t)$ ke Persamaan (4), sehingga diperoleh optimal \mathcal{H}^* sebagai berikut,

$$\mathcal{H}^*(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{h}(\mathbf{x}^*(t), \boldsymbol{\lambda}^*(t), t), \boldsymbol{\lambda}^*(t), t) = \mathcal{H}^*(\mathbf{x}^*(t), \boldsymbol{\lambda}^*(t), t).$$

4. Menentukan persamaan *state* dan *costate* dengan menyelesaikan persamaan,

- *State*

$$\dot{\mathbf{x}}^*(t) = + \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \right)_*, \quad (6)$$

- *Costate*

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}^*(t) = - \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{x}} \right)_*, \quad (7)$$

dengan kondisi awal \mathbf{x}_0 dan kondisi akhir

$$\left[\mathcal{H}^* + \frac{\partial S}{\partial t} \right]_{t_f} \delta t_f + \left[\left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} \right)^* - \boldsymbol{\lambda}^*(t) \right]_{t_f} \delta \mathbf{x}_f = 0. \quad (8)$$

Selanjutnya, untuk memperoleh kendali optimal $\mathbf{u}^*(t)$, substitusikan nilai $\mathbf{x}^*(t)$ dan $\boldsymbol{\lambda}^*(t)$ ke dalam bentuk kendali optimal $\mathbf{u}^*(t)$ [7].

2.2 Metode Runge Kutta *Forward-Backward Sweep*

Runge-Kutta digunakan dalam penyelesaian masalah yang berhubungan dengan perhitungan numerik. Menurut Burden dan Faires [8], metode Runge-Kutta yang umum digunakan pada Persamaan Differensial, yaitu Runge-Kutta Orde 4, dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan nilai awal. Jika diberikan permasalahan nilai awal

$$\dot{y} = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha,$$

maka dapat dicari penyelesaian dengan rumus berikut,

$$\begin{aligned} w_0 &= \alpha, \\ k_1 &= hf(t_i, w_i), \\ k_2 &= hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{1}{2}k_1\right), \\ k_3 &= hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{1}{2}k_2\right), \\ k_4 &= hf(t_{i+1}, w_i + k_3), \\ w_{i+1} &= w_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \end{aligned}$$

dengan $i = 0, 1, \dots, N - 1$ [9].

Menurut Lenhart dan Workman [10], jika dalam suatu sistem persamaan diferensial terdapat persamaan yang diketahui nilai awalnya dan persamaan lain yang diketahui nilai akhirnya, maka metode yang tepat untuk digunakan adalah metode *Forward-Backward Sweep* Runge Kutta Orde 4.

Langkah-langkah menyelesaikan masalah kendali optimal menggunakan metode *Forward-Backward Sweep* Runge Kutta Orde 4 sebagai berikut :

1. Menentukan nilai awal kendali optimal (\mathbf{u}).
2. Menggunakan kondisi awal $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ dan nilai awal \mathbf{u} untuk menyelesaikan persamaan *state* (\mathbf{x}) dengan langkah *Forward Sweep* Runge Kutta Orde 4.
3. Menggunakan kondisi transversal $\boldsymbol{\lambda}(t_f) = 0$ dan nilai \mathbf{u} dan \mathbf{x} untuk menyelesaikan persamaan *costate* ($\boldsymbol{\lambda}$) dengan langkah *Backward Sweep* Runge Kutta Orde 4.
4. Memperbarui nilai kendali \mathbf{u} dengan memasukkan nilai \mathbf{x} dan $\boldsymbol{\lambda}$ yang baru kedalam karakteristik kendali optimal.

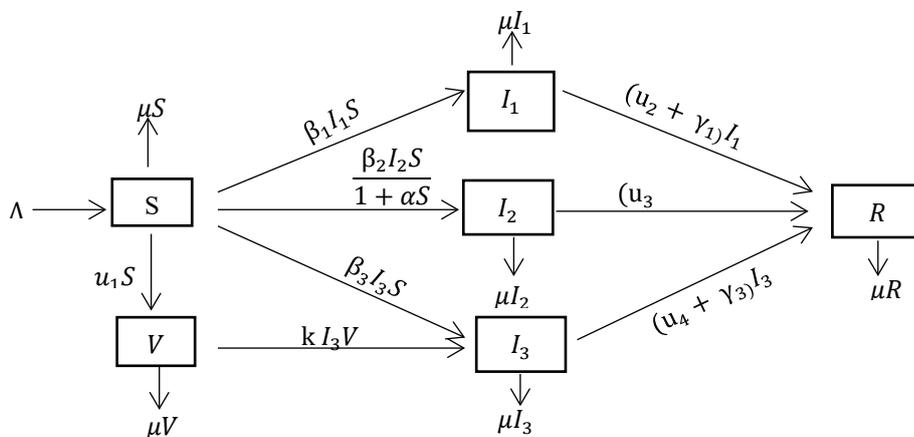
Jika nilai error dari setiap variabel dalam iterasi sesudah dan sebelumnya sangat kecil maka nilai tersebut menjadi solusi. Tetapi jika nilai errornya sangat kecil maka kembali pada langkah 2.

