Limits: Journal of Mathematics and Its Applications
E-ISSN: 2579-8936
P-ISSN: 1829-605X
Vol. 19, No. 2, Nopember 2022, 135-143
DOI: http://dx.doi.org/10.12962/limits.v19i2.7583

Dualisasi Radikal Prima Gabungan pada (R, S)-Modul

Dian Ariesta Yuwaningsih [1] *, Aan Hendroanto [2]
[1,2]Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Ahmad Dahlan
Bantul, Daerah Istimewa Yogyakarta, Indonesia
e-mail: [1*]dian.ariesta@pmat.uad.ac.id

Diajukan: 21 Agustus 2020, Diperbaiki: 31 Desember 2021, Diterima: 8 September 2022

Abstrak

Pada teori modul, definisi submodul prima telah mengalami dualisasi menjadi submodul kedua. Begitu halnya dengan definisi radikal prima, juga telah mengalami dualisasi menjadi radikal kedua. Struktur modul sendiri telah mengalami perumuman menjadi struktur (R, S)-modul, dengan R dan S masing-masing merupakan ring sebarang. Salah satu definisi keprimaan di dalam (R, S)-modul adalah (R, S)-submodul prima gabungan. Irisan dari semua (R, S)-submodul prima gabungan di M membentuk radikal prima gabungan. Di sisi lain, suatu (R, S)-submodul prima gabungan telah mengalami dualisasi menjadi (R, S)-submodul kedua gabungan. Suatu (R, S)-submodul tak nol N di M disebut (R, S)--submodul kedua gabungan jika untuk setiap elemen α di R, homoteti (R, S)-modul $N \overset{\alpha}{\to} N$ merupakan epimorfisma atau homomorfisma nol. Pada penelitian ini, didefinisikan dualiasasi dari radikal prima gabungan pada (R, S)-modul, yang selanjutnya disebut radikal kedua gabungan pada (R, S)-modul. Lebih lanjut, didefinisikan himpunan sistem-*m** pada (R, S)-modul dan disajikan beberapa sifat-sifatnya. Pada bagian akhir artikel ini ditunjukkan bahwa terdapat hubungan antara himpunan sistem-*m** dengan radikal kedua gabungan pada (R, S)-modul.

Kata Kunci: (R, S)-modul, radikal kedua, submodul kedua gabungan, radikal prima

Abstract

In module theory, the definition of prime submodule has been dualized to be second submodules. Likewise with the definition of prime radical, it has also been dualized to become a second radical. The module structure itself has undergone a generalization into an (R, S)-module structure, where R and S are arbitrary rings. One of the definitions of primeness in the (R, S)-module is jointly priume (R, S)-submodules. The intersection of all jointly prime (R, S)-submodule of M form the jointly prime radical. On the other hand, a jointly prime (R, S)-submodule has dualized to be a jointly second (R, S)-submodule. A non-zero (R, S)-submodule N of M is called jointly second (R, S)-submodule if for each element α of R, the (R, S)-module homoteti $N \overset{\alpha}{\to} N$ is an epimorphism or zero homomorphism. In this research, we define the dualization of jointly prime radical of (R, S)-module, that is called jointly second radical of (R, S)-module. Furthermore, we define the set of m-systems in (R, S)-modules and present some of their properties. At the end of this article, we show that there is a relationship between the set of m*-systems and the jointly second radical of (R, S)-modules.*

Keywords: *(R, S)-module, second radical, jointly second submodule, prime radical*

