Limits: Journal of Mathematics and Its Applications
E-ISSN: 2579-8936
P-ISSN: 1829-605X
Vol. 20, No. 1, Maret 2023, 11-24
DOI: http://dx.doi.org/10.12962/limits.v20i1.7917

Pelabelan Jarak Tidak Teratur Titik pada Graf Persahabatan Lengkap Diperumum

Cindy Ainun Majid [1]*, Dian Eka Wijayanti[1], Aris Thobirin[1], Puguh Wahyu Prasetyo[2]
[1,2] Universitas Ahmad Dahlan; Kampus 4 UAD, Jalan Lingkar Selatan, Tamanan, Bantul, Indonesia
[1]Program Studi Matematika UAD Yogyakarta, [2]Program Studi Pendidikan Matematika UAD Yogyakarta
e-mail: cindyainunmajid@gmail.com

Diajukan: 31 Oktober 2020, Diperbaiki: 7 Januari 2023, Diterima: 2 Maret 2023

Abstrak

Pelabelan graf merupakan pemberian label pada elemen-elemen graf seperti titik, sisi, titik dan sisi. Pelabelan jarak tak teratur titik merupakan salah satu jenis pelabelan hasil pengembangan dari pelabelan jarak ajaib dan pelabelan jarak (a, b) anti-ajaib. Jika diberikan suatu graf sederhana $G = (V, E)$, maka bobot v dihitung berdasarkan jumlah label dari himpunan titik tetangga terbuka v yaitu $N(v)$. Nilai ketidakteraturan jarak pada graf G, dinotasikan dengan $dis(G)$, adalah nilai terkecil dari label terbesar k sehingga G memiliki $k-$pelabelan jarak tidak teratur titik. Penelitian ini bertujuan untuk mengkonstruksikan bentuk graf persahabatan lengkap diperumum $(Kf_{m,n})$, menentukan fungsi pelabelan, menentukan nilai jarak ketidakteraturan, kemudian merumuskan dan membuktikan teorema hasil pelabelan tersebut. Objek dari penelitian ini adalah pemberian label pada setiap titik pada graf persahabatan lengkap diperumum. Metode penelitian ini adalah studi pustaka yang diperoleh melalui berbagai sumber. Berdasarkan hasil penelitian, diketahui bahwa graf $Kf_{m,n}$ mempunyai pelabelan jarak tidak teratur titik, dengan fungsi pelabelan $\lambda(v_0) = 1, \lambda(v_{i,j}) = j + 2(i-1)$, $i = 1, \dots, m$ dan $j = 1, \dots, n$, untuk suatu bilangan bulat m dan n, $n \geq 3$. Nilai ketidakteraturan titik $dis(G)$ pada graf persahabatan lengkap diperumum $Kf_{m,n}$ adalah $2(m-1) + n$.

Kata Kunci: jarak, ketetanggaan terbuka, pelabelan jarak tidak teratur titik, nilai ketidakteraturan titik, graf persahabatan lengkap diperumum,.

Abstract

Graph labeling is the labeling of graph elements such as vertex, edge and both. distance vertex irregular labeling is a type of labeling resulting from the development of distance magic labeling and (a, b)-distance anti-magic labeling. Let $G = (V, E)$, be a simple graph. The distance vertex irregular labeling of G is a vertex labeling so that the weight of each vertex $v \in V(G)$ is different. The weight of v is calculated based on the sum of vertices label in the set of neighboring vertex v, namely $N(v)$. Distance vertex irregularity strength of G, denoted as $dis(G)$, is the smallest value of the largest label (k) so that G has a distance vertex irregular $k-$labeling. This study aims to construct a generalized complete friendship graph $(Kf_{m,n})$, determine the labeling function, determine the distance vertex irregularity strength then formulate and prove the theorem resulting from the labeling. The object of this research is to label each vertex on a generalized complete friendship graph. This research method is a literature study obtained through various sources. Based on the research results, it is known that the graph $Kf_{m,n}$ has distance vertex irregular labeling. For an integer m and n, $n \geq 3$, the labeling function of $Kf_{m,n}$ is $\lambda(v_0) = 1, \lambda(v_{i,j}) = j + 2(i-1), i = 1, \dots, m$ and $j = 1, \dots, n$. Distance vertex irregularity strength of generalized complete friendship graph is $tdis(Kf_{m,n}) = 2(m-1) + n$.

***Keywords**: distance, open neighbors, distance vertex irregular labeling, distance vertex irregularity strength, generalized complete friendship grap*