2.3 Model Matematika Penyakit Influenza H1N1 Tiga Strain

Model dinamik penyebaran penyakit Influenza subtype H1N1 berupa sistem yang melibatkan enam variabel atau kompartemen sebagai berikut:

1. *Susceptible* (S_t) : Individu yang rentan terhadap penyakit Influenza pada waktu t
2. *Vaccinated* (V_t) : Individu rentan yang divaksinasi terhadap virus strain 1 dan strain 2
3. *Infected strain 1* (I_{t_1}) : Individu yang terinfeksi penyakit Influenza strain 1 (strain virus yang menyerang manusia) pada waktu t
4. *Infected strain 2* (I_{t_2}) : Individu yang terinfeksi penyakit Influenza strain 2 (strain virus yang menyerang burung) pada waktu t
5. *Infected strain 3* (I_{t_3}) : Individu yang terinfeksi penyakit Influenza strain 3 (strain virus yang menyerang babi) pada waktu t
6. *Recovered* (R_t) : Individu yang telah sembuh dari penyakit Influenza,

dengan asumsi bahwa individu terinfeksi tidak menginfeksi individu lain serta individu yang sembuh tidak akan kembali rentan. Selanjutnya, model tanpa kontrol yang digunakan yaitu model pada Baba dan Hincal [6] telah dimodifikasi dengan menambahkan kontrol berupa perubahan parameter (r_1) yang konstan diubah menjadi variabel kontrol berupa (u_1), serta penambahan tiga variabel kontrol yaitu pemberian pengobatan pada populasi *Infected strain 1* (u_2), pemberian pengobatan pada populasi *Infected strain 2* (u_3), dan pemberian pengobatan pada populasi *Infected strain 3* (u_4). Model dengan kontrol dijelaskan pada diagram kompartemen Gambar 1.



Gambar 1. Model Dengan Kontrol

Berdasarkan pada Gambar 1 model sistem dinamik dapat ditulis model matematisnya sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dt} &= \Lambda - \beta_1 I_1 S - \frac{\beta_2 I_2 S}{1 + \alpha S} - \beta_3 I_3 S - \mu S - u_1 S, \\
 \frac{dV}{dt} &= u_1 S - k I_3 V_1 - \mu V, \\
 \frac{dI_1}{dt} &= \beta_1 I_1 S - \mu I_1 - \gamma_1 I_1 - u_2 I_1, \\
 \frac{dI_2}{dt} &= \frac{\beta_2 I_2 S}{1 + \alpha S} - \mu I_2 - \gamma_2 I_2 - u_3 I_2, \\
 \frac{dI_3}{dt} &= k I_3 V + \beta_3 I_3 S - \mu I_3 - \gamma_3 I_3 - u_4 I_3, \\
 \frac{dR}{dt} &= u_2 I_1 + \gamma_1 I_1 + u_3 I_2 + \gamma_2 I_2 + u_4 I_3 + \gamma_3 I_3 - \mu R,
 \end{aligned} \tag{9}$$

3 Hasil dan Analisis

Bagian ini berisi hasil dan analisis berupa formulasi permasalahan kendali optimal yang meliputi sistem dinamik, fungsi tujuan dan kondisi batas. Permasalahan kendali tersebut kemudian diselesaikan menggunakan Prinsip Minimum Pontryagin dan disimulasikan secara numerik menggunakan metode Runge Kutta Orde 4.

3.1 Penyelesaian Kendali Optimal

Fungsi objektif pada permasalahan kendali optimal ini adalah meminimumkan jumlah populasi individu yang terinfeksi virus H1N1 tiga strain dan meminimumkan biaya vaksinasi dan pengobatan untuk strain 1, strain 2, dan strain 3 seperti pada Persamaan (10):

$$\begin{aligned}
 \text{Min } J &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [C_1 I_1^2(t) + C_2 I_2^2(t) + C_3 I_3^2(t) + C_4 u_1^2(t) + C_5 u_2^2(t) + C_6 u_3^2(t) \\
 &\quad + C_7 u_4^2(t)] dt,
 \end{aligned} \tag{10}$$

dengan t_0 adalah waktu awal dan t_f adalah waktu akhir. Parameter C_1, C_2 , dan C_3 berturut-turut adalah parameter bobot variabel *Infected*, sedangkan C_4, C_5, C_6 , dan C_7 adalah parameter bobot untuk variabel kontrol.