1 Pendahuluan

Ring yang digunakan dalam keseluruhan tulisan ini adalah ring komutatif, kecuali dinyatakan selain itu. Pada teori modul, suatu submodul sejati P di R-modul M disebut submodul prima jika untuk setiap elemen $m \in M$ dan elemen $r \in R$ dengan $rm \in P$ maka berakibat $m \in M$ atau $rM \subseteq P$. Konsep terkait submodul (modul) prima beserta sifat-sifatnya pada sebarang ring pertama kali diperkenalkan oleh [1]. Seiring berjalannya waktu, para peneliti telah mendualisasi definisi submodul prima menjadi submodul kedua. Dualisasi ini diperkenalkan oleh [2] dengan menggunakan dualisasi pada pemetaan homoteti yang terkait dengan modul tersebut. Suatu submodul tak nol N di dalam R-modul M disebut submodul kedua jika untuk setiap elemen $a \in R$, homoteti $N \xrightarrow{\alpha} N$ merupakan epimorfisma atau homomorfisma nol. Selanjutnya beberapa peneliti telah mengembangkan konsep terkait submodul kedua, diantaranya dalam [3], [4], [5], dan [6].

Di sisi lain, telah diketahui bahwa irisan dari submodul prima belum tentu membentuk submodul prima. Oleh karena itu, pada teori modul muncul definisi radikal prima. Konsep radikal prima suatu modul diperkenalkan oleh [7]. Apabila R-modul M memiliki submodul prima maka radikal prima dari M adalah irisan semua submodul prima di M dan radikal prima dari M sama dengan M sendiri apabila M tidak memiliki submodul prima. Lebih lanjut, dalam [7] disajikan definisi himpunan sistem-m sebagai komplemen dari submodul prima serta disajikan pula hubungan antara radikal prima dan himpunan sistem-m. Lebih lanjut, beberapa peneliti telah mendualiasasi radikal prima pada R-modul menjadi radikal kedua pada R-modul. Menurut [8], radikal kedua pada R-modul M adalah hasil jumlahan semua submodul kedua di M. Apabila M tidak memiliki submodul kedua, maka radikal kedua dari M didefinisikan nol.

Seiring perkembangan ilmu pengetahuan, struktur R-modul sendiri telah mengalami perumuman menjadi (R,S)-modul. Konsep terkait (R,S)-modul ini diperkenalkan oleh [9]. Di dalam [9] didefinikan keprimaan di dalam (R,S)-modul yaitu (R,S)-submodul prima gabungan. Diberikan sebarang ring R dan S serta (R,S)-modul M. Suatu (R,S)-submodul sejati P di M disebut (R,S)-submodul prima gabungan jika untuk setiap ideal kiri I di R, ideal kanan J di S, dan (R,S)-submodul N di M dengan $INJ \subseteq P$ maka berakibat $IMJ \subseteq P$ atau $N \subseteq P$. Ketika ring R dan S merupakan ring komutatif, maka suatu (R,S)-submodul sejati P di M disebut (R,S)-submodul prima gabungan jika untuk setiap ideal I di R, ideal J di S, dan (R,S)-submodul N di M dengan $INJ \subseteq P$ maka berakibat $IMJ \subseteq P$ atau $N \subseteq P$.

Di samping itu, definisi radikal prima pada R-modul telah diperumum di dalam (R,S)-modul. Pada [10] telah didefinisikan radikal prima gabungan pada (R,S)-modul, himpunan sistem-m pada (R,S)-modul beserta sifat-sifatnya. Menurut [10], jika M memiliki (R,S)-submodul prima gabungan, maka didefinisikan radikal prima gabungan dari M adalah irisan dari semua (R,S)-

submodul prima gabungan di M. Namun, jika M tidak memiliki (R, S)-submodul prima gabungan, maka didefinisikan radikal prima gabungan dari M adalah M itu sendiri.