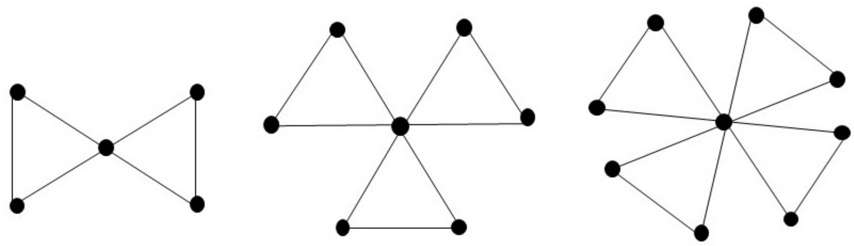
1 Pendahuluan

Graf merupakan suatu struktur yang terdiri dari titik yang disebut dengan *vertex* dan rusuk atau *edge* yang merupakan penghubung *vertex*. Graf banyak digunakan sebagai alat bantu untuk menggambarkan atau menyatakan suatu permasalahan tertentu seperti masalah transportasi agar lebih mudah dimengerti dan diselesaikan secara matematis. Permasalahan tersebut dimodelkan dalam bentuk graf $G(V,E)$, dimana V adalah sebuah himpunan berhingga tak kosong dari elemen yang disebut *vertex* atau titik, dan E adalah sebuah himpunan berhingga (yang memungkinkan berupa himpunan kosong) dari pasangan tak terurut $u,v \in V(G)$ yang disebut sisi. $V(G)$ disebut himpunan titik dari G dan $E(G)$ disebut himpunan sisi dari G. Salah satu topik teori graf yang menarik dan dapat dimanfaatkan dalam berbagai bidang ilmu adalah pelabelan graf. Pelabelan graf dapat diaplikasikan untuk menyelesaikan masalah jaringan komputasi dan pembangkitan kunci dalam kriptografi. Pelabelan graf merupakan suatu fungsi injektif yang memetakan unsur himpunan titik dan unsur himpunan sisi ke himpunan bilangan asli yang disebut dengan label. Jika domain fungsi adalah sebuah himpunan titik maka disebut pelabelan titik, jika domain fungsi adalah sebuah himpunan sisi maka disebut pelabelan sisi sedangkan jika domain fungsi adalah sebuah himpunan titik dan sisi maka disebut pelabelan total [1]. Pelabelan graf dapat digunakan untuk memodelkan suatu masalah yang dipresentasikan oleh titik dan sisi agar memudahkan dalam menganalisis dan mengambil Simpulan, misalnya pada masalah penjadwalan [2]. Berdasarkan sejarah perkembangannya, pelabelan graf pertama kali diperkenalkan pada tahun 1964 oleh Sedlacek, kemudian dilanjutkan tahun 1966 oleh Stewart dan pada tahun 1972 oleh Kotzig serta Rosa [3]. Hingga kini dikenal beberapa jenis pelabelan pada graf, yaitu pelabelan harmonis, pelabelan tak teratur, pelabelan *graceful*, pelabelan ajaib (magic labeling) dan pelabelan anti ajaib (anti magic labeling). Pelabelan tidak teratur sendiri pertama kali dikenalkan oleh Chartrand pada tahun 1986 dan didefinisikan sebagai fungsi yang memetakan setiap elemen dalam himpunan sisi suatu graf ke himpunan $\{1,2,\dots,k\}$ yang menghasilkan bobot setiap titik berbeda [4]. Suatu graf sederhana G dikatakan memiliki $k-$pelabelan tidak teratur titik jika setiap dua titik berbeda x dan u memiliki bobot yang berbeda. Nilai ketidakteraturan graf G dinotasikan $s(G)$, adalah bilangan positif terkecil sedemikian sehingga graf G memiliki $k-$pelabelan tak teratur. Pelabelan jarak yaitu pelabelan yang domainnya titik yang memperhitungkan jarak antar titik yang bertetangga. Pelabelan jarak merupakan pelabelan dengan tujuan memperhitungkan bobot suatu titik berdasarkan jumlah nilai fungsi dari titik yang bertetangga dengan titik n tersebut. Penelitian terkait jenis-jenis pelabelan sudah banyak dilakukan, akan tetapi pelabelan yang masih jarang dikaji yaitu pelabelan berdasarkan jarak yang disebut pelabelan jarak. Pelabelan jarak juga dapat dibagi menjadi beberapa pelabelan, salah satunya adalah pelabelan jarak tak teratur titik. Pelabelan jarak tak teratur titik yaitu pelabelan dengan memberikan nilai bilangan bulat positif (nilai yang digunakan boleh berulang) pada himpunan titik dari suatu graf. Bobot titik yang dihasilkan dari jumlahan semua label titik yang berdekatan harus mempunyai nilai yang berbeda [5]. Penelitian tentang pelabelan jarak tak teratur titik pada beberapa graf sudah banyak dilakukan misalnya oleh [5], [6], dan [7]. Meskipun banyak penelitian tentang pelabelan tak teratur, akan tetapi belum ada peneliti yang melakukan penelitian tentang pelabelan jarak tak teratur titik. Disisi lain graf persahabatan lengkap diperumum mempunyai banyak kegunaan, salah satunya sebagai alternatif desain jaringan komputer. Pada jaringan komputer yang berbentuk graf persahabatan lengkap diperumum, terdapat satu server utama yang terhubung dengan n komputer yang saling terhubung satu sama lain. Hal inilah yang menjadi latar belakang peneliti untuk melakukan penelitian topik tersebut. Berikut ini diawali dengan definisi dari graf persahabatan sebagai berikut.

Definisi 1 [8] *Graf Persahabatan (Friendship) dinotasikan fm, merupakan hasil operasi join dari graf lengkap (K_1) dengan graf lintasan P_2 sebanyak m .*

Untuk memperkuat konsep, perhatikan contoh berikut ini.

Contoh 1 [8] Berikut adalah contoh beberapa graf persahabatan dapat dilihat pada Gambar 1 di bawah ini.

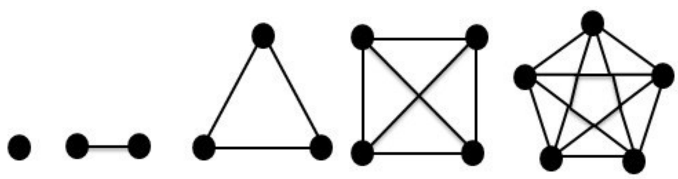


F_5 F_7 F_9

Gambar 1. Graf Persahabatan

Definisi 2 [9] *Graf lengkap adalah graf sederhana yang setiap titiknya terhubung kesemua titik lainnya. Graf lengkap dengan* n *buah titik dilambangkan dengan K_n, setiap titik pada K_n berderajat* $\mathrm{n}-1$. *Jumlah sisi pada graf lengkap yang terdiri dari* n *titik adalah* $(n-1)$.

Contoh 2 [9] Untuk memperkuat pemahaman Definisi 2, berikut ini merupakan contoh graf lengkap dapat dilihat pada Gambar 2.