State waktu awal pada penelitian ini telah ditentukan, sedangkan *state* waktu akhir tidak ditetapkan, sehingga tipe permasalahan dalam kondisi optimal ini yaitu *fixed-final time* (t_f) dan *free-final state* ($\mathbf{x}(t_f)$) dengan kondisi $0 \leq t \leq t_f$ dan diinisiasikan kondisi awal *state* $\mathbf{x}_0 = (S_0, V_{10}, I_{10}, I_{20}, I_{30}, R_0)$. Selanjutnya, fungsi objektif pada permasalahan penelitian ini tidak mengandung persamaan Meyer yang telah didefinisikan pada Persamaan (1) dengan kondisi

transversalitas, sehingga diperoleh nilai *costate* pada waktu akhir $\lambda_i^*(t_f) = 0$ untuk setiap $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Persamaan kendali optimal u berdasarkan pada Persamaan (5) dapat diperoleh sebagai berikut :

$$u_1^* = \frac{\lambda_1 S - \lambda_2 S}{C_4},$$

$$u_2^* = \frac{\lambda_3 I_1 - \lambda_6 I_1}{C_5},$$

$$u_3^* = \frac{\lambda_4 I_2 - \lambda_6 I_2}{C_6},$$

$$u_4^* = \frac{\lambda_5 I_3 - \lambda_6 I_3}{C_7},$$

dengan diberi batasan $0 \leq u_i \leq 1$, sehingga dapat dituliskan menjadi :

$$u_1^* = \min \left(1, \max \left(0, \frac{\lambda_1 S - \lambda_2 S}{C_4} \right) \right), \quad (11)$$

$$u_2^* = \min \left(1, \max \left(0, \frac{\lambda_3 I_1 - \lambda_6 I_1}{C_5} \right) \right), \quad (12)$$

$$u_3^* = \min \left(1, \max \left(0, \frac{\lambda_4 I_2 - \lambda_6 I_2}{C_6} \right) \right), \quad (13)$$

$$u_4^* = \min \left(1, \max \left(0, \frac{\lambda_5 I_3 - \lambda_6 I_3}{C_7} \right) \right). \quad (14)$$

Upaya dalam menentukan kendali optimal dengan Prinsip Minimum Pontryagin yaitu membentuk Persamaan *state* dan *costate* maka diperoleh :

- *State*

$$\begin{aligned} \dot{S} &= \Lambda - \beta_1 I_1 S - \frac{\beta_2 I_2 S}{1 + \alpha S} - \beta_3 I_3 S - \mu S - u_1^* S \\ \dot{V} &= u_1^* S - k I_3 V - \mu V \\ \dot{I}_1 &= \beta_1 I_1 S - \mu I_1 - \gamma_1 I_1 - u_2^* I_1 \\ \dot{I}_2 &= \frac{\beta_2 I_2 S}{1 + \alpha S} - \mu I_2 - \gamma_2 I_2 - u_3^* I_2 \\ \dot{I}_3 &= k I_3 V + \beta_3 I_3 S - \mu I_3 - \gamma_3 I_3 - u_4^* I_3 \\ \dot{R} &= u_2^* I_1 + \gamma_1 I_1 + u_3^* I_2 + \gamma_2 I_2 + u_4^* I_3 + \gamma_3 I_3 - \mu R. \end{aligned} \quad (15)$$

• *Costate*

$$\begin{aligned}
 \dot{\lambda}_1 &= -\lambda_1\beta_1I_1 + \frac{\beta_2I_2\lambda_1}{(1+\alpha S)^2} + \beta_3I_3\lambda_1 + \mu\lambda_1 + u_1^*\lambda_1 - u_1^*\lambda_2 - \lambda_3\beta_1I_1 \\
 &\quad - \frac{\lambda_4\beta_2I_2}{(1+\alpha S)^2} - \lambda_5\beta_3I_3 \\
 \dot{\lambda}_2 &= \lambda_2kI_3 + \lambda_2\mu - \lambda_5kI_3 \\
 \dot{\lambda}_3 &= -C_1I_1 + \lambda_1\beta_1S - \lambda_3\beta_1S + \mu\lambda_3 + \lambda_3\gamma_1 + u_2^*\lambda_3 - u_2^*\lambda_6 - \gamma_1\lambda_6 \\
 \dot{\lambda}_4 &= -C_2I_2 + \frac{\lambda_1\beta_2S}{(1+\alpha S)^2} - \frac{\lambda_4\beta_2S}{(1+\alpha S)^2} + \lambda_4\mu + \gamma_2\lambda_4 + u_3^*\lambda_4 \\
 &\quad - u_3^*\lambda_6 - \gamma_2\lambda_6 \\
 \dot{\lambda}_5 &= -C_3I_3 + \lambda_1\beta_3S + \lambda_2kV - \lambda_5kV - \lambda_5\beta_3S + \lambda_5\mu + \lambda_5\gamma_3 \\
 &\quad + u_4^*\lambda_5 - u_4^*\lambda_6 - \gamma_3\lambda_6 \\
 \dot{\lambda}_6 &= \lambda_6\mu.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Sistem Persamaan Differensial pada Persamaan (16) diselesaikan berdasarkan kondisi transversalitas yang telah didefinisikan sebelumnya sehingga :