Dengan merujuk definisi homomorfisma (R, S)-modul pada [11], penulis telah mendualisasi definisi submodul prima gabungan pada (R, S)-modul menjadi submodul kedua gabungan pada (R, S)-modul. Suatu (R, S)-submodul tak nol N di M disebut (R, S)-submodul kedua gabungan jika untuk setiap elemen $a \in R$, homoteti (R, S)-modul $N \xrightarrow{\alpha} N$ merupakan epimorfisma atau homomorfisma nol. Sifat-sifat terkait (R, S)-submodul kedua gabungan juga telah diteliti dalam [12] dengan memperumum sifat-sifat submodul kedua pada R-modul. Penelitian terkait dualisasi dari radikal prima gabungan pada (R, S)-modul belum pernah dilakukan. Oleh karena itu, dalam penelitian ini akan dikonstruksi pendefinisian radikal kedua gabungan sebagai dualisasi dari radikal prima kedua gabungan pada (R, S)-modul. Selanjutnya, dikonstruksi pendefinisian himpunan sistem-m* pada (R, S)-modul sebagai komplemen dari (R, S)-submodul kedua gabungan serta akan disajikan sifat-sifat sistem-m* pada (R, S)-modul serta hubungannya dengan radikal kedua gabungan pada (R, S)-modul.

2 Metode Penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian kualitatif yang melakukan tinjauan literatur komprehensif tentang pendefinisian bentuk dual dari radikal prima gabungan pada (R, S)-modul dan sifat-sifatnya. Tahapan pertama yang dilakukan dalam penelitian ini adalah mengkonstruksi pendefinisian radikal kedua gabungan sebagai dualisasi dari radikal prima gabungan pada (R, S)-modul. Proses pendefinisian radikal kedua gabungan ini berdasarkan pada proses pendefinisian radikal kedua pada suatu modul. Konsep lebih lanjut terkait radikal kedua pada suatu modul telah disajikan pada [8].

Pada teori modul, telah dikenal konsep sistem-*m* sebagai komplemen dari submodul prima. Konsep terkait sistem-*m* pada suatu modul dijelaskan secara mendetail pada [7]. Selanjutnya, [8] telah mendualisasi konsep sistem-*m* pada modul menjadi sistem-*m**. Sistem-*m** suatu modul ini merupakan komplemen dari submodul kedua. Tahapan selanjutnya dalam penelitian ini adalah mengkonstruksikan pendefinisian sistem-*m** pada (R, S)-modul sebagai bentuk dual dari sistem-*m* yang telah didefinisikan pada [10]. Selanjutnya, tahapan terakhir dari penelitian in adalah menyelidiki sifat-sifat sistem-*m** pada suatu (R, S)-modul, serta menentukan hubungan antara sistem-*m** dengan radikal kedua gabungan pada (R, S)-modul.

3 Hasil dan Pembahasan

Pada bagian ini akan disajikan hasil dari penelitian ini, meliputi pengkonstruksian radikal kedua gabungan pada (R,S)-modul, pengkonstruksian sistem-m* pada (R,S)-modul, serta sifat-sifat sistem-m* dan hubungan antara sistem-m* dengan radikal kedua gabungan pada (R,S)-modul.

3.1. Radikal Kedua Gabungan pada (R,S)-Modul

Sebelum mendefinisikan radikal kedua gabungan pada (R,S)-modul, berikut disajikan definisi dari (R,S)-submodul kedua gabungan menurut [12].

Definisi 1. *Suatu (R,S)-submodul tak nol N di M disebut (R,S)-submodul kedua gabungan jika untuk setiap elemen $\alpha \in R$, homoteti (R,S)-modul $N \xrightarrow{\alpha} N$ merupakan epimorfisma atau homomorfisma nol.*

Berdasarkan definisi di atas, suatu (R,S)-modul M merupakan (R,S)-modul kedua gabungan apabila M merupakan (R,S)-submodul kedua gabungan atas dirinya sendiri. Merujuk pada [12], apabila diberikan (R,S)-modul M dengan sifat $S^2 = S$ dan (R,S)-submodul N di M dengan $N \neq 0$, maka N merupakan (R,S)-submodul kedua gabungan jika dan hanya jika untuk setiap ideal A di R memenuhi $ANS = 0$ atau $ANS = N$. Sifat ini nantinya akan digunakan dalam mengidentifikasi suatu (R,S)-submodul merupakan (R,S)-submodul kedua gabungan atau bukan, dengan syarat cukup ring S memenuhi sifat $S^2 = S$.