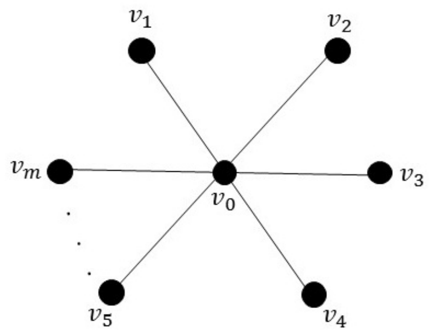


Gambar 2. Graf Lengkap

Definisi 3 [10] *Graf bintang* S_m *adalah graf dengan* $m + 1$ *titik, dengan satu titik berderajat* m*, yang dinamakan titik pusat, dan* m *titik berderajat satu, yang dinamakan daun*.

Untuk memperjelas Definisi 3 akan diberikan contoh yang memberikan ilustrasi graf bintang S_m.

Contoh 3 [10] Contoh dari graf bintang dapat dilihat pada Gambar 3 berikut ini.

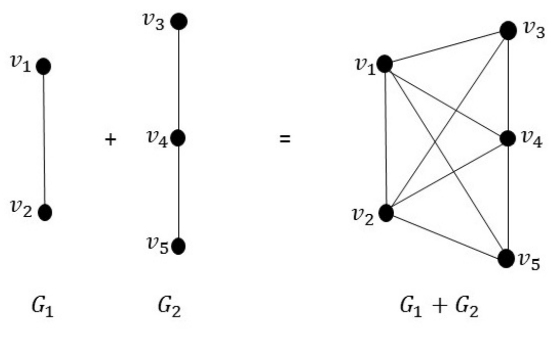


Gambar 3. Graf Bintang S_m

Definisi 4 [1] *Pelabelan jarak tak teratur titik adalah sebuah fungsi* $f : V(G) \to \{1,2,\dots,k\}$ *sedemikian sehingga bobot dari setiap himpunan titiknya berbeda. Sehingga bobot dari titik* $v \in V(G)$ *dari pelabelan* f *dapat didefinisikan sebagai berikut:* $w(v) = \sum_{u \in N(v)} f(u)$ *dimana* $N(v)$ *adalah sebuah himpunan dari semua tetangga dari titik* v *yaitu himpunan titik yang berjarak 1. Dengan kata lain bobot dari titik* v *adalah jumlah semua label titik tetangga dari titik* v *tersebut.*

Definisi 5 [11] *Operasi join (joint)* $G_1 + G_2$ *masing-masing memiliki titik dan sisi, dimana setiap sisi yang berasal dari* G_1 *bertetangga dengan semua titik yang berasal dari* G_2*. Join dari graf* G_1 *dan* G_2 *dinotasikan sebagai* $G = G_1 + G_2$ *adalah suatu graf* G *dengan himpunan titik* $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ *dan himpunan sisi* $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv | u \in V(G_1), v \in V(G_2)$.

Contoh 4 [11] Misalkan diketahui suatu graf G_1 yang terdiri dari 2 titik yang dihubungkan oleh satu sisi dan graf G_2 adalah suatu graft bintang dengan tiga titik. Ilustrasi operasi join pada suatu graf G_1 dan G_2 adalah sebagai berikut.



Gambar 4. Operasi Join

Definisi-definisi dan contoh-contoh yang telah disebutkan pada bagian pendahuluan ini akan digunakan sebagai pengantar untuk memahami hasil penelitian yang akan disampaikan dalam paper ini pada bagian ketiga.

2 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode penelitian dengan kajian pustaka (*Library Research*). Peneliti membaca dan mempelajari literatur-literatur pendukung tentang pelabelan jarak tak teratur titik pada graf persahabatan lengkap diperumum, kemudian menyusun simpulan dalam bentuk sebuah teori dan membuktikan teori tersebut secara matematis.

2.1 Pengumpulan literatur terkait

Penelitian yang dilaksanakan berupa studi pustaka dengan mempelajari literatur-literatur yang berhubungan dengan permasalahan yang telah disampaikan pada bagian Pendahuluan. Data yang digunakan adalah hasil-hasil penelitian yang dipublikasikan baik dalam buku, artikel ilmiah dalam prosiding maupun jurnal. Penulis mencari dan mengumpulkan literatur-literatur yang membahas tentang pelabelan jarak tak teratur titik pada graf persahabatan lengkap diperumum, serta materi lain yang berhubungan dengan pokok bahasan tersebut, sehingga dapat melengkapi pengembangan teori yang akan dirumuskan.

2.2 Kajian Literatur

Peneliti membaca dan mempelajari literatur-literatur yang telah terkumpul tentang pelabelan jarak tak teratur titik pada graf persahabatan lengkap diperumum. Kemudian peneliti merumuskan konjektur yang selanjutnya akan dibuktikan secara matematis sehingga diperoleh suatu teorema baru yang dapat memberikan kontribusi dalam perkembangan Teori Graf. Adapun hasil dalam penelitian ini diwujudkan dalam bentuk definisi, lemma, dan teorema.

2.3 Pengembangan

Berdasarkan kajian literatur-literatur yang bersesuaian dengan pembahasan di atas, penulis dapat melakukan pelabelan jarak tak teratur titik pada graf persahabatan lengkap diperumum tersebut. Selanjutnya, penelitian dilakukan dengan membuktikan konjektur-konjektur yang telah berhasil disusun secara matematis.

2.4 Tahapan Penelitian

Adapun langkah-langkah atau tahapan yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Mengonstruksikan pola pada graf persahabatan lengkap diperumum.
2. Melakukan pelabelan jarak tak teratur titik pada graf persahabatan lengkap diperumum.