$$\lambda_i(t_f) = 0 \text{ dengan } i = 1,2,3,4,5,6. \tag{17}$$

Persamaan Differensial pada Persamaan (15) dan (16) dengan syarat batas diselesaikan menggunakan metode Runge Kutta Orde-4 *Forward-Backward Sweep* yang mengacu pada Subbab 2.2, yaitu sebagai berikut :

1. Menentukan nilai awal untuk u_1, u_2, u_3 , dan u_4 sama dengan nol.
2. Menggunakan nilai *state* awal dan nilai awal u_1, u_2, u_3 , dan u_4 untuk menyelesaikan *state* (x). Variabel *state* $x = (S, V, I_1, I_2, I_3, R)$ diselesaikan menggunakan metode *Forward Sweep* dengan nilai awal $S(t_0) = S_0, V(t_0) = V_0, I_1(t_0) = I_{10}, I_2(t_0) = I_{20}, I_3(t_0) = I_{30}, R(t_0) = R_0$. Nilai *state* awal sudah ditentukan diawal, sehingga dapat diperoleh nilai *state* baru yaitu $(S(i+1), V(i+1), I_1(i+1), I_2(i+1), I_3(i+1), R(i+1))$
3. Menggunakan nilai akhir *costate*, nilai awal u_1, u_2, u_3 , dan u_4 serta nilai *state* baru pada yang dapat dilihat pada langkah 2 untuk menyelesaikan *costate* (λ). Variabel *costate* diselesaikan dengan metode *Backward sweep* dengan nilai akhir $\lambda_1(t_f) = \lambda_2(t_f) = \lambda_3(t_f) = \lambda_4(t_f) = \lambda_5(t_f) = \lambda_6(t_f) = 0$. Maka dapat dihitung nilai $\lambda_1(k-1), \lambda_2(k-1), \lambda_3(k-1), \lambda_4(k-1), \lambda_5(k-1), \lambda_6(k-1)$ dengan nilai $k = N + 2 - i$ dan N merupakan banyaknya langkah.
4. Memperbarui nilai kendali u_1, u_2, u_3 , dan u_4 menggunakan *state* dan *costate* yang baru,

$$u_1^* = \min\left(1, \text{maks}\left(0, \frac{\lambda_1 S - \lambda_2 S}{c_4}\right)\right),$$

$$u_2^* = \min \left(1, \max \left(0, \frac{\lambda_3 I_1 - \lambda_6 I_1}{C_5} \right) \right),$$

$$u_3^* = \min \left(1, \max \left(0, \frac{\lambda_4 I_2 - \lambda_6 I_2}{C_6} \right) \right),$$

$$u_4^* = \min \left(1, \max \left(0, \frac{\lambda_5 I_3 - \lambda_6 I_3}{C_7} \right) \right).$$

5. Jika nilai variabel iterasi saat ini dan iterasi sebelumnya sangat kecil maka nilai tersebut menjadi solusi. Tetapi jika tidak maka kembali pada langkah 2.

3.2 Simulasi

Bagian ini membahas tentang perbandingan jumlah individu pada masing-masing subpopulasi dengan dan tanpa kendali optimal. Parameter yang digunakan untuk simulasi ditunjukkan pada Tabel 1.

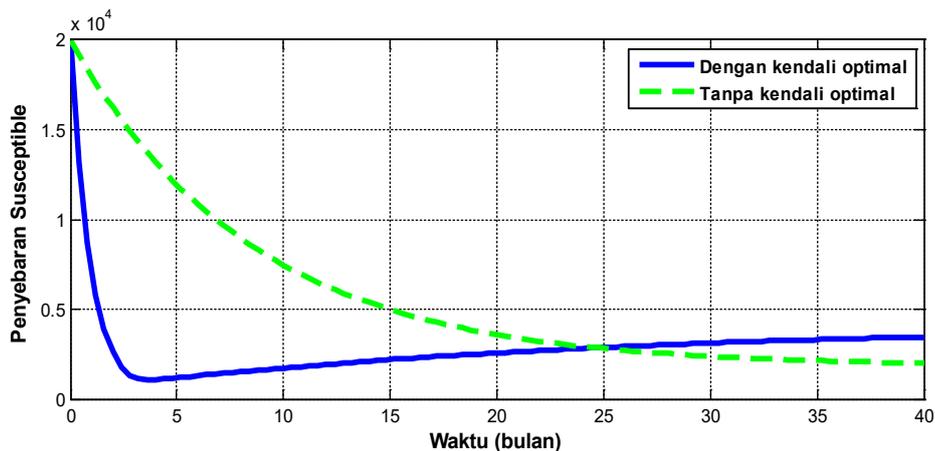
Tabel 1. Nilai Parameter Model Penyebaran Penyakit