Telah diketahui dalam [8] bahwa radikal kedua pada R-modul M merupakan jumlahan semua submodul kedua di M atau nol. Dengan merujuk pada definisi ini, berikut disajikan definisi radikal kedua gabungan pada (R,S)-modul.

Definisi 2. *Radikal kedua gabungan dari (R,S)-modul M adalah jumlahan semua (R,S)-submodul kedua gabungan di M, dinotasikan dengan $Sec_{(R,S)}(M)$. Jika M tidak memiliki (R,S)-submodul kedua gabungan maka radikal kedua gabungan dari M adalah $Sec_{(R,S)}(M) \coloneqq 0$.*

Berikut disajikan beberapa contoh radikal kedua gabungan pada (R,S)-modul.

Contoh 3. Diberikan $\mathbb{Z}_{12}$ sebagai $(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$-modul. Diketahui bahwa semua $(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$-submodul di $\mathbb{Z}_{12}$ adalah $\{\bar{0}\}$, $\{\bar{0},\bar{6}\}$, $\{\bar{0},\bar{4},\bar{8}\}$, $\{\bar{0},\bar{3},\bar{6},\bar{9}\}$, $\{\bar{0},\bar{2},\bar{4},\bar{6},\bar{8},\overline{10}\}$, dan $\mathbb{Z}_{12}$. Dapat ditunjukkan bahwa $(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$-submodul kedua gabungan di $\mathbb{Z}_{12}$ hanyalah $\{\bar{0},\bar{6}\}$ dan $\{\bar{0},\bar{4},\bar{8}\}$. Dengan demikian, radikal kedua gabungan dari $\mathbb{Z}_{12}$ adalah $Sec_{(\mathbb{Z},\mathbb{Z})}(\mathbb{Z}_{12}) = \{\bar{0},\bar{6}\} + \{\bar{0},\bar{4},\bar{8}\} = \{\bar{0},\bar{2},\bar{4},\bar{6},\bar{8},\overline{10}\}$.

Contoh 4. Diberikan $\mathbb{Z}_6$ sebagai $(\mathbb{Z}_6,\mathbb{Z})$-modul. Diketahui bahwa semua $(\mathbb{Z}_6,\mathbb{Z})$-submodul di $\mathbb{Z}_6$ adalah $\{\bar{0}\}$, $\{\bar{0},\bar{3}\}$, $\{\bar{0},\bar{2},\bar{4}\}$, dan $\mathbb{Z}_6$. Dapat ditunjukkan bahwa $(\mathbb{Z}_6,\mathbb{Z})$-submodul kedua gabungan di $\mathbb{Z}_6$ hanyalah $\{\bar{0},\bar{3}\}$ dan $\{\bar{0},\bar{2},\bar{4}\}$. Dengan demikian, radikal kedua gabungan dari $\mathbb{Z}_6$ adalah $Sec_{(\mathbb{Z}_6,\mathbb{Z})}(\mathbb{Z}_6) = \{\bar{0},\bar{3}\} + \{\bar{0},\bar{2},\bar{4}\} = \mathbb{Z}_6$.

3.2. Himpunan Sistem-$m*$ pada (R,S)-Modul

Diberikan (R,S)-modul M. Menurut [10], himpunan tak kosong $X \subseteq M \setminus \{0\}$ disebut sistem-*m* apabila untuk setiap ideal I di R, ideal J di S, dan (R,S)-submodul K dan L di M dengan $(K+L) \cap X \neq \emptyset$ dan $(K+IMJ) \cap X \neq \emptyset$ maka berakibat $(K+ILJ) \cap X \neq \emptyset$. Dengan merujuk pada [8], berikut disajikan definisi dari himpunan sistem-*m** pada (R,S)-modul sebagai bentuk dual dari himpunan sistem-*m* dalam [10].