3. Mengamati pola-pola pelabelan jarak tak teratur titik pada graf persahabatan lengkap diperumum.
4. Menyusun teorema hasil dari pelabelan jarak tak teratur titik pada graf persahabatan lengkap diperumum.
5. Mencari nilai ketakteraturan jarak dari pelabelan jarak tak teratur titik pada graf persahabatan lengkap diperumum.

3 Hasil dan Pembahasan

Pada bagian ini dikonstruksi suatu graf yang merupakan hasil operasi join dari dua buah graf lengkap K_1 dan n buah graf lengkap K_n. Diberikan graf lengkap K_1 dengan himpunan titik $V(K_1) = \{v_0\}$ dan graf lengkap K_n sebanyak m buah. Dinotasikan $K_{n,i}$ sebagai graf K_n yang ke$-i$, sehingga diperoleh:

$$V(K_{n,1}), V(K_{n,2}), \dots, V(K_{n,m}) = \{v_{1,1}, v_{1,2}, \dots, v_{1,n}\}, \dots, \{v_{m,1}, v_{m,2}, \dots, v_{m,n}\}$$

$$E(K_{n,1}), E(K_{n,2}), \dots, E(K_{n,m}) = \{v_{1,i}v_{1,j}\}, \dots, \{v_{m,i}v_{m,j},\};\ i,j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j$$

Gabungan m buah graf lengkap K_n dinotasikan dengan mK_n adalah sebagai berikut:

$$mK_n = K_{n,1} \cup K_{n,2} \cup, \dots, \cup K_{n,m} = \cup_{i=1}^{m}\ K_{n,i}$$

$$V(mK_n) = \{\, v_{i,j}\ ; i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n\}$$

$$E(mK_n) = \{v_{1,i}\, v_{1,j}\, , v_{2,i}\, v_{2,j}, \dots, v_{m,i}\, v_{m,j};\ i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n, \qquad i \neq j\}$$

maka

$$|V(mK_n)| = mn \text{ dan } |E(mK_n)| = m.\frac{n(n-1)}{2}$$

Kontruksi di atas memotivasi adanya definisi graf persahabatan lengkap diperumum sebagai berikut.

Definisi 6 *Graf persahabatan lengkap diperumum dinotasikan dengan $K_{m,n}$ adalah graf hasil operasi join graf lengkap K_1 dengan mK_n, yaitu $Kf_{m,n} = K_1 + mK_n$. Himpunan titik dan sisi pada graf persahabatan lengkap diperumum adalah sebagai berikut*

$$V(Kf_{m,n}) = V(K_1) \cup V(mK_n) = \{v_0\} \cup \{v_{i,j}\ ; i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n\}$$

dengan

$$|V(Kf_{m,n})| = mn + 1$$

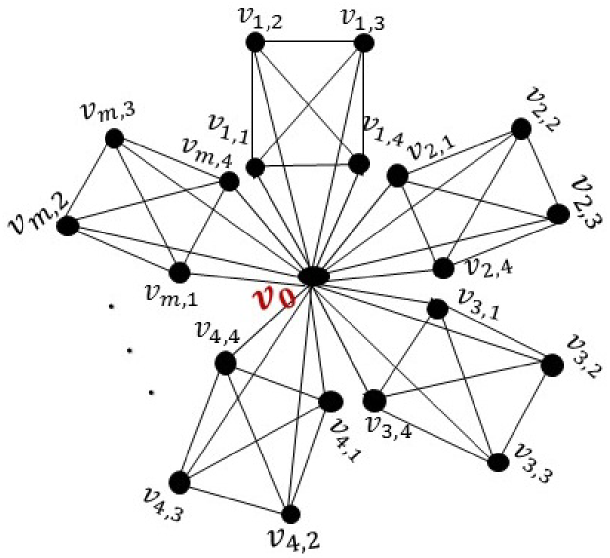
dan

$$E(Kf_{m,n}) = \{v_0 v_{i,j}\ ; i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n\} \cup \{v_{1,i}\, v_{1,j}\, , v_{2,i}\, v_{2,j}\, , \dots, v_{m,i}\, v_{m,j}\ ;$$
$$i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n, i \neq j\}$$

dengan

$$\left|E\left(Kf_{m,n}\right)\right| = |E(mK_n)| + |E(K_n) + v_0| = mn + mn = 2mn.$$

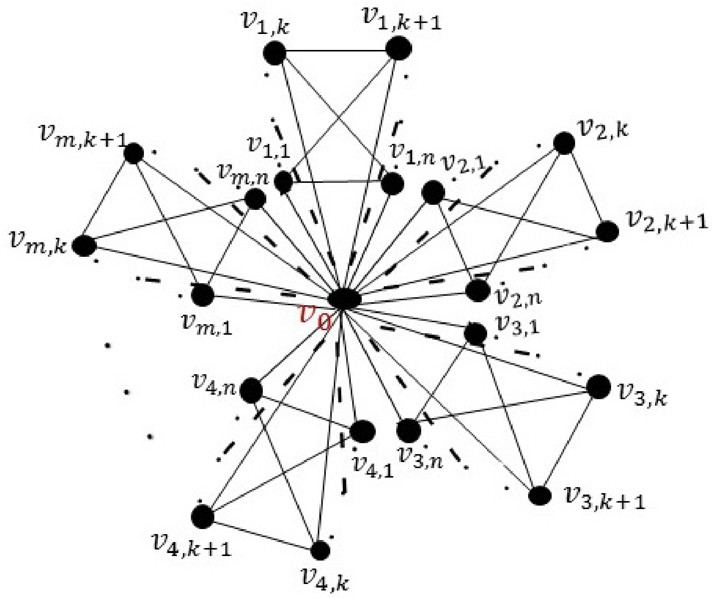
Untuk memperjelas konsep graf persahabatan yang diperumum, ilustrasi graf persahabatan lengkap diperumum $Kf_{m,n} = K_1 + mK_n$, dengan $n = 4$ dapat dilihat pada Gambar 5 berikut ini :



Gambar 5. Graf Persahabatan Lengkap diperumum $Kf_{m,4}$

Lemma 7 *Graf persahabatan lengkap diperumum* $Kf_{m,n}$ *mempunyai 1 titik dengan derajat terbesar* $\Delta = mn$ *dan* mn *titik dengan derajat sama yaitu* n.