| Parameter | Nilai Parameter | Parameter | Nilai Parameter |
|------------|--------------------|-----------|-----------------|
| Λ | 200 | r_1 | 0,60 |
| μ | 0.02 | α | 0,7 |
| k | 1×10^{-4} | C_1 | 0,51 |
| β_1 | 5×10^{-5} | C_2 | 0,41 |
| β_2 | 3×10^{-5} | C_3 | 0,31 |
| β_3 | 2×10^{-5} | C_4 | 0,85 |
| γ_1 | 8×10^{-2} | C_5 | 0,95 |
| γ_2 | 9×10^{-2} | C_6 | 0,95 |
| γ_3 | 0,1 | C_7 | 0,95 |
| t_f | 40 Bulan | | |

Nilai awal *State* yang telah ditetapkan pada tiap masing-masing subpopulasi sebagai berikut : $S(0) = 20000, V_1(0) = 500, I_1(0) = 400, I_2(0) = 300, I_3(0) = 400, R(0) = 100$.

a. Perubahan Jumlah Individu Subpopulasi *Susceptible*

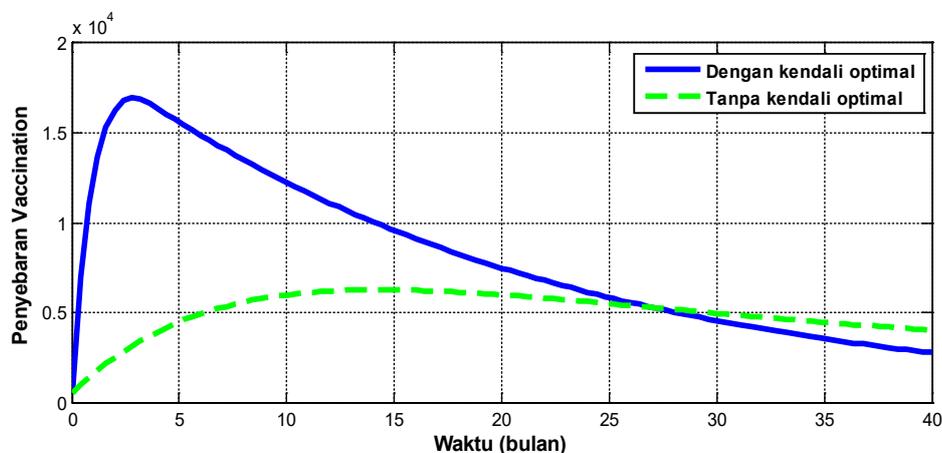
Gambar 2 menunjukkan bahwa dengan pemberian kontrol jumlah populasi *Susceptible* menurun hingga 1.100 individu pada bulan ke-3, lalu kembali meningkat hingga mencapai 3.463 individu diwaktu akhir. Hal ini disebabkan dengan adanya tingkat kelahiran individu, sedangkan tanpa pemberian kontrol jumlah populasi *Susceptible* terus menurun secara bertahap hingga 1997 individu. Hal ini menunjukkan pengaruh kontrol vaksinasi yang mengakibatkan perpindahan populasi dari *Susceptible* ke *Vaccinated* dalam jumlah besar pada lima bulan pertama. Tanpa kendali optimal, populasi *Susceptible* terus menurun karena adanya infeksi dari 3 strain virus Influenza H1N1.



Gambar 2. Perubahan Jumlah Individu *Susceptible* (Tanpa dan dengan Kendali Optimal).