Definisi 5. *Diberikan* (R,S)*-modul* M*. Himpunan tak kosong* $X \subseteq M \setminus \{0\}$ *disebut sistem-m* apabila untuk setiap ideal* A *di* R *dan* (R,S)*-submodul* K*,* L *di* M *dengan* $(0:_{K\cap L} A) \cup X \neq M$ *dan* $A(K\cap L)S \cup X \neq M$ *maka berakibat* $(K\cap L) \cup X \neq M$*.*

Pada [10] telah ditunjukkan bahwa himpunan sistem-*m* pada (R,S)-modul merupakan komplemen dari suatu (R,S)-submodul prima gabungan. Pada proposisi berikut ini disajikan bahwa himpunan sistem-*m** pada (R,S)-modul ternyata juga merupakan komplemen dari suatu (R,S)-submodul kedua gabungan.

Proposisi 6. *Diberikan* (R,S)*-modul* M *dengan* $S^2 = S$ *dan* (R,S)*-submodul* Q *di* M*.* Q *merupakan* (R,S)*-submodul kedua gabungan jika dan hanya jika* $M \setminus Q$ *merupakan sistem-m*.*

Bukti. $(\Rightarrow)$. Diketahui Q merupakan (R,S)-submodul kedua gabungan di M dan $X = M \setminus Q$. Jelas $Q \neq 0$ sehingga $X \neq M \setminus \{0\}$. Ambil sebarang ideal A di R dan (R,S)-submodul K, L di M dengan $(0:_{K\cap L} A) \cup X \neq M$ dan $A(K\cap L)S \cup X \neq M$. Andaikan $(K\cap L) \cup X = M$, maka diperoleh $Q \subseteq K \cap L$. Karena Q merupakan (R,S)-submodul kedua gabungan maka $AQS = 0$ atau $AQS = Q$. Jika $AQS = 0$ maka $Q \subseteq (0:_{K\cap L} A)$ sehingga diperoleh $(0:_{K\cap L} A) \cup X = M$. Kontradiksi. Jika $AQS = Q$ maka diperoleh $AQS \subseteq A(K\cap L)S$ sehingga $Q \subseteq A(K\cap L)S$. Dengan demikian diperoleh $A(K\cap L)S \cup X = M$. Kontradiksi. Jadi, pengandaian salah dan harus diingkar. Jadi, $(K\cap L) \cup X \neq M$. Dengan demikian, terbukti bahwa X merupakan sistem-*m** di M.

$(\Leftarrow)$. Diketahui $X = M \setminus Q$ merupakan sistem-*m** di M. Karena $X \neq M \setminus \{0\}$ maka jelas bahwa $Q \neq 0$. Diambil sebarang ideal A di R sedemikian sehingga $AQS \neq 0$ dan $AQS \neq Q$. Ambil $K = Q$ dan $L = Q$ pada definisi sistem-*m**, maka diperoleh $(0:_{K\cap L} A) \cup X = \left(0:_Q A\right) \cup X \neq M$ dan $A(K\cap L)S \cup X = AQS \cup X \neq M$. Diperoleh $(K\cap L) \cup X = Q \cup X = M$. Kontradiksi dengan X sistem-*m**. Jadi, haruslah $AQS = 0$ atau $AQS = Q$. Dengan demikian, merujuk pada [12] terbukti bahwa Q merupakan (R,S)-submodul kedua gabungan di M. ■

Berikut disajikan beberapa contoh dari sistem-m* pada suatu (R,S)-modul.

Contoh 7. Diberikan $\mathbb{Z}_6$ sebagai $(\mathbb{Z}_6,\mathbb{Z})$-modul dan $(\mathbb{Z}_6,\mathbb{Z})$-submodul kedua gabungan $H=\{\bar{0},\bar{2},\bar{4}\}$ di $\mathbb{Z}_6$. Merujuk pada Proposisi 6, diperoleh bahwa himpunan $\mathbb{Z}_6 \setminus H=\{\bar{1},\bar{3},\bar{5}\}$ merupakan sistem-m* di $(\mathbb{Z}_6,\mathbb{Z})$-modul $\mathbb{Z}_6$.