Bukti Tinjau graf persahabatan lengkap diperumum $Kf_{m,n}$ yang titik-titiknya telah diberi nama seperti pada gambar di bawah ini.

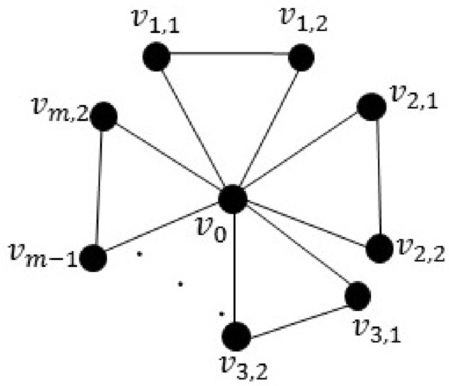


Gambar 6. Graf Persahabatan Lengkap diperumum $Kf_{m,n}$

Perhatikan bahwa graf $Kf_{m,n} = K_1 + mK_n$ memiliki himpunan sisi $E(Kf_{m,n}) = \{v_0v_{1,1}, v_0v_{1,2}, \dots, v_0\, v_{1,n}, \dots, v_0v_{m,1}, v_0v_{m,2}, \dots, v_0v_{m,n}\} \cup E(mK_n)$ dengan $N(v_0) = \{v_{1,1}, \dots, v_{1,n}, \dots, v_{m,1}, \dots, v_{m,n}\}$, sehingga $d(v_0) = |N(v_0)| = mn$, yang merupakan derajat terbesar titik pada $Kf_{m,n}$. Berdasarkan Definisi 6 diketahui bahwa $Kf_{m,n}$ adalah graf hasil operasi join graf lengkap K_1 dengan mK_n, yaitu $Kf_{m,n} = K_1 + mK_n$, maka $Kf_{m,n}$ memiliki titik yang berasal dari n buah K_n, dengan derajat titik K_n ditambah v_0 maka mn titik dengan derajat sama yaitu n.

Berdasarkan Observasi 1 pada Slamin dalam [5] yang menyatakan bahwa graf hasil konstruksi di atas mempunyai pelabelan jarak tak teratur titik karena setiap titik dalam graf persahabatan lengkap diperumum tidak mempunyai tetangga yang sama, bagian selanjutnya akan menjelaskan pelabelan jarak tak teratur titik pada graf persahabatan lengkap diperumum yaitu dengan menyelidiki nilai formula pelabelan dan nilai ketakteraturan titik pada graf tersebut.

Graf persahabatan lengkap diperumum diperoleh dari operasi join graf K_1 dengan m buah graf lengkap K_n. Untuk $n = 1$ diperoleh graf bintang $Sm = K_1 + mK_1$ (lihat Gambar 3). Dari Gambar 3 diketahui bahwa graf Sm tidak mempunyai pelabelan jarak tak teratur titik karena setiap titik $v_i \in V(S_m)$; $i = 1, \dots$,m mempunyai tetangga yang sama yaitu v_0. Untuk $n = 2$ diperoleh graf persahabatan $fm = K_1 + mK_2$ akan diperoleh graf persahabatan fm.

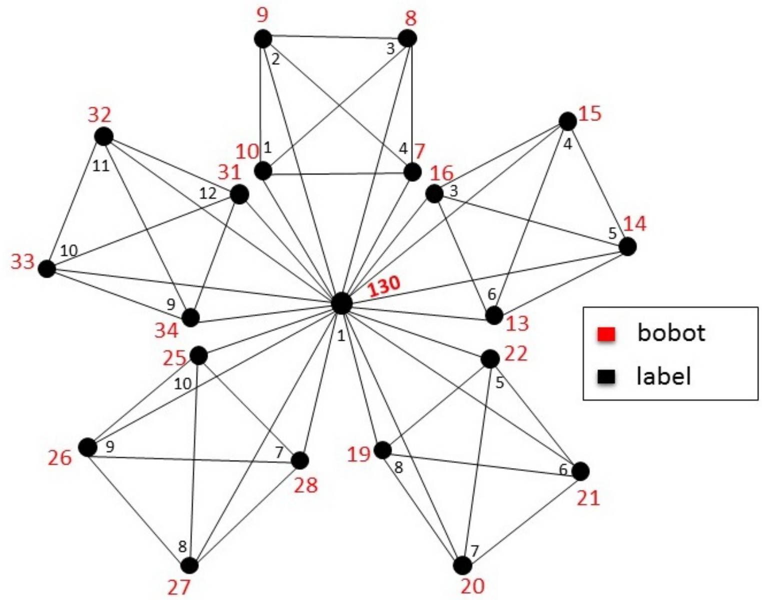


Gambar 7. Graf Persahabatan

Perhatikan Gambar 7 di atas. Nilai ketakteraturan jarak pada graf G adalah $dis(f_m) = 2n$, dapat dilihat dalam [12]. Untuk $n = 3,4, \dots, n$ nilai ketakteraturan jarak akan dibahas melalui beberapa teorema dan contoh berikut ini. Berdasarkan Lemma 7 diketahui bahwa graf persahabatan lengkap diperumum $Kf_{m,n}$ memiliki derajat terkecil $\delta = n$ dan derajat terbesar $\Delta = mn$. Dimana jumlah keseluruhan titik $|V(Kf_{m,n})| = mn + 1$ dan jumlah keseluruhan sisi

$\left|E\left(Kf_{m,n}\right)\right| = m.\frac{|n(n-1)|}{2}$. Selanjutnya akan dibahas pelabelan jarak tak teratur titik untuk $K_1 + mK_n$, $n \geq 3$.