b. Perubahan Jumlah Subpopulasi *Vaccinated*

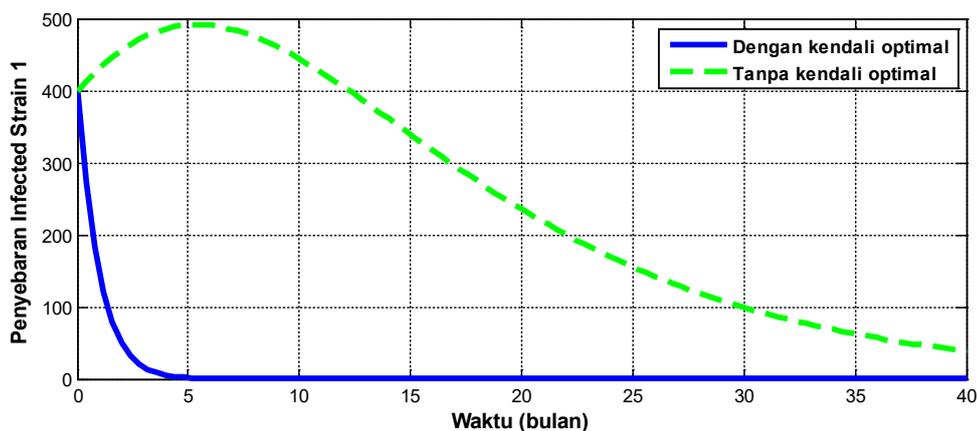
Gambar 3 menunjukkan bahwa dengan pemberian kontrol, jumlah populasi individu *Vaccinated* bertambah drastis hingga mencapai angka tertinggi 16.985 individu pada bulan ke-3. Berbeda dengan tanpa kendali optimal, jumlah populasi *Vaccinated* diwaktu akhir relatif kecil yaitu paling banyak 40.14 individu.



Gambar 3. Perubahan Jumlah Individu *Vaccinated* (Tanpa dan dengan Kendali Optimal).

c. Perubahan Jumlah Subpopulasi *Infected* Strain 1

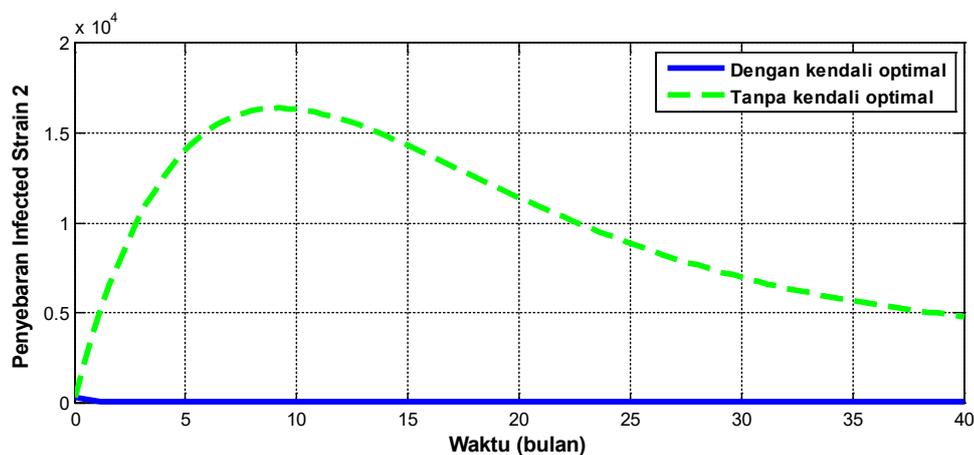
Jumlah subpopulasi pada individu *Infected* strain 1 pada waktu awal diasumsikan sebanyak 400. Gambar 4 menunjukkan bahwa tanpa pemberian kontrol jumlah populasi individu *Infected* strain 1 naik hingga mencapai 491 individu pada bulan ke-5. Individu yang terinfeksi strain 1 harus segera mendapatkan penanganan agar dapat mencegah penyebaran pada individu lain. Sedangkan dengan pemberian kontrol jumlah populasi individu *Infected* strain 1 menurun secara drastis hingga mencapai 1 individu diwaktu akhir.



Gambar 4. Perubahan Jumlah Individu *Infected* strain I (Tanpa dan dengan Kendali Optimal).

d. Perubahan Jumlah Subpopulasi *Infected* strain 2

Diasumsikan jumlah individu pada waktu awal sebanyak 500 individu. Dilihat pada Gambar 5 tanpa kendali optimal, jumlah individu *Infected* strain 2 dapat diketahui bahwa pada bulan ke-9 menunjukkan kenaikan sebesar 16380. Kemudian perlahan memasuki bulan ke-10 grafik *infected* mengalami penurunan cukup hingga pada waktu akhir mencapai 4787 individu. Sedangkan ketika diberikan kendali optimal, jumlah individu subpopulasi *Infected* strain 2 terus berkurang hingga 0 individu. Hal ini menunjukkan bahwa dengan adanya pemberian kendali optimal berupa pengobatan, individu subpopulasi *Infected* strain 2 dapat berkurang seiring berjalannya waktu.