Contoh 8. Diberikan $\mathbb{Z}_{12}$ sebagai $(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$-modul dan $(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$-submodul kedua gabungan $P=\{\bar{0},\bar{4},\bar{8}\}$ di $\mathbb{Z}_{12}$. Merujuk pada Proposisi 6, diperoleh bahwa himpunan $\mathbb{Z}_{12} \setminus P=\{\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{5},\bar{6},\bar{7},\bar{9},\overline{10},\overline{11}\}$ merupakan sistem-m* di $(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$-modul $\mathbb{Z}_{12}$.

Selanjutnya, berikut disajikan beberapa sifat terkait sistem-m* pada suatu (R,S)-modul.

Proposisi 9. *Diberikan (R,S)-modul M dengan $S^2=S$. Jika $X \subset M \setminus \{0\}$ merupakan himpunan sistem-m* dan Q merupakan (R,S)-submodul di M minimal dengan sifat $Q \cup X = M$, maka Q merupakan (R,S)-submodul kedua gabungan di M.*

Bukti. Diambil sebarang ideal A di R sedemikian sehingga $AQS \neq 0$ dan $AQS \neq Q$. Berdasarkan minimalitas Q diperoleh $\big(Q \cap (0:_M A)\big) \cup X \neq M$ dan $A(Q \cap M)S \cup X \neq M$. Karena X merupakan sistem-m* maka diperoleh $(Q \cap M) \cup X = Q \cup X \neq M$. Kontradiksi dengan $Q \cup X = M$. Dengan demikian, pengandaian salah dan harus diingkar. Jadi diperoleh $AQS=0$ atau $AQS=Q$. Jadi, terbukti bahwa Q merupakan (R,S)-submodul kedua gabungan di M. ■

Dengan menggunakan definisi radikal kedua gabungan pada (R,S)-modul, berikut disajikan akibat dari Proposisi 9.

Akibat 10. *Diberikan (R,S)-modul M dengan $S^2=S$. Jika diberikan (R,S)-submodul N di M maka*

$$Sec_{(R,S)}(N)=0$$

atau

$$Sec_{(R,S)}(N)=\sum\{(R,S)-submodul\ Q\ di\ N \mid (\exists sistem-m^*\ X)Q\ minimal\ dg\ Q\cup X=M\}.$$

Bukti. Jika N tidak memuat (R,S)-submodul kedua gabungan maka $Sec_{(R,S)}(N)=0$. Jika N memuat (R,S)-submodul kedua gabungan. Andaikan

$$Sec_{(R,S)}(N)\neq\sum\{(R,S)-submodul\ Q\ di\ N \mid (\exists sistem-m^*\ X)Q\ minimal\ dg\ Q\cup X=M\}.$$

Berarti $Sec_{(R,S)}(N)$ bukan merupakan jumlahan dari (R,S)-submodul kedua gabungan di N. Kontradiksi, sehingga pengandaian salah dan harus diingkar. Jadi, terbukti bahwa $Sec_{(R,S)}(N)=\sum\{(R,S)-submodul\ Q\ di\ N \mid (\exists sistem-m^*\ X)Q\ minimal\ dg\ Q\cup X=M\}$. ■

Menurut [10], untuk setiap (R,S)-submodul N di M, jika tedapat (R,S)-submodul prima gabungan di N maka didefinisikan himpunan $\sqrt[(R,S)]{N} \coloneqq \{a\in M \mid (\forall sistem-m\ X)a\in X \Rightarrow X\cap N\neq\emptyset\}$. Namun, jika tidak terdapat tedapat (R,S)-submodul prima gabungan di N maka didefinisikan $\sqrt[(R,S)]{N} := M$. Selanjutnya, berikut diberikan definisi himpunan $\sqrt[s^{(R,S)}]{N}$ sebagai bentuk dual dari himpunan $\sqrt[(R,S)]{N}$.