Contoh 5 Pelabelan jarak tak teratur titik pada graf persahabatan lengkap diperumum $Kf_{5,4}$ dapat dilihat pada Gambar 8 di bawah ini.



Gambar 8. Pelabelan Jarak Tak Tertur Titik pada Graf Persahabatan Lengkap diperumum $Kf_{m,n}$

Selanjutnya akan ditentukan $dis(Kf_{5,4})$. Perhatikan bahwa dengan fungsi pelabelan λ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\lambda(v_0) = 1$$

$$\lambda(v_{i,j}) = j + 2(i - 1) \,;\, i = 1,2,\ldots,5 \text{ dan } j = 1,2,\ldots,4$$

maka diperoleh nilai $dis(Kf_{5,4}) = 12$, dengan bobot terbesar dimiliki oleh v_0 yaitu $w(v_0) = 130$. Teorema berikut ini menyajikan nilai minimal $dis(Kf_{m,n})$ dari graf persahabatan lengkap diperumum $(Kf_{m,n})$.

Teorema 8 *Jika* $Kf_{m,n}$ *adalah graf persahabatan lengkap diperumum maka diperoleh*

$$dis(Kf_{m,n}) \geq 2m + \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1$$

Bukti Berdasarkan Definisi 6 diketahui bahwa $Kf_{m,n} = K_1 + mK_n$ dengan $mK_n = K_{n,1} \cup K_{n,2} \cup \ldots \cup K_{n,m}$, $K_{n,i} = K_n$. Indeks i menunjukkan graf lengkap K_n yang ke$-$ i, dengan $i = 1, \ldots m$, dan $dis(K_n) = n$ (berdasarkan Teorema 1 dalam [5]). Dari Gambar 6 diketahui bahwa $K_{n,i}$ adalah subgraf dari $Kf_{m,n}$. Tanpa mengurangi keumuman, namakan $K_{n,1}$ sebagai subgraf $Kf_{m,n}$ yang memiliki titik dengan bobot terkecil di $Kf_{m,n}$ yaitu v. Dari observasi 2 dalam [5] diketahui bahwa label setiap titik pada $V(K_{n,1})$ berbeda, sehingga dengan memberi label 1 pada v_0 titik pusat $Kf_{m,n}$ diperoleh:

$$w(v) = 1 + \sum_{j=1}^{n-1} j = \frac{n(n-1)}{2} + 1.$$

Bobot terbesar di subgraf $K_{n,1}$ haruslah lebih besar atau sama dengan,

$$\frac{n(n-1)}{2} + 1 + n - 1$$

Karenanya bobot titik terkecil pada graf K_n selanjutnya haruslah lebih besar dari $\frac{n(n-1)}{2} + n$, yaitu

$$\frac{n(n-1)}{2} + n + n - 1$$

Dan bobot terbesar pada K_n tersebut haruslah,

$$\frac{n(n-1)}{2} + n + n - 1 + n - 1$$

Untuk graf $Kf_{m,n}$ yang memiliki subgraf K_n sebanyak m. Bobot titik terbesar $Kf_{m,n}$ haruslah lebih besar dari

$$\frac{n(n-1)}{2} + m(n-1) + (m-1)(n-1) = \frac{n(n-1)}{2} + mn - m + mn - m - n + 1$$

sehingga diperoleh

$$\frac{n(n-1)}{2} + m(n-1) + (m-1)(n-1) = \frac{n(n-1)}{2} + 2mn - 2m - n + 1$$

Karena label adalah besarnya bobot dibagi derajat titik maka label terbesar pada graf $Kf_{m,n}$ haruslah lebih besar atau sama dengan,

$$\left\lceil \frac{n(n-1)}{2} + 2mn - 2m - n + 1\, n - 1 \right\rceil$$
$$= \left\lceil \frac{n(n-1)}{2} + (n-1) + 2m(n-1)n - 1 - (n-1)n - 1 \right\rceil$$
$$= \left\lceil \frac{n}{2} + 2m - 1 \right\rceil = 2m + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1$$

sehingga diperoleh,

$$dis(Kf_{m,n}) \geq 2m + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1$$

Selanjutnya pada teorema di bawah ini akan diberikan syarat cukup agar diperoleh $dis(Kf_{m,n}) = 2m + n - 2$.

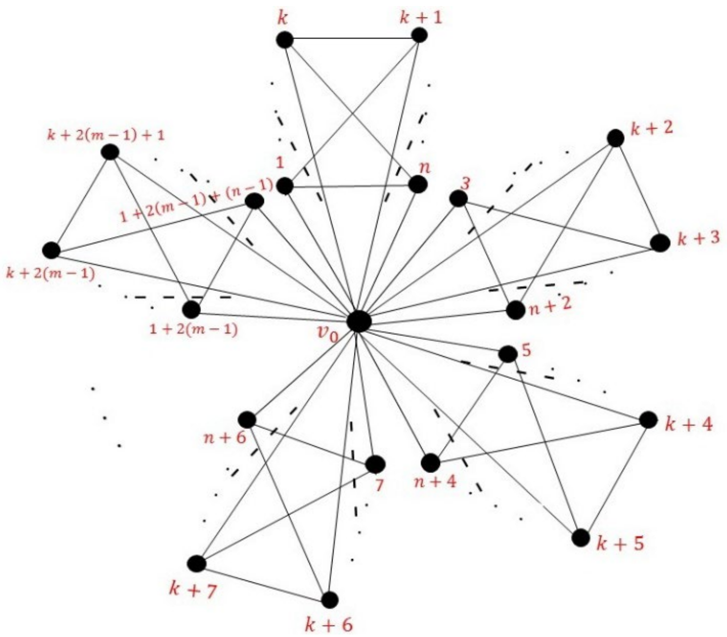
Teorema 9 *Graf persahabatan lengkap diperumum* $Kf_{m,n}$ *mempunyai pelabelan jarak tak teratur titik dengan nilai jarak ketakteraturan,* $dis(Kf_{m,n}) = 2m + n - 2$.