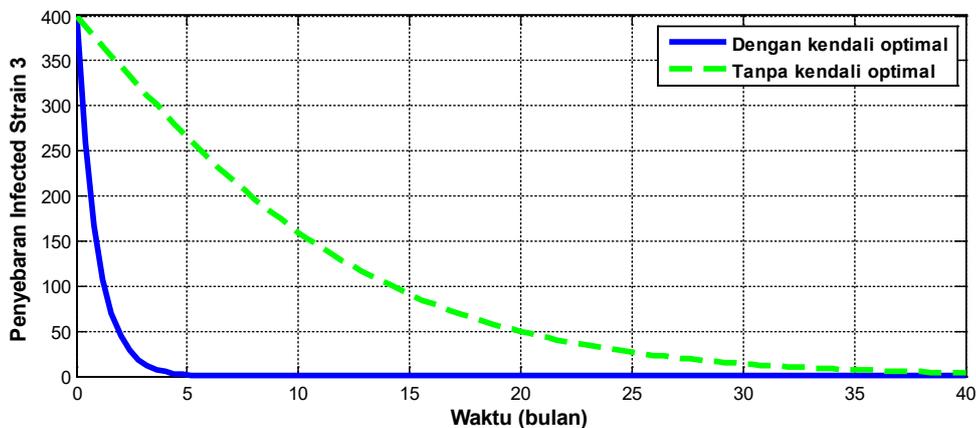


Gambar 5. Perubahan Jumlah Individu *Infected* strain 2 (Tanpa dan dengan Kendali Optimal).

e. Perubahan Jumlah Subpopulasi *Infected* strain 3

Diasumsikan bahwa jumlah individu pada waktu awal yaitu sebanyak 400 individu. Ketika tanpa diberi kendali optimal, jumlah *Infected* strain 3 pada waktu akhir yaitu sebanyak 4 individu. Penurunan ini diakibatkan seiring berkurangnya populasi yang rentan sebanding dengan tingkat kematian alami oleh karena itu grafik mengalami penurunan yang signifikan terhadap waktu.

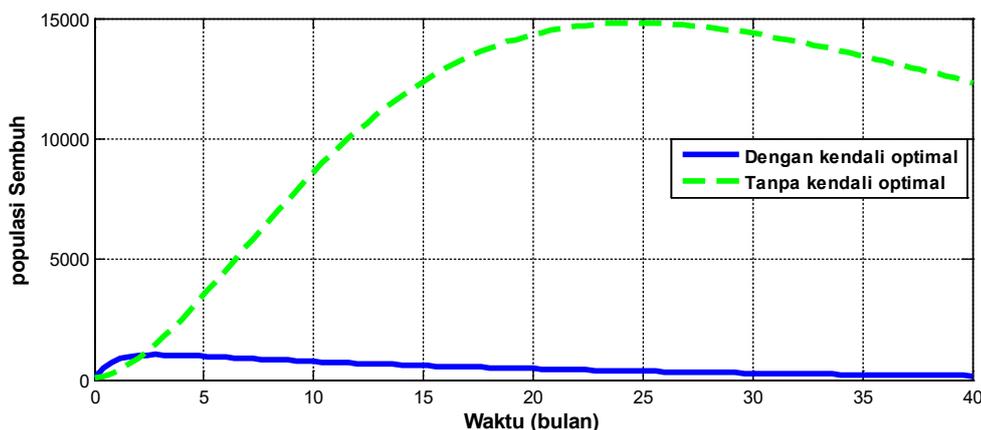
Sedangkan ketika diberi kontrol berupa pengobatan, jumlah individu *Infected* strain 3 pada waktu akhir yaitu sebanyak 0 individu yang ditunjukkan pada Gambar 6. Pemberian kendali optimal merupakan solusi untuk mencegah dan mengurangi jumlah populasi yang terinfeksi strain 3.



Gambar 6. Perubahan Jumlah Individu *Infected* strain 3 (Tanpa dan dengan Kendali Optimal).

f. Perubahan Jumlah Subpopulasi *Recovered*

Diasumsikan bahwa jumlah individu *Recovered* pada waktu awal yaitu sebanyak 100 individu. Dengan kendali optimal, penyebaran penyakit Influenza strain 1, strain 2, dan strain 3 dapat ditekan sehingga jumlahnya senantiasa menurun seperti pada Gambar 7. Kondisi ini berpengaruh pula pada jumlah individu *Recovered* dimana jumlahnya tidak lebih dari 171 individu. Berbeda halnya dengan saat tanpa kontrol optimal dimana jumlah subpopulasi *Recovered* meningkat seiring waktu hingga mencapai 12.335 individu.