Definisi 11. *Diberikan (R,S)-modul M dengan $S^2 = S$. Untuk setiap (R,S)-submodul N di M, jika terdapat (R,S)-submodul kedua gabungan di N, maka didefinisikan*

$$\sqrt[s^{(R,S)}]{N} := \{x \in N \mid (\exists sistem - m^* \ X) x \notin X \ dan \ N \cup X = M\}.$$

Jika tidak terdapat (R,S)-submodul kedua gabungan di N, maka didefinisikan $\sqrt[s^{(R,S)}]{N} := 0$.

Selanjutnya, berikut diberikan suatu torema tentang hubungan antara sistem-m* dengan radikal kedua gabungan pada (R,S)-modul.

Teorema 12. *Diberikan (R,S)-modul M dengan $S^2 = S$ serta (R,S)-submodul N di M. Jika terdapat (R,S)-submodul kedua gabungan di N, maka* $\sqrt[s^{(R,S)}]{N} = Sec_{(R,S)}(N)$.

Bukti. Misalkan diketahui $\sqrt[s^{(R,S)}]{N} \neq 0$. Ambil sebarang $x \in \sqrt[s^{(R,S)}]{N}$, maka terdapat sistem-$m$* X sedemikian sehingga $x \notin X$ dan $N \cup X = M$. Dibentuk himpunan $\psi = \{Q \subseteq N \mid Q \cup N = M\}$. Jelas bahwa $\psi \neq \emptyset$ karena $N \in \psi$. ψ merupakan himpunan terurut parsial dengan relasi urutan parsial berbentuk relasi inklusi. Dengan menggunakan Lemma Zorn, akan dibuktikan ψ memiliki elemen minimal. Hal ini ekuivalen dengan menunjukkan bahwa setiap rantai tak kosong di ψ memiliki batas bawah di ψ. Diambil sebarang rantai tak kosong $\aleph$ di ψ dengan $\aleph = \{Q_i\}_{i \in \Lambda}$. Selanjutnya, dibentuk himpunan $C = \bigcap_{i \in \Lambda} Q_i$, maka jelas bahwa $C \subseteq N$ sehingga $C \in \psi$ dan C merupakan batas bawah untuk $\aleph$. Jadi, terbukti bahwa setiap rantai tak kosong di ψ memiliki batas bawah di ψ. Oleh karena itu, berdasarkan Lemma Zorn terdapat elemen minimal Q terhadap relasi inklusi. Berdasarkan Proposisi 9. maka diperoleh Q merupakan (R,S)-submodul kedua gabungan di N dan diperoleh $x \in Q$. Jadi, terbukti bahwa $\sqrt[s^{(R,S)}]{N} \subseteq Sec_{(R,S)}(N)$. Selanjutnya, diambil (R,S)-submodul kedua gabungan Q di N. Berdasarkan Proposisi 6. maka $X = M \setminus Q$ merupakan sistem-m*, $N \cup X = M$, dan $x \notin X$ untuk setiap $x \in Q$. Jadi, diperoleh $x \in \sqrt[s^{(R,S)}]{N}$ sehingga terbukti bahwa $Sec_{(R,S)}(N) \subseteq \sqrt[s^{(R,S)}]{N}$. Jadi terbukti bahwa $\sqrt[s^{(R,S)}]{N} = Sec_{(R,S)}(N)$. ■