Bukti Diberikan graf persahabatan lengkap diperumum $Kf_{m,n}$ dengan penamaan titik seperti pada Gambar 6. Graf $Kf_{m,n}$ memiliki m buah graf Kn sebagai subgrafnya. Pembuktian pada Observasi 2 dalam [5] yang menyatakan bahwa label setiap titik pada K_n haruslah berbeda. Lebih lanjut, definisikan λ , suatu fungsi pelabelan jarak tak teratur titik pada graf $Kf_{m,n}$ sebagai berikut:

$$\lambda\,(v_0)\ =\ 1$$

$$\lambda\left(v_{i,j}\right) = j + 2(\,i-1\,);\ i = 1,\ldots m \text{ dan } j = 1,\ldots,n$$

Pelabelan pada graf ini dapat dilihat pada Gambar 9 di bawah ini dengan warna merah menunjukan label titik.



Gambar 9. Pelabelan Jarak Tak Teratur Titik pada $Kf_{m,n}$

Oleh sebab itu diperoleh

$$w(v_{i,j}) = \lambda(v_0) + \sum_{v\,\in\,N(v_{a,b})} \lambda(v)$$

$$w(v_0)\ =\ \sum_{v\,\in\,N(v_0\,)} \lambda(v)$$

Karena v_0 bertetangga dengan semua titik $\left(v_{i,j}\right)$, $i = 1,\ldots,m$ dan $j = 1,\ldots,n$ maka bobot v_0 adalah jumlahan semua label titik $v_{i,j}$ pada $Kf_{m,n}$, yaitu:

$$w(v_0) = \sum \lambda\,(v_{i,j}), i = 1,\ldots,m\ dan\ j = 1,\ldots,n$$

Hal ini menyebabkan titik v_0 tidak mempengaruhi besarnya $dis(Kf_{m,n})$. Untuk graf $K_{n,1}$ diperoleh bobot titik, sebagai berikut:

$$w(v_{1,n}) = 1 + 2 + \ldots + n - 1 = \frac{n(\,n-1\,)}{2} + 1$$

$$w(v_{1\ ,m-1}\ )\ =\ 1 + 2 + \ldots + n - 2 + n = \frac{n(\,n-1\,)}{2} + 1 + 1$$

$$\vdots$$

$$w(v_{1,1}) = 2+3+\ldots+n = \frac{n(n-1)}{2} + (n-1) + 1$$

Diperoleh barisan bobot yang bersesuaian

$$\frac{n(n-1)}{2} + 1, \frac{n(n-1)}{2} + 2, \ldots, \frac{n(n-1)}{2} + (n-1) + 1$$

Dapat dilihat pada Gambar 9 bahwa label titik $v_{r,k}$ pada graf $K_{n,r}$ berselisih 2 dari titik $v_{r+1},_{k}$, dengan $r = 1, \ldots, m,$ dan $k = 1, \ldots, n$. Karena jika label tersebut sama, akan menghasilkan barisan bobot yang sama. Jika $v_{r,k}$ dan $v_{r+1,k}$ berselisih 1 maka $w(v_{r+1,n}) = w(v_{r,1})$ sehingga selisih minimal setiap titik yang bersesuaian antara graf $K_{n,i}$ haruslah 2.

Untuk graf $K_{n,2}$ diperoleh bobot titik, yaitu:

$$w(v_{2,n}) = 3+4+\ldots+(n-1+2) + 1 = \frac{n(n-1)}{2} + (n-1) + (n-1) + 1$$

$$w(v_{2,n-1}) = 3+4+\ldots+n+n+2 = \frac{n(n-1)}{2} + (n-1) + (n-1) + 1 + 1$$

$$\vdots$$

$$w(v_{2,1}) = 4+5+\ldots+n+2 = \frac{n(n-1)}{2} + (n-1) + (n-1) + (n-1) + 1$$

Diperoleh barisan bobot yang bersesuaian, yaitu:

$$\frac{n(n-1)}{2} + 2(n-1) + 1, \frac{n(n-1)}{2} + 2(n-1) + 2, \ldots, \frac{n(n-1)}{2} + 3(n-1) + 1$$

Jika langkah-langkah ini dilakukan secara sama untuk semua subgraf K n i , maka akan diperoleh barisan bobot yang bersesuaian yaitu:

$$\frac{n(n-1)}{2} + 1, \frac{n(n-1)}{2} + 2, \ldots, \frac{n(n-1)}{2} + (n-1) + 1,$$

$$\frac{n(n-1)}{2} + 2(n-1) + 1, \frac{n(n-1)}{2} + 2(n-1) + 2, \ldots, \frac{n(n-1)}{2} + 3(n-1) + 1,$$

$$\frac{n(n-1)}{2} + 4(n-1) + 1, \frac{n(n-1)}{2} + 4(n-1) + 2 + \cdots + \frac{n(n-1)}{2} + 5(n-1) + 1,$$

$$\vdots$$

$$\frac{n(n-1)}{2} + 2(m-1)(n-1) + 1, \frac{n(n-1)}{2} + 2(m-1)(n-1) + 2, \ldots, \frac{n(n-1)}{2} + (2m-1)(n-1) + 1$$

Oleh sebab itu, label terbesar dimiliki oleh titik $v_{m,1}$ yaitu $2(m-1) + n$, dengan demikian terbukti bahwa

$$dis(Kf_{m,n}) = 2(m-1) + n.$$

Berdasarkan sifat-sifat yang dimiliki oleh Graf persahabatan lengkap diperumum $Kf_{m,n}$ yang disajikan pada dua teorema sebelumnya, selanjutnya diperoleh akibat sebagai berikut.