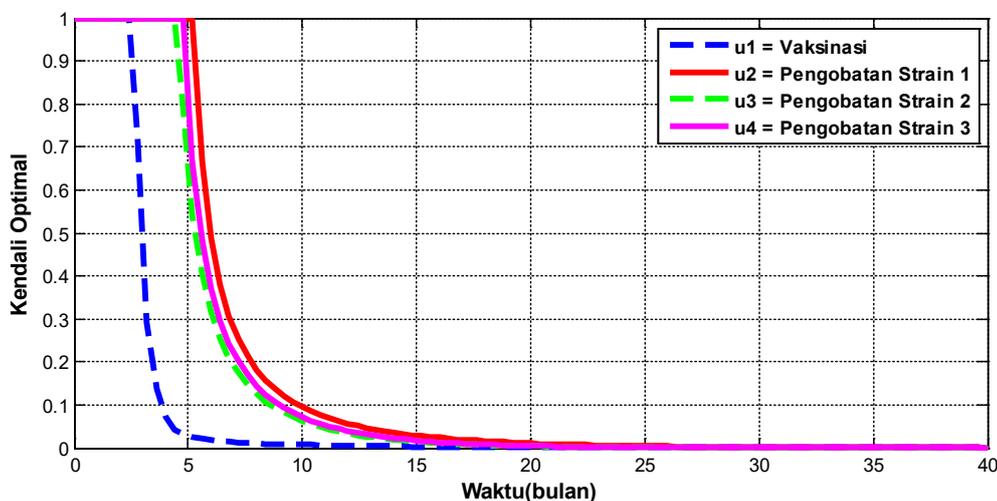


Gambar 7. Perubahan Jumlah Individu *Recovered* (Tanpa dan dengan Kendali Optimal).

Hal ini dikarenakan populasi individu yang sembuh bergantung pada jumlah populasi yang terinfeksi tiga strain.

g. Kontrol Optimal

Selanjutnya, dilakukan interpretasi kendali optimal berupa vaksinasi pada individu yang rentan dan pengobatan pada individu yang terinfeksi tiga strain.



Gambar 8. Tingkat Pemberian Kendali Optimal

Dilihat pada Gambar 8 keempat kendali menunjukkan perilaku yang relatif sama. Diawal keempat kontrol mencapai nilai maksimal yaitu 1, lalu turun secara bertahap menuju nilai 0. Hasil ini menunjukkan bahwa upaya pemberian vaksinasi pada individu rentan dan pengobatan pada individu yang terinfeksi influenza harus dilakukan secara optimal di awal. Usaha tersebut nantinya dapat dikurangi secara bertahap jika kondisi sudah membaik.

4 Simpulan

Rekonstruksi model penyebaran penyakit influenza H1N1 tiga strain dengan pemberian kontrol optimal pada individu yang rentan terhadap penyakit influenza H1N1 dan pengobatan pada individu yang terinfeksi influenza H1N1 tiga strain dapat diselesaikan menggunakan metode Prinsip Minimum Pontryagin, dimana pemberian kontrol optimal dapat meminimumkan jumlah individu yang terinfeksi Influenza H1N1 tiga strain secara optimal. Dengan demikian pemberian kendali harus dilakukan untuk mengurangi jumlah individu yang terinfeksi penyakit Influenza H1N1 sekaligus sebagai upaya pencegahan sebelum penyakit tersebut semakin mewabah.

5 Daftar Pustaka

- [1] R. Casagrandi, L. Bolzoni, S. A. Levin, and V. Andreasen, "The SIRC Model and Influenza A," *Math. Biosci.*, vol. 200, no. 2, pp. 152–169, 2006.

- [2] World Health Organization, “Managing Epidemics - Key Facts about Major Deadly Diseases,” 2018. <https://www.who.int/emergencies/diseases/managing-epidemics/en/>.
- [3] D. Natalia, T. Bakhtiar, and J. Jaharuddin, “Model Pengendalian Influenza H1N1 Dua Strain dengan Vaksinasi dan Pengobatan,” *J. Math. Its Appl.*, vol. 17, pp. 1–16, 2018.
- [4] T. Syafriati, “Mengenal Penyakit Influenza Babi,” *Lokakarya Nas. Penyakit Zoonosis Bogor*, 2014.
- [5] World Health Organization, “CDC Protocol of Realtime RTPCR for Influenza A (H1N1),” 2009. <https://www.who.int/csr/resources/publications/swineflu/realtimeptpcr/en/>.
- [6] I. A. Baba and E. Hincal, “A Model for Influenza with Vaccination and Awareness,” *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 106, pp. 49–55, 2018.
- [7] D. S. Naidu, *Optimal Control System*. Pocatello, Idaho, USA: CRC Press, 2003.
- [8] R. L. Burden and J. D. Faires, *Numerical Analysis*, Ninth Edit. Richard Stratton, 2010.
- [9] Supriyanto, “Runge-Kutta Orde Empat,” *Dep. Fis. Univ. Indones.*, 2006.
- [10] S. Lenhart and J. T. Workman, *Optimal Control Applied to Biological Models*. Chapman & Hall/CRC, Taylor & Francis Group, 2007.