4 Simpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan di atas diperoleh bahwa radikal kedua gabungan pada (R,S)-modul didefinisikan sebagai nol atau jumlahan semua (R,S)-submodul kedua gabungan di M, dinotasikan dengan $Sec_{(R,S)}(M)$. Selain itu, didefinisikan sistem-m* sebagai himpunan tak kosong $X \subseteq M \setminus \{0\}$ yang memenuhi untuk setiap ideal A di R dan (R,S)-submodul K dan L di M dengan $(0:_{K \cap L} A) \cup X \neq M$ dan $A(K \cap L)S \cup X \neq M$ berakibat $(K \cap L) \cup X \neq M$. Telah ditunjukkan bahwa sistem-*m** merupakan komplemen dari (R,S)-submodul kedua gabungan. Lebih lanjut, jika diberikan (R,S)-submodul N di M maka didefinisikan $\sqrt[s^{(R,S)}]{N} := 0$ atau $\sqrt[s^{(R,S)}]{N}$ merupakan himpunan $x \in X$ dimana terdapat sistem-m^* X sedemikian sehingga $x \notin X$ dan $N \cup X = M$. Terakhir, diperoleh hubungan antara sistem-m^* dengan radikal kedua gabungan pada (R,S)-modul yang menyatakan bahwa jika terdapat (R,S)-submodul kedua gabungan di N, maka himpunan $\sqrt[s^{(R,S)}]{N}$ sama dengan radikal kedua gabungan pada (R,S)-modul.

5 Ucapan Terima Kasih

Penelitian ini merupakan salah satu luaran dari hibah Penelitian Dasar Universitas Ahmad Dahlan. Penulis mengucapkan terima kasih kepada para reviewer atas saran dan komentar demi perbaikan artikel ini.

6 Daftar Pustaka

[1] J. Dauns, “Prime Modules,” *J. fur die reine und Angew. Math.*, vol. 298, pp. 156–181, 1978.

[2] S. Yasssemi, “Archivum Mathematicum Terms of use :,” *Arch. Math.*, vol. 43, no. 4, pp. 273–278, 2007, doi: 10.5817/AM2013-2-105.

[3] S. Çeken, M. Alkan, and P. F. Smith, “Second Modules Over Noncommutative Rings,” *Commun. Algebr.*, vol. 41, no. 1, pp. 83–98, 2013, doi: 10.1080/00927872.2011.623026.

[4] I. E. Wijayanti and D. A. Yuwaningsih, “On Weakly Second Submodules over Noncommutative Rings ∗,” *Southeast Asian Bull. Math.*, vol. 42, pp. 781–790, 2018.

[5] I. E. Wijayanti, D. A. Yuwaningsih, and Salmah, “S (0) -Weakly second submodules,” *Asian-European J. Math.*, vol. 12, no. 5, pp. 1–7, 2019, doi: 10.1142/S1793557119500724.

[6] I. M. Ali and R. I. Khalaf, “Dual Notions of Prime Modules,” *IBN AL- HAITHAM J. PURE APPL. SCI.*, vol. 23, no. 3, 2010.

[7] M. Behboodi, “On the prime radical and Baer’s lower nilradical of modules,” *Acta Math. Hungarica*, vol. 122, no. 3, pp. 293–306, 2009, doi: 10.1007/s10474-008-8028-3.

[8] S. Çeken, M. Alkan, and P. F. Smith, “The dual notion of the prime radical of a module,” *J. Algebr.*, vol. 392, no. February, pp. 265–275, 2013, doi: 10.1016/j.jalgebra.2013.06.015.

[9] T. Khumprapussorn, S. Pianskool, and M. Hall, “(R , S) -Modules and their Fully and Jointly Prime Submodules,” vol. 7, no. 33, pp. 1631–1643, 2012.

[10] D. A. Yuwaningsih and I. E. Wijayanti, “on Jointly Prime Radicals of (R,S)-Modules,” *J. Indones. Math. Soc.*, vol. 21, no. 1, pp. 25–34, 2015, doi: 10.22342/jims.21.1.199.25-34.

[11] D. A. Yuwaningsih, I. E. Wijayanti, and P. W. Prasetyo, "On (R, S)-Module Homomorphisms," *J. Phys. Conf. Ser.*, vol. 1188, no. 1, 2019, doi: 10.1088/1742-6596/1188/1/012114.

[12] D. A. Yuwaningsih and I. E. Wijayanti, "On Jointly Second (R, S)-Submodules," *Southeast Asian Bull. Math.*, vol. 45, no. 4, pp. 561–570, 2021.