Akibat 10 *Graf persahabatan lengkap diperumum $Kf_{m,n}$ tidak mempunyai pelabelan jarak tak teratur titik inklusi yaitu pelabelan jarak pada ketetanggaan tertutup..*

Bukti Diberikan suatu graf $Kf_{\mathrm{m,n}}$ pada pelabelan jarak tak teratur titik inklusi. Bobot setiap titik $v \in Kf_{\mathrm{m,n}}$ dihitung berdasarkan jumlahan label dari titik-titik anggota himpunan tetangga tertutup yang dinotasikan dengan $N[v]$. Ambil sebarang $v_{\mathrm{i,k}}, v_{\mathrm{i,l}} \leq V(K_{n,i}) \subset V(Kf_{\mathrm{m,n}})$ maka:

$$N[v_{i,k}] = N(v_{i,k}) \cup \{v_{i,k}\} = V(K_{n,i})$$
$$N[v_{i,l}] = N(v_{i,l}) \cup \{v_{i,l}\} = V(K_{n,i})$$

Berdasarkan Lemma 1 dalam [5] diperoleh $v_{\mathrm{i,k}}$ dan $v_{\mathrm{i,l}}$ memiliki bobot yang sama. Terbukti graf persahabatan lengkap diperumum $Kf_{m,n}$ tidak mempunyai pelabelan jarak tak teratur titik inklusi.

4 Simpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan mengenai pelabelan jarak tak teratur titik pada graf persahabatan lengkap diperumum, diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Konstruksi dari graf persahabatan lengkap diperumum merupakan hasil operasi join dari dua buah graf lengkap K_1 dan m buah graf lengkap K_{n}.
2. Fungsi pelabelan jarak tak teratur titik pada graf Kf*m;n* yaitu sebagai berikut:

$$\lambda(v_0) = 1$$
$$\lambda(v_{\mathrm{i,j}}) = j + 2(i - 1);\ i = 1, \dots, m \text{ dan } j = 1, .., n$$

3. Graf persahabatan lengkap diperumum memiliki pelabelan jarak tak teratur titik untuk $n \geq 3$N.
4. Nilai ketakteraturan titik $dis(G)$ pada graf persahabatan lengkap diperumum $Kf_{\mathrm{m,n}}$ adalah $2(m - 1) + n$.

5 Ucapan Terima Kasih

Ucapan terimakasih kami haturkan kepada Universitas Ahmad Dahlan yang telah menyediakan sarana maupun prasarana selama penelitian ini berlangsung termasuk penggunaan Laboratorium Terpadu Universitas Ahmad Dahlan yang terletak pada kompleks Kampus 4 Universitas Ahmad Dahlan, Jalan Lingkar Selatan, Tamanan, Bantul.

6 Daftar Pustaka

[1] H. Parkhurst, “Pelabelan Total (a,d)-Sisi Anti Ajaib Super Pada Gabungan Graf Lengkap mKn,” *J. Mat. UNAND*, 2014, doi: 10.25077/jmu.3.4.24-27.2014.

[2] J. A. Gallian, “A Dynamic Survey of Graph Labeling,” *Electron. J. Comb.*, 2009.

[3] I. P. Sahli, “Pelabelan Total (a,d)-Titik Antiajaib Super Pada Graf Petersen Yang Diperumum P(n,3) Dengan n Ganjil, n ≥ 7,” *J. Mat. UNAND*, 2014, doi: 10.25077/jmu.3.1.68-77.2014.

[4] C. Corazon Marzuki, “Nilai Total Ketakteraturan Sisi Dari m-Copy Graf Lintasan,” *J. Sains Mat. dan Stat.*, vol. 5, no. 1, pp. 90–98, 2019.

[5] Slamin, “On Distance Irregular Labelling of Graphs,” *Far East J. Math. Sci.*, 2017, doi: 10.17654/MS102050919.

[6] N. H. Bong, Y. Lin, and Slamin, “On Distance-Irregular Labelings of Cycles and Wheels,” *Australas. J. Comb.*, 2017.

[7] M. Bača, A. Semaničová-Feňovčíková, Slamin, and K. A. Sugeng, “On Inclusive Distance Vertex Irregular Labelings,” *Electron. J. Graph Theory Appl.*, 2018, doi: 10.5614/ejgta.2018.6.1.5.

[8] G. A. Liza, “Dimensi Partisi Dari Graf Persahabatan,” *J. Mat. UNAND*, 2019, doi: 10.25077/jmu.7.3.54-58.2018.

[9] G. Chartrand, *Introductory Graph Theory*. New York: Dover Publications, Inc, 1985.

[10] D. Irawati, “Pelabelan Total Sisi Ajaib Pada Graf Bintang,” *J. Mat. UNAND*, 2013, doi: 10.25077/jmu.2.1.85-89.2013.

[11] G. Chartrand and L. Lesniak, *Graphs & Digraphs*. 2016.

[12] T. Windartini, Slamin, and Dafik, “Nilai Ketakteraturan Jarak dari Graf Friendship dan Graf Matahari,” in *Prosiding Seminar nasional Matematika 2014*, 2014, pp. 211–